

ルジャンドル結び目とラック彩色数

木村 直記 (早稲田大学基幹理工学部)

概要

Kulkarni-Prathamesh は、ラック彩色を用いてルジャンドル結び目の不変量を得るために、ルジャンドルラックという概念を導入した。Ceniceros-Elhamdadi-Nelson はこの概念を一般化した。本講演では、この概念を更に一般化した 2-ルジャンドルラックを定義する。2-ルジャンドルラック彩色数を用いることで、Thurston-Bennequin 数が同じ値をとる位相的に自明なルジャンドル結び目たちを全て区別できることを報告する。また、2-ルジャンドルラック彩色数では区別できないルジャンドル結び目の組についても紹介する。

1 ルジャンドル結び目

本節では、ルジャンドル結び目に関する基礎事項を紹介する。

定義 1. 3 次元多様体 M 上の平面場 ξ が M 上の接触構造であるとは、 $\xi = \ker \alpha$ となる M 上の局所的な 1-形式 α に対して、 $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ となるときをいう。このとき、 (M, ξ) を 3 次元接触多様体と呼ぶ。

例 1. $\mathbb{R}^3$ の座標を (x, y, z) としたとき、 $\xi_{std} := \ker(dz + xdy) = \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} \rangle_{\mathbb{R}}$ で定義される $\mathbb{R}^3$ 上の平面場 ξ_{std} は $\mathbb{R}^3$ 上の接触構造である。 ξ_{std} を $\mathbb{R}^3$ 上の標準接触構造という。

定義 2. 3 次元接触多様体 (M, ξ) 内の滑らかな結び目 K がルジャンドル結び目であるとは、 K の各点 p における K の接線が接触平面 ξ_p に含まれるときをいう。

定義 3. 3 次元接触多様体 (M, ξ) 内の 2 つのルジャンドル結び目 K_0 と K_1 に対して、 M のアイソトピー φ_t であって、 $\varphi_0 = \text{id}_M$, $\varphi_1(K_0) = K_1$, $\varphi_t(K_0)$ が任意の $t \in [0, 1]$ に対してルジャンドル結び目となるようなものがあるとき、 K_0 は K_1 にルジャンドル同位であるという。

従って、ルジャンドル同位は全同位よりも厳しい同値関係である。実際に、図 1 の 2 つのルジャンドル結び目は全同位だがルジャンドル同位ではない。

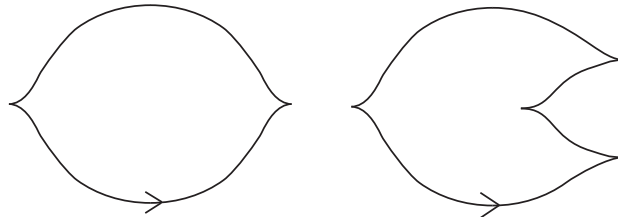


図 1 ルジャンドル同位でないルジャンドル結び目の組

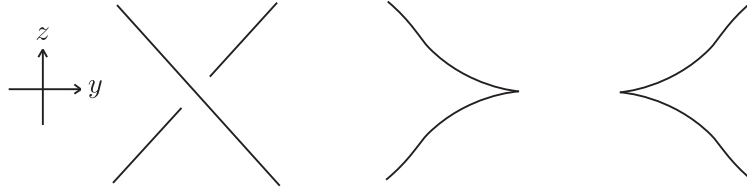


図2 フロント図式に現れる交点とカスプ

以下, $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内のルジャンドル結び目のルジャンドル同位による分類について考える.

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

をフロント射影と呼ぶ. ルジャンドル結び目のフロント図式は以下のような2つの特徴がある.

- (1) 接ベクトルの y 成分が0となる点は yz -平面上ではカスプと呼ばれる特異点になる.
- (2) 各交点において, 上交差の傾きは下交差の傾きより小さい.

フロント図式に関して次の定理が知られている.

定理 4. $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内の2つのルジャンドル結び目 K_0 と K_1 がルジャンドル同位であるための必要十分条件は, K_0 のフロント図式にルジャンドル・ライデマイスター変形と呼ばれる3種類の局所変形を有限回行って K_1 のフロント図式が得られることである.

