Chain-level MOY relations on Khovanov-Rozansky homology

吉田 純 *
(伊藤昇氏 †, 中兼啓太氏 ‡との共同研究)

1 イントロダクション

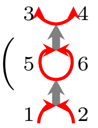
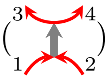
***Khovanov-Rozansky* ホモロジー**は、Khovanov と Rozansky の一連の論文 [6, 7] ([9] も参照) にて構成された絡み目ホモロジーであり、パラメータの選び方によって、その次数付きオイラー数は、量子 $\mathfrak{sl}_n$ 表現に付随する量子不変量 P_n 及び HOMFLY 多項式と定数倍の差を除いて一致する。このホモロジーは、村上-大槻-山田 [8] の考察した重み付き平面三価グラフの計算を圏化することで構成され、特に Reidemeister 変形での不変性は ***MOY* 関係式**の圏化された類似を用いて証明される。さて、Khovanov–Rozansky の原論文 [6, 7] 及び Rasmussen の構成 [9] では、この圏化は**マトリックスファクトリゼーション**と呼ばれるある代数構造のなす圏の導来圏 $D(\mathbf{MF})$ においてなされているが、一般に導来圏の構造は、もとの圏 $\mathbf{MF}$ の素直な構造を歪めてしまうこともあり、可能ならば各種の $D(\mathbf{MF})$ の同型は $\mathbf{MF}$ におけるホモトピー同値として実現されていることが望ましい。ところが、彼らの構成においては、この導来圏での議論は本質的であり、MOY 関係式に対応する同型は、必ずしもこれが可能ではない。このことは、この絡み目ホモロジーを考察するにあたって、いくつかの問題を引き起こす。例えば、上に述べたように Reidemeister 変形についての不変性は MOY 関係式に依存しているので、Reidemeister 変形に対応する複体の射を具体的に記述することが困難になっている。Khovanov ホモロジーの場合に、[5, 2] などで議論されている結び目コボルディズムとの関係や、[3, 4] で筆者らが考察した Vassiliev 微分の圏化において、Reidemeister 変形のなす図式の可換性が本質的であったことを鑑みれば、この困難を解消することは、Khovanov-Rozansky ホモロジーの高次構造を調べる上で非常に重要である。

本研究の目標は、この問題を解決し、MOY 関係式及び Reidemeister 変形に対する具体的な複体の射の記述を得ることである。多項式 $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ とグラフ G に対し、対応する KR ホモロジーの鎖複体を $C_p(G)$ と書く。方針としては、マトリックスファクトリゼーションのホモトピー論を圏 $\mathbf{MF}$ の上の Quillen モデル構造によって定式化し、関手的なリゾリューション $\widetilde{C}_p(G) \to C_p(G)$

*理化学研究所革新知能統合研究センター †茨城工業高等専門学校 ‡Uppsala University
本研究は日本学術振興会科学研究費助成事業 基盤研究 (C) 20K03604 から補助を受けています。また、本研究は令和３年度豊橋技術科学大学高専連携教育研究プロジェクトの補助を受けています。

を取ることにより、導来圏の射を $\widetilde{C}_p(G)$ の上に実現する。特に本稿では、MOY II 関係式に関して以下の結果を証明する:

主定理 (伊藤-中兼-Y.)**.** 圏 **MF** において、以下のホモトピー同値写像が存在する*:*

$\varphi_{\rm II} : \widetilde{C}_p\Bigg($  $\Bigg) \rightleftarrows \widetilde{C}_p\Big($  $\Big)^{\oplus 2} : \overline{\varphi}_{\rm II}$;

$$
\begin{cases}
\varphi_{\rm II}(q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{上}) &= \begin{bmatrix} \frac{q(X_1,X_2)-q(X_2,X_1)}{X_1-X_2} \\ \frac{X_1q(X_2,X_1)-X_2q(X_1,X_2)}{X_1-X_2} \end{bmatrix} \gamma_n v_I \ , \\
\varphi_{\rm II}(q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{下}) &= 0 \quad ;
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_{\rm II}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \gamma_n v_I\right) \\
&= (a+bX_5)\big(\gamma_n v_I^{\mathsf{tot}} \\
&\quad - \gamma_{n-1}((\partial_{s_1}\theta_1^{上} v_1^{下} - \partial_{s_2}\theta_2^{上} v_2^{下})(v_1^{\mathsf{tot}} + v_2^{\mathsf{tot}})v_I^{\mathsf{tot}} - \partial_{s_1}(\theta_2^{下} - \theta_2^{上})v_1^{下} v_2^{下} v_I^{\mathsf{tot}}) \\
&\qquad\qquad + \gamma_{n-2}((\partial_{s_1}\theta_1^{上}\partial_{s_2}\theta_2^{上} + \partial_{s_1}\theta_2^{上}\partial_{s_2}\theta_1^{上})v_1^{上} v_2^{下} v_1^{下} v_2^{下} v_I)\big) \quad .
\end{aligned}
$$