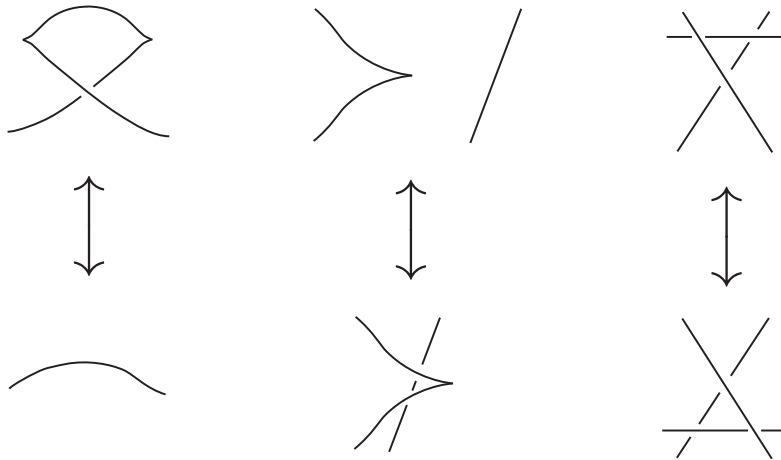


図3 ルジャンドル・ライデマイスター変形

次に, ルジャンドル結び目の代表的な不変量について紹介する. ルジャンドル結び目 K の最も基本的な不変量は K の結び目型であるが, その次に基本的な不変量として, Thurston-Bennequin 数 $tb(K)$ と回転数 $rot(K)$ が知られている. この2つの不変量はルジャンドル結び目の古典的な不変量と呼ばれている. Thurston-Bennequin 数と回転数はともに整数値の不変量であり, Thurston-Bennequin 数が向き付けられていないルジャンドル結び目の不変量であるのに対して, 回転数は向き付けられたルジャンドル結び目の不変量である. ルジャンドル結び目 K の Thurston-Bennequin

数と回転数は K のフロント図式 D から次のように計算できる．

$$tb(K) = w(D) - \frac{1}{2}c(D),$$

$$rot(K) = \frac{1}{2}(dc(D) - uc(D)).$$

ここで， $w(D)$ は D の writhe， $c(D)$ は D のカスプの個数， $dc(D)$ は D の下向きに通過するカスプの個数， $uc(D)$ は D の上向きに通過するカスプの個数である．

また，ルジャンドル結び目 K の向きを逆にした結び目を $-K$ と書くと， $rot(-K) = -rot(K)$ である．

図 1 の 2 つのルジャンドル結び目がルジャンドル同位でないことは古典的な不変量の値が異なることからわかる．実際，図 1 の左側のルジャンドル結び目は $tb = -1$, $rot = 0$ に対し，図 1 の右側のルジャンドル結び目は $tb = -2$, $rot = -1$ である．

古典的な不変量は比較的強力な不変量であることが知られている．例えば，位相的に自明なルジャンドル結び目は古典的な不変量によって完全に分類できることが示されている [3]．

2 2-ルジャンドルラック

本節では，2-ルジャンドルラックを定義し，フロント図式の 2-ルジャンドルラック彩色数がルジャンドル結び目の不変量となることを述べる．

最初にラックとカンドルの定義を復習する．

定義 5. 集合 X 上の二項演算 $*$ が，任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$*x \text{ は } X \text{ 上の全単射,}$$

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$$

を満たすとき， $(X, *)$ をラックという．ラック $(X, *)$ が任意の $x \in X$ に対して $x * x = x$ を満たすとき， $(X, *)$ をカンドルという．

定義 5 におけるカンドルの公理は結び目図式のライデマイスター変形に対応していることから，結び目図式のカンドル彩色数は，図式のとり方に依らず，結び目の不変量となる．

ルジャンドル結び目の不変量を同様の方法で得るために，ルジャンドル・ライデマイスター変形に対応するような公理を考えた．それが次の定義 6 である．

定義 6 (K). ラック $(X, *)$ と X 上の写像 f, g が任意の $x, y \in X$ に対して以下の条件を満たすとき， $(X, *, f, g)$ を 2-ルジャンドルラックと呼ぶ．

$$f \circ g = g \circ f,$$

$$fg(x * x) = x,$$

$$f(x * y) = f(x) * y,$$

$$g(x * y) = g(x) * y,$$

$$x * f(y) = x * y,$$

$$x * g(y) = x * y.$$

注意 7. $(X, *, f, g)$ を 2-ルジャンドルラックとすると, $(X, *, f, g)$ が 2-ルジャンドルカンドルになる必要十分条件は f と g が互いに逆写像であることである.