ここで、$v_i^{\mathsf{tot}} := v_i^{上} + v_i^{下}$ であり、また ∂_{s_i} は $s_1 = X_5 + X_6$ 及び $s_2 = X_5X_6$ での偏微分を表す。

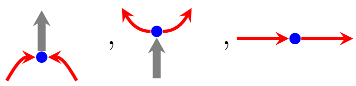
上の主定理の各記号については第 3 節及び第 5 節で定義される。

注意. 主定理では MOY II 関係式のみに言及しているが、MOY I については、原論文 [6, 7] にて既に鎖複体の同型として証明されている。また、上記のリゾリューションの一般論から、MOY III も (具体的な射の形はわからないものの) やはり $\widetilde{C}_p(-)$ についての鎖複体の射として実現できることは確認できる。

2　重み付き平面グラフと MOY 関係式

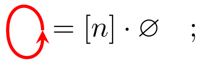
本稿では [6, 7] で対象となっている重み付き平面グラフの変種として、以下の形の重み付き平面グラフを対象とする。***KR* グラフ**とは、境界を持つ有向平面グラフ G であって、そのエッジ集合 $E(G)$ に部分集合 $E^w(G) \subset E(G)$ が指定されているもので、以下を満たすものとする:

- 全ての頂点 $v \in V(G)$ は二価または三価である;
- G の境界は $E^w(G)$ に属するエッジを含まない;
- $E^w(G)$ に属するエッジを太線で書いた時、各頂点の近傍は以下の絵のいずれかと同型である:

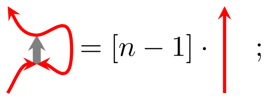


部分集合 $E^w(G) \subset E(G)$ に属するエッジを**ワイドエッジ**と呼ぶ。KR グラフは、二価頂点を無視することで村上-大槻-山田の考察した重み付き平面三価グラフのサブクラスであると見做すこと

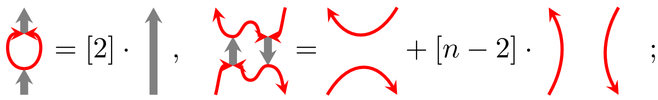
ができ、通常のエッジは重さ 1, ワイドエッジは重さ 2 のエッジに対応している。そこで、整数 $n \geq 2$ を固定した時、MOY 関係式を KR グラフの局所変形に書き下すと以下のようになる:



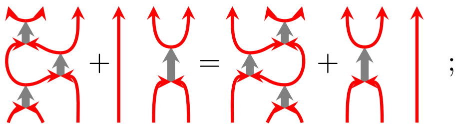
(O)



(I)

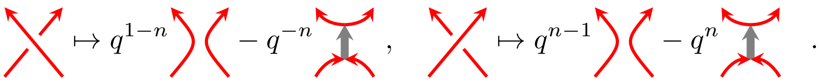


(II)



(III)

ここで、$[i]$ は量子整数 $\frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}$ を表す。今、KR グラフの張る自由 $\mathbb{Z}[\![q]\!]$-加群を上の関係式で割ったものを $\mathcal{G}_n$ と書く。また、絡み目図式 D に対して、D の各交点を以下のように平滑化とワイドエッジの和として分解して得られる $\mathcal{G}_n$ の元を $\overline{D}$ と書く:



定理 2.1 (村上–大槻–山田 [8]). 対応 $D \mapsto \overline{D}$ は絡み目不変量を定める。さらに、$\mathbb{Z}[\![q]\!]$-準同型

$$\mathcal{G}_n \to \mathbb{Z}[\![q]\!] \ ; \quad G \mapsto \langle G \rangle$$

であって、各絡み目 L とその図式 D に対して、$\langle \overline{D} \rangle = P_n(L)$ となるものが存在する。ここで $P_n(L)$ は、量子 $\mathfrak{sl}_n$-表現に付随する絡み目多項式である。

3 Khovanov-Rozansky ホモロジー

Khovanov-Rozansky は論文 [6, 7] において、前節の MOY の計算を圏化することで絡み目ホモロジーを得た。本節ではその構成の概略を述べる。本節を通じて、$\mathbb{K}$ を固定された可換環とする。

定義. R を $\mathbb{K}$ 上の可換代数とする。R 上の**マトリックスファクトリゼーション**とは、次数付き R-加群 $M = \{M^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と次数がそれぞれ ± 1 である次数付き写像 $d_\pm = \{d_\pm^n : M^n \to M^{n \pm 1}\}$ の対であって、以下を満たすものである:

(i) $d_-^2 = 0$, $d_+^2 = 0$;

(ii) ある元 $w \in R$ が存在し、各 n について $d_- d_+ + d_+ d_- : M^n \to M^n$ は恒等写像の w 倍に等しい。

マトリックスファクトリゼーション M と N について、マトリックスファクトリゼーションの射 $M \to N$ とは、次数付き R-加群の次数を保つ準同型であり、$d_\pm$ と可換なものである。R 上のマトリックスファクトリゼーションとその射のなす圏を $\mathbf{MF}(R)$ と書く。

上の定義で、条件 (ii) の元 $w \in R$ を M の**ポテンシャル**と呼ぶ。M の R-加群としての零化イデアルが自明であれば、ポテンシャルは一意に決まる。また、任意のマトリックスファクトリゼーションの射はポテンシャルを保つ。そこで、ポテンシャル w のマトリックスファクトリゼーションのなす充満部分圏を $\mathbf{MF}_w(R) \subset \mathbf{MF}(R)$ と書く。

例 (Koszul ファクトリゼーション)**.** V を有限階数の自由 R-加群とし、元 $v \in V$ 及び R-準同型 $f : V \to R$ を固定する。この時マトリックスファクトリゼーション $\{v, f\} = \{v, f\}_R$ を以下のように定める:

- 次数付き R-加群として、$\{v, f\}$ は $\{v, f\}^{-1} \coloneqq V$ で生成される外積代数である。すなわち、

$$\{v, f\}^n = \begin{cases} V^{\wedge(-n)} & n \leq 0, \\ 0 & n > 0; \end{cases}$$

- $d_+ : \{v, f\}^n \to \{v, f\}^{n+1}$ は $f : V \to R$ が誘導する写像である;
- $d_- : \{v, f\}^n \to \{v, f\}^{n-1}$ は $d_-(\alpha) \coloneqq v \wedge \alpha$ で定義する。

Cartan の公式より、$\{v, f\}$ はポテンシャル $f(v)$ のマトリックスファクトリゼーションであることがわかる。この形のマトリックスファクトリゼーションを ***Koszul* ファクトリゼーション**と呼ぶ。特に V に基底 $v_1, \ldots, v_n$ を固定した時、元 $v \in V$ は元 $a_1, \ldots, a_n \in R$ によって一意に $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ と書ける。また $b_i \coloneqq f(v_i)$ とおくと、Koszul ファクトリゼーション $\{v, f\}$ は以下の $n \times 2$-行列によって特徴付けられる:

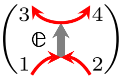
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \quad .$$

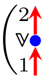
以下では、この行列によって Koszul ファクトリゼーションを表すことにする。

例 (テンソル積)**.** M, N を可換 $\mathbb{K}$-代数 R 上のマトリックスファクトリゼーションとする。テンソル積 $M \otimes_R N$ に通常の鎖複体と同様に微分 d_+ 及び d_- が定義できるが、これらによって $M \otimes_R N$ は再び R 上のマトリックスファクトリゼーションになる。さらに、M, N のポテンシャルをそれぞれ w_M, w_N とすれば、$M \otimes_R N$ はポテンシャル $w_M + w_N$ を持つことが直接計算によって確認できる。

KR グラフ G に対して、集合 $E(G) \setminus E^w(G)$ で生成される $\mathbb{K}$ 上の可換代数を $R(G)$ と書く。すなわち、ワイドエッジでないエッジ $e \in E(G)$ に対応する生成元を X_e と書くと、$R(G)$ は多項式環 $\mathbb{K}[X_e : e \in E(G) \setminus E^w(G)]$ と一致する。多項式 $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ を固定し、各ワイドエッジ $\mathbb{e}$ と二価頂点 $\mathbb{v}$ に対して、$R(G)$ 上の Koszul ファクトリゼーション $C_p(\mathbb{e})$ 及び $C_p(\mathbb{v})$ を以下で定