2-ルジャンドルラックの簡単な例を紹介する.

例 2. $(G, *)$ を共役カンドルとする. G の中心の元 z を任意にとり, G 上の写像 f を $f(x) := zx$ ($x \in G$) と定めると, $(G, *, f, f^{-1})$ は 2-ルジャンドルカンドルになる.

例 3. 集合 X 上の全単射 f と g を可換であるようにとり. X 上の二項演算 $*$ を

$$x * y := (f \circ g)^{-1}(x)$$

と定めると, $(X, *, f, g)$ は constant 2-ルジャンドルラックである.

2-ルジャンドルラックによるフロント図式の彩色を考える. 交点とカスプにおける arc の color の間の関係式を図 4 のように設定する.

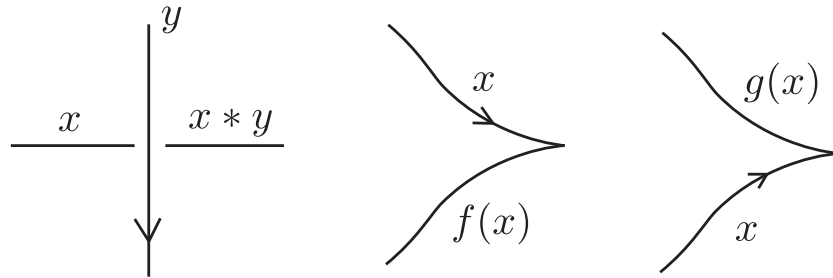


図 4 交点とカスプにおける関係式

交点とカスプにおける関係式をこのように定めると, 定義 6 の 6 つの条件がルジャンドル・ライデマイスター変形に対応していることを確かめられる. 即ち, 次の命題が成立する.

命題 8 (K). $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内のルジャンドル結び目 K のフロント図式を D とする. $(X, *, f, g)$ を 2-ルジャンドルラックとする. このとき, D の $(X, *, f, g)$ -彩色数はルジャンドル・ライデマイスター変形で不変である. 従って, D の $(X, *, f, g)$ -彩色数はルジャンドル結び目 K の不変量である. この不変量を $\#Col(K, X)$ と書く.

3 2-ルジャンドルラック彩色数によるルジャンドル結び目の区別

2-ルジャンドルラック彩色数の不変量としての強さを古典的な不変量との比較を通して考える. まず, Thurston-Bennequin 数が一致するようなルジャンドル結び目の組を 2-ルジャンドルラック彩色数で区別できることがわかった. それが次の定理 9 である.

定理 9 (K). 任意の非負整数 n に対して, ある 2-ルジャンドルラック $(X_n, *, f, g)$ が存在して, $tb(K) = -1 - n$ であるような位相的に自明なルジャンドル結び目 K を $\#Col(K, X_n)$ によって全て区別できる.

Bennequin の不等式と Eliashberg-Fraser の結果 [3] から，任意の位相的に自明なルジャンドル結び目は，ある非負整数 p, n ($0 \leq p \leq n$) に対して，図 5 の $K_{p,n}$ とルジャンドル同位となることがわかる．また， $K_{p,n}$ の古典的な不変量の値は $tb(K_{p,n}) = -1 - n$, $rot(K_{p,n}) = 2p - n$ である．

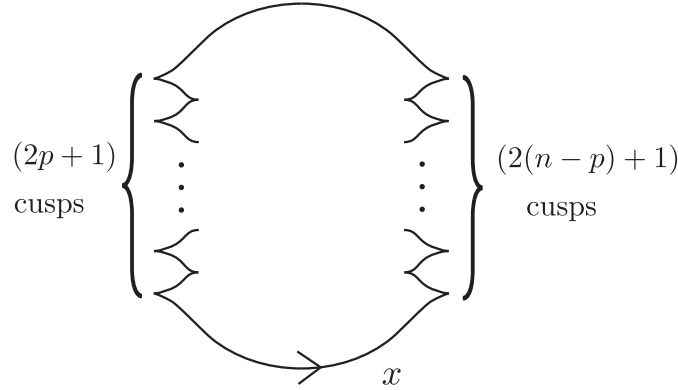


図 5 位相的に自明なルジャンドル結び目 $K_{p,n}$

従って，定理 9 の主張は， $(n+1)$ 個の位相的に自明なルジャンドル結び目 $K_{0,n}, K_{1,n}, \dots, K_{n,n}$ を $(X_n, *, f, g)$ -彩色数で区別できるということである．定理 9 の証明において， $(X_n, *, f, g)$ として constant 2-ルジャンドルラックを用いた．