める:

$C_p\Bigg($  $\Bigg) := \begin{pmatrix} \theta_1 & X_3+X_4-X_1-X_2 \\ \theta_2 & X_3X_4-X_1X_2 \end{pmatrix} \quad ,$

$C_p\Bigg($  $\Bigg) := \left(\dfrac{p(X_2)-p(X_1)}{X_2-X_1} \quad X_2-X_1 \right) \quad .$ (3.1)

ここで、多項式 $u(S,T) \in \mathbb{K}[S,T]$ を $u(X+Y, XY) = p(X)+p(Y)$ を満たすように取った時、(3.1) の θ_1, θ_2 は以下のように書かれる:

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= \frac{p(X_3)+p(X_4)-u(X_1+X_2, X_3X_4)}{X_3+X_4-X_1-X_2} \quad , \\ \theta_2 &:= \frac{u(X_1+X_2, X_3X_4)-p(X_1)-p(X_2)}{X_3X_4-X_1X_2} \quad . \end{aligned}$$

基本対称多項式の基本定理より、$u(S,T)$ は唯一つ存在することに注意する。

定義. 上の状況で、$R(G)$ 上のマトリックスファクトリゼーション $C_p(G)$ を以下で定義する:

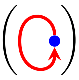
$$C_p(G) := \Big(\bigotimes_{\mathbb{e}:\text{ワイドエッジ}} C_p(\mathbb{e}) \Big) \otimes \Big(\bigotimes_{\mathbb{v}:\text{二価頂点}} C_p(\mathbb{v}) \Big) \quad . \tag{3.2}$$

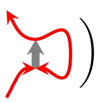
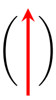
これを G のパラメータ p における ***KR* 複体**と呼ぶ。

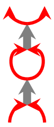
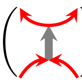
KR 複体に対して MOY 関係式を述べるために、次の概念を導入する。

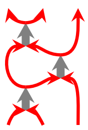
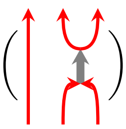
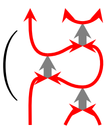
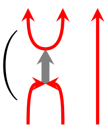
定義. R 上のマトリックスファクトリゼーションの射 $f: M \to N$ が**擬同型**であるとは、f が鎖複体の射 $(M, d_+) \to (N, d_+)$ として擬同型であることである。圏 $\mathbf{MF}(R)$, $\mathbf{MF}_w(R)$ に擬同型の逆射を添加して得られる圏をそれぞれ $D(\mathbf{MF}(R))$, $D(\mathbf{MF}_w(R))$ と書き、$\mathbf{MF}(R)$ 及び $\mathbf{MF}_w(R)$ の**導来圏**と呼ぶ。

定理 3.1 ([6, 7])**.** *マトリックスファクトリゼーションの導来圏において、以下の同型が成立する:*

$C_p\Bigg($  $\Bigg) \cong \left(p'(X) \quad 0 \right) \quad ;$ (3.3)

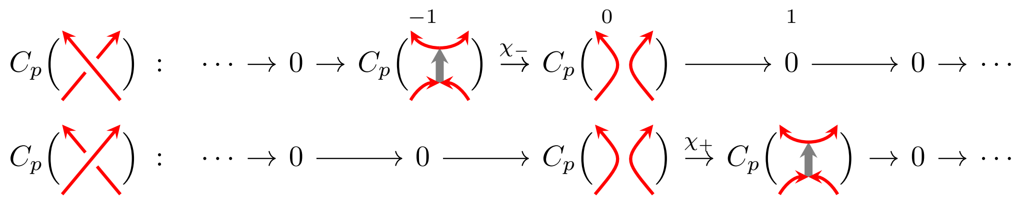
$C_p\Bigg($  $\Bigg) \cong \left(\dfrac{p'(X)-p'(Y)}{X-Y} \quad 0 \right) \otimes C_p\Bigg($  $\Bigg) \quad ;$ (3.4)

$C_p\Bigg($  $\Bigg) \equiv C_p\Bigg($  $\Bigg)^{\oplus 2} \quad ;$ (3.5)

$C_p\Bigg($  $\Bigg) \oplus C_p\Bigg($  $\Bigg) \cong \Bigg($  $\Bigg) \oplus C_p\Bigg($  $\Bigg) \quad .$ (3.6)

今 D を組紐の閉包として表される絡み目図式とする。D の各交点に対して、以下の $D(\mathbf{MF})$ の

鎖複体を対応させ、全体のテンソル積を取ることで $C_p(D)$ を定義する[*1]:



$$. \qquad (3.7)$$

特に $p(X) = X^N$ の時、マトリックスファクトリゼーション (3.2) の各微分及び複体 (3.7) の微分はそれぞれ斉次であることに注意すると、$C_p(D)$ は二重次数付きの複体となることがわかる。そこで、定理 3.1 を用いて村上-大槻-山田の計算を圏化することで以下が得られる。

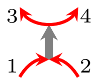
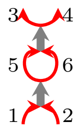
定理 3.2 ([6, 9])**.** *N を 2 以上の整数とし、$p(X) = X^N \in \mathbb{K}[X]$ とおく。この時、組紐の閉包で表される絡み目図式 D について、以下が成立する:*

$$\sum_{i,j} (-1)^j q^i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(C_p^{*,j}(D)) \;=\; P_N(L) \quad .$$

ここで、$P_N(L)$ は D の表す絡み目 L の量子 $\mathfrak{sl}_N$-表現に付随する多項式である。

4 KR 複体の MOY II 関係式の証明

主定理の証明に入る前に、Khovanov-Rozansky [6] による MOY II 関係式 (3.5) の証明を復習する。G と G' を以下の KR グラフとする:

$G :=$  $,\quad \widetilde{G} :=$  $.$ (4.1)

この時、以下の自然な同一視がある:

$$R(G) \cong \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3, X_4] \;, \quad R(\widetilde{G}) \cong R(G)[X_5, X_6] \quad .$$

この同一視のもとで、多項式 $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ に対して、$G, \widetilde{G}$ の KR 複体は以下の Koszul ファクトリゼーションとして表される:

$$C_p(G) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_3) + p(X_4) - u(X_1 + X_2, X_3X_4)}{X_3 + X_4 - X_1 - X_2} & X_3 + X_4 - X_1 - X_2 \\ \dfrac{u(X_1 + X_2, X_3X_4) - p(X_1) - p(X_2)}{X_3X_4 - X_1X_2} & X_3X_4 - X_1X_2 \end{pmatrix}_{R(G)} \quad , \qquad (4.2)$$

[*1] 射 $\chi_\pm$ の詳細については [6, 9] を参照されたい

$$C_p(\widetilde{G}) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_3)+p(X_4)-u(X_5+X_6, X_3X_4)}{X_3+X_4-X_5-X_6} & X_3+X_4-X_5-X_6 \\ \dfrac{u(X_5+X_6, X_3X_4)-p(X_5)-p(X_6)}{X_3X_4-X_5X_6} & X_3X_4-X_5X_6 \\ \dfrac{p(X_5)+p(X_6)-u(X_1+X_2, X_5X_6)}{X_5+X_6-X_1-X_2} & X_5+X_6-X_1-X_2 \\ \dfrac{u(X_1+X_2, X_5X_6)-p(X_1)-p(X_2)}{X_5X_6-X_1X_2} & X_5X_6-X_1X_2 \end{pmatrix}_{R(\widetilde{G})} . \tag{4.3}$$

ここで、行列の添字は Koszul ファクトリゼーションの係数環を表している。MOY II 関係式は、Koszul ファクトリゼーションの以下の変形を用いて得られる。

補題 4.1. R を $\mathbb{K}$ 上の可換代数とし、M を多項式環 $R[X]$ 上の自由加群からなるマトリックスファクトリゼーションとする。多項式 $a(X) \in R[X]$ と $r \in R$ に対して、$R[X]$ 上の *Koszul* ファクトリゼーション $\begin{pmatrix} a(X) & X-r \end{pmatrix}$ の生成元を $v \in (a(X) \ X-r)^{-1}$ と書く。この時、以下は $R[X]$ 上のマトリックスファクトリゼーションの擬同型を定める*:*

$$\begin{pmatrix} a(X) & X-r \end{pmatrix} \otimes M \to \big(R[X]/(X-r)\big) \otimes M \ ; \quad \begin{cases} 1 \otimes \alpha & \mapsto 1 \otimes \alpha \ , \\ v \otimes \alpha & \mapsto 0 \ . \end{cases}$$