注意 10. [1] で定義されたルジャンドルラック彩色数を用いても，位相的に自明なルジャンドル結び目 $K_{0,n}, K_{1,n}, \dots, K_{n,n}$ を区別することはできない．

定理 9 において 2-ルジャンドルラック彩色数を用いて区別した $K_{0,n}, K_{1,n}, \dots, K_{n,n}$ は Thurston-Bennequin 数は一致していたが，回転数は異なっていた．そこで次は，Thurston-Bennequin 数と回転数の両方が一致するようなルジャンドル結び目の組を 2-ルジャンドルラック彩色数で区別できるかどうか考えたい．

この問題に対する部分的な解答として，次の定理 11 と定理 12 を得た．

定理 11 (K). $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ 内の 2 つのルジャンドル結び目 K_0 と K_1 の結び目型が同じで， $tb(K_0) = tb(K_1)$, $rot(K_0) = rot(K_1)$ とする．このとき，任意の 2-ルジャンドルカンドル $(X, *, f, g)$ に対して $\#Col(K_0, X) = \#Col(K_1, X)$ が成り立つ．

図 6 のルジャンドル結び目 K_2 と K_3 の結び目型は 5_2 であり， $tb(K_2) = tb(K_3) = 1$, $rot(K_2) = rot(K_3) = 0$ であるが， K_2 と K_3 はルジャンドル同位でないことが示されている [2]． K_2 と K_3 は Chekanov 結び目と呼ばれる．

定理 12 (K). Chekanov 結び目 K_2 と K_3 について次が成り立つ．任意の有限 2-ルジャンドルラック $(X, *, f, g)$ に対して $\#Col(K_2, X) = \#Col(K_3, X)$ ．

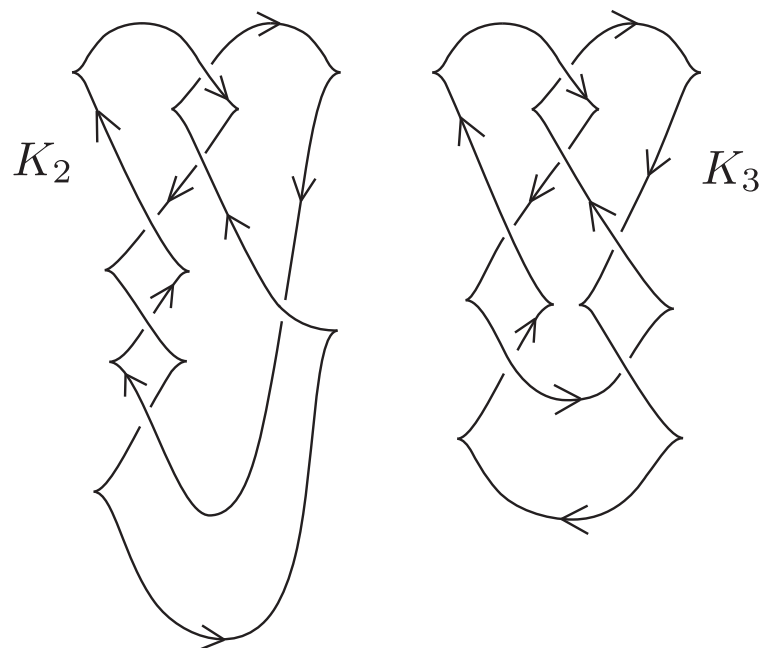


図 6 Chekanov 結び目

参考文献

- [1] J. Cenicer0s, M. Elhamdadi and S. Nelson, *Legendrian rack invariants of Legendrian knots*, Commun. Korean Math. Soc. 36 (2021), no. 3, 623-639.
- [2] Y. Chekanov, *Differential algebra of Legendrian links*, Invent. Math. 150 (2002), no. 3, 441-483.
- [3] Y. Eliashberg and M. Fraser, *Topologically trivial Legendrian knots*, J. Symplectic Geom. 7 (2009), no. 2, 77-127.
- [4] D. Kulkarni and V. Prathamesh, *On rack invariants of Legendrian knots*, (2017), arXiv:1706.07626.