特に M が $R[X]$ 上の Koszul ファクトリゼーションである時、マトリックスファクトリゼーション $\big(R[X]/(X-r)\big) \otimes M$ は M の各パラメータの多項式に $X=r$ を代入して得られる R 上の Koszul ファクトリゼーションと自然に同一視できることに注意する。

補題 4.1 と上の考察を用いて MOY II 関係式 (3.5) を証明する。まず、$s^{(1)} \coloneqq X_5+X_6, s^{(2)} \coloneqq X_5X_6 \in R(\widetilde{G})$ とし、$S \coloneqq R(G)[s^{(1)}, s^{(2)}] \subset R(G)[X_5, X_6] = R(\widetilde{G})$ とおく。対称式の基本定理から、S は $s^{(1)}$ と $s^{(2)}$ を変数とする二変数多項式環と同型であり、$R(\widetilde{G})$ は階数 2 の自由 S-加群である。これによって、Koszul ファクトリゼーション (4.3) は以下のように変形できる:

$$C_p(\widetilde{G}) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{p(X_3)+p(X_4)-u(s^{(1)}, X_3X_4)}{X_3+X_4-s^{(1)}} & X_3+X_4-s^{(1)} \\ \dfrac{u(s^{(1)}, X_3X_4)-u(s^{(1)}, s^{(2)})}{X_3X_4-s^{(2)}} & X_3X_4-s^{(2)} \\ \dfrac{u(s^{(1)}, s^{(2)})-u(X_1+X_2, s^{(2)})}{s^{(1)}-X_1-X_2} & s^{(1)}-X_1-X_2 \\ \dfrac{u(X_1+X_2, s^{(2)})-p(X_1)-p(X_2)}{s^{(2)}-X_1X_2} & s^{(2)}-X_1X_2 \end{pmatrix}_S \otimes_S S^{\oplus 2} \quad . \tag{4.4}$$

こうして得られる S 上の Koszul ファクトリゼーション (4.4) に対して、補題 4.1 とその直後の考察を適用することで、求める擬同型 $C_p(\widetilde{G}) \to C_p(G)$ が得られる。特に、$\widetilde{G}$ の図 (4.1) の上下のワイドエッジに対応する Koszul ファクトリゼーション $C_p(\widetilde{G})$ の生成元をそれぞれ $v_1^{上}, v_2^{下}$ 及び $v_1^{下}, v_2^{下}$ とし、同様に $C_p(G)$ の生成元を v_1, v_2 とすると、$R(\widetilde{G}) \cong S \oplus S$ の分解の具体形から、この擬同型は R 上のマトリックスファクトリゼーションの射として、以下のように書くことがで

きる:

$$\begin{aligned} q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{上} &\longmapsto \begin{bmatrix} \frac{q(X_1,X_2)-q(X_2,X_1)}{X_1-X_2} \\ \frac{X_1 q(X_2,X_1)-X_2 q(X_1,X_2)}{X_1-X_2} \end{bmatrix} \gamma_n v_I \\ q(X_5,X_6)\gamma_n v_I^{下} &\longmapsto 0 \end{aligned} \quad . \tag{4.5}$$

ここで $I \subset \{1,2\}$ であり、v_I^* は v_i^* を $i \in I$ について昇順に外積をとったものである。

5 KR 複体のリゾリューションと主定理の証明

前節では、KR 複体の MOY II 関係式を与える擬同型を具体的に構成したが、実はこの射はホモトピー逆射が存在しない。その主な原因は、補題 4.1 の擬同型が、一般にはホモトピー同値ではないことである。そこで、これを改めてホモトピー同値として構成しなおすために、KR 複体 $C_p(G)$ のリゾリューションを取ることを考える。

このために、可換 $\mathbb{K}$-代数 R と元 $w \in R$ に対して、$\mathbb{K}$-上の dg 代数 $A_w(R)$ を以下のように定める:

$$A_w(R) \coloneqq R[\theta]/(\theta^2)\ , \quad \deg\theta = -1\ , \quad d\theta = w \quad .$$

ポテンシャル $w \in R$ のマトリックスファクトリゼーション M について、鎖複体 $\underline{M} = \{M, d_+\}$ を考える。この時、$\underline{M}$ への $A_w(R)$ の作用を $\theta x \coloneqq d_-(x)$ として定めると、$\underline{M}$ は自然に dg $A_w(R)$-加群となる。dg $A_w(R)$-加群と $A_w(R)$-準同型のなす圏を $\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ と書く。上の対応について、定義から以下が容易にわかる。

命題 5.1. *次数付き R-加群 M に対して、M 上のポテンシャル w のマトリックスファクトリゼーションの構造と dg $A_w(R)$-加群の構造は一対一に対応する。さらに、これによって圏の同型 $\mathbf{MF}_w(R) \cong \mathbf{dgMod}(A_w(R))$ が誘導される。*

マトリックスファクトリゼーションの擬同型は dg $A_w(R)$-加群の擬同型に他ならず、従って $\mathbf{MF}_w(R)$ の導来圏 $D(\mathbf{MF}_w(R))$ は dg 圏 $\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ の通常の意味での導来圏である。そこで、$\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ の言葉で射影的リゾリューションを取ることを考える。今、dg R-代数 $\widetilde{A}_w(R)$ を次のように定義する。まず、次数付き R-代数として、$\widetilde{A}_w(R) \coloneqq A_w(R) \otimes A_w(R) \otimes \Gamma$ とおく。ここで、Γ は各 $n \in \mathbb{N}$ について一つの生成元 $\gamma_n \in \Gamma^{-2n}$ を持つ次数付き可換 R-代数で、以下の関係式を満たすものである:

$$\gamma_0 = 1\ , \quad \gamma_m\gamma_n = \frac{(m+n)!}{m!n!}\gamma_{m+n} \quad .$$

記号の濫用だが、$\widetilde{A}_w(R)$ の元に以下の表記を用いる:

$$\bar{\theta} \coloneqq \theta \otimes 1 \otimes 1\ , \quad \theta \coloneqq 1 \otimes \theta \otimes 1\ , \quad \gamma_n \coloneqq 1 \otimes 1 \otimes \gamma_n \quad .$$

これらを用いて、$\widetilde{A}_w(R)$ の微分を以下のように定める:

$$d(\theta) = d(\bar{\theta}) = w\ , \quad d(\gamma_n) = (\bar{\theta} - \theta)\gamma_{n-1} \quad .$$

ただし、負の整数 n については $\gamma_n = 0$ と約束する。

補題 5.2. 以下で定まる *dg* R-代数の準同型は、全射擬同型である*:*

$$\widetilde{A}_w(R) \to A_w(R) \ , \quad \begin{cases} \theta, \bar{\theta} & \mapsto \theta \ , \\ \gamma_0 = 1 & \mapsto 1 \ , \\ \gamma_n & \mapsto 0 \quad (n \geq 1) \ . \end{cases}$$

$\widetilde{A}_w(R)$ の定義より dg R-代数の自然な埋め込み $A_w(R) \otimes A_w(R) \to \widetilde{A}_w(R)$ があるが、これによって $\widetilde{A}_w(R)$ を $A_w(R)$-$A_w(R)$-両側加群とみなすことで、以下の関手が得られる:

$$\widetilde{P} : \mathbf{dgMod}(A_w(R)) \to \mathbf{dgMod}(A_w(R)) \ ; \quad M \mapsto \widetilde{A}_w(R) \otimes_{A_w(R)} M \quad . \tag{5.1}$$

補題 5.2 より、自然変換 $\widetilde{P}(M) \to M$ が存在する。圏 $\mathbf{dgMod}(A_w(R))$ の射影的モデル構造のホモトピー論 (例えば [1] を見よ) により、以下がわかる。

命題 5.3. M を R 上のポテンシャル $w \in R$ のマトリックスファクトリゼーションで、有界かつ各 M^n は R-射影的であると仮定する。この時以下が成立する。

(1) 補題 *5.2* の擬同型で誘導される射 $\widetilde{P}(M) \to M$ は全射擬同型である。

(2) 任意の全射擬同型 $f : N' \to N \in \mathbf{dgMod}(A_w(R))$ と *dg* $A_w(R)$-準同型 $g : \widetilde{P}(M) \to N$ に対して、以下を可換にする *dg* $A_w(R)$-準同型 $g' : \widetilde{P}(M) \to N'$ が存在する*:*

$$\begin{tikzcd} & N' \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{P}(M) \arrow[ur, "g'"] \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd} \quad .$$

系 5.4. M, N を R 上のポテンシャル w の *Koszul* ファクトリゼーションとする。この時、任意の擬同型 $f : M \to N$ に対して、射 $\widetilde{P}(f) : \widetilde{P}(M) \to \widetilde{P}(N)$ はホモトピー同値である*;* つまり $\widetilde{P}(f)$ はホモトピー逆射を持つ。

今、KR グラフ G と多項式 $p(X) \in \mathbb{K}[X]$ に対して、$\widetilde{C}_p(G) \coloneqq \widetilde{P}(C_p(G))$ とおく。命題 5.3 より $\widetilde{C}_p(G)$ は導来圏において $C_p(G)$ と同型であり、さらに系 5.4 より、各 MOY 関係式は抽象的には $\widetilde{P}(C_p(G))$ 上のホモトピー同値として実現できることが従う。

より具体的な記述のために、関手 $\widetilde{P}$ に関して補題 4.1 の以下の精密化を用いる。

命題 5.5. R を可換 $\mathbb{K}$-代数とし、$a(X) \in R[X]$*,* $b \in R$*,* $\vec{c}(X), \vec{d}(X) \in R[X]^{\times n}$ について以下が成立すると仮定する*:*

$$w \coloneqq a(X)(X - b) + \vec{c}(X) \cdot \vec{d}(X) \in R \quad .$$

この時、以下のマトリックスファクトリゼーションのホモトピー同値がある*:*

$$\widetilde{P}(\rho) : \widetilde{P} \begin{pmatrix} a(X) & X - b \\ \vec{c}(X) & \vec{d}(X) \end{pmatrix} \leftrightarrows \widetilde{P} \begin{pmatrix} \vec{c}(b) & \vec{d}(b) \end{pmatrix} : \widetilde{\iota}$$

ここで、ρ は補題 *4.1* で定義される擬同型であり、$\widetilde{\iota}$ は次式で定義される*:*

$$\widetilde{\iota}(\gamma_n v_I) = \gamma_n\big(v_I - \sum_{i\in I}\mathrm{sgn}(i, I\setminus i)\frac{d_i(X)-d_i(b)}{X-b}v_0 v_{I\setminus i}\big) - \gamma_{n-1}\big(\sum_i \frac{c_i(X)-c_i(b)}{X-b}v_0 v_i v_I\big) \quad .$$

ただし、$I=\{i_1<\cdots<i_k\}\subset\{1,\ldots,n\}$ について $v_I = v_{i_1}\ldots v_{i_k}$ である。

さて、第 4 節での MOY II 関係式の証明と同様の証明を $C_p(G)$ ではなく $\widetilde{C}_p(G)$ について行うことを考える。この際、補題 4.1 を適用した箇所において、かわりに命題 5.5 を用いることによって、マトリックスファクトリゼーションの間の具体的な射とそのホモトピー逆射を得られ、実際に計算してみると、主定理の式となることがわかる。以上より、主定理が証明できた。

主定理のように MOY 関係式 に対応するホモトピー同値射を具体的に求めることで、Reidemeister 変形に対応する KR 複体の射が書ける。これによって KR ホモロジーでムービー移動をはじめとした高次の関係式を調べることが可能となり、より精密な理解が進むと期待している。

参考文献

[1] T. Barthel, J. P. May, and E. Riehl. Six model structures for DG-modules over DGAs: model category theory in homological action. *New York Journal of Mathematics*, 20:1077–1159, 2014.

[2] D. Clark, S. Morrison, and K. Walker. Fixing the functoriality of Khovanov homology. *Geometry & Topology*, 13(3):1499–1582, 2009.

[3] N. Ito and J. Yoshida. Crossing change on Khovanov homology and a categorified Vassiliev skein relation. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 29(07):2050051, 2020. arXiv:1911.09308.

[4] N. Ito and J. Yoshida. A cobordism realizing crossing change on $\mathfrak{sl}_2$ tangle homology and a categorified vassiliev skein relation. *Topology and its Applications*, 296:107646, 2021.

[5] M. Jacobsson. An invariant of link cobordisms from Khovanov homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 4:1211–1251, 2004.

[6] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fundamenta Mathematicae*, 199(1):1–91, 2008.

[7] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. II. *Geometry & Topology*, 12(3):1387–1425, 2008.

[8] H. Murakami, T. Ohtsuki, and S. Yamada. Homfly polynomial via an invariant of colored plane graphs. *L'Enseignement Mathématique. Revue Internationale. 2e Série*, 44(3-4):325–360, 1998.

[9] J. A. Rasmussen. Some differentials on Khovanov-Rozansky homology. *Geometry & Topology*, 19(6):3031–3104, 2015.