

Ribbon knots with different symmetric union presentations

吉川修平 (大阪市立大学大学院)*

概要

対称和 (symmetric union) で表された結び目図式における同値関係である対称同値 (symmetric equivalence) の概念と共に, その不変量 refined Jones polynomial が Eisermann と Lamm により導入された. refined Jones polynomial が一致する対称同値でない例を構成した.

1 導入

この章では symmetric union 図式と同値関係 symmetric equivalent を紹介した後に, その不変量となる refined Jones 多項式の定義と性質について紹介する.

定義 1 (symmetric union 図式 [1]). D を向き付けられていない絡み目とし D を平面上の軸に対称的に写したものを D^* とする. D, D^* を対称的に配置し, 対称軸上にある 0-タングル T_i ($i = 0, \dots, k$) を n_i -タングル ($n_0 = \infty, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$) に置き換えた図式を D の **symmetric union 図式** と呼び, $D \cup D^*(n_1, \dots, n_k)$ と表す.

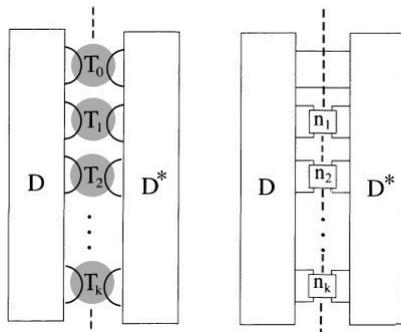


Figure 1: symmetric union 図式

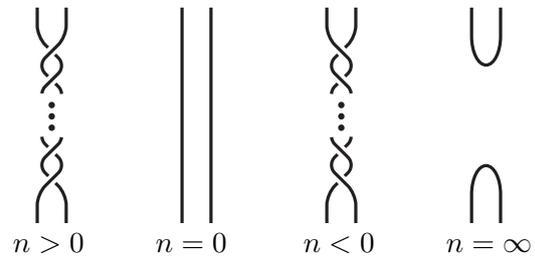


Figure 2: n -タングル

symmetric union 図式における対称軸 ℓ に対して symmetric Reidemeister 移動 [3] を定義する.

- 対称軸上以外での symmetric Reidemeister 移動は Figure 2 に表されている通常の Reidemeister 移動を軸を挟んで左右同時に行う.

*E-mail:m20sa037@vx.osaka-cu.ac.jp

- 対称軸上での symmetric Reidemeister 移動は Figure 3 に表されている通常の Reidemeister 移動 S1-S3, 及び Reidemeister 移動を対称軸に対して拡張した S2(±), S4 の移動を行う。

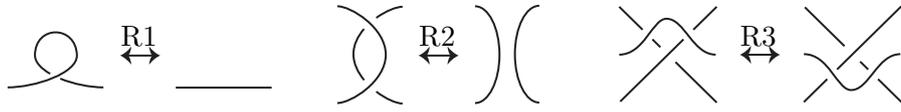


Figure 3: Reidemeister 移動

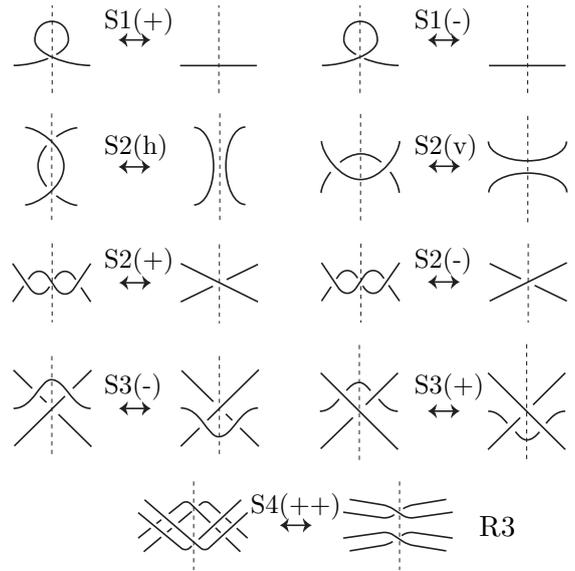


Figure 4: 軸上での symmetric Reidemeister 移動

定義 2 (symmetric equivalence[3]). D, D' を *symmetric union* 図式とする. 有限回の *symmetric Reidemeister* 移動で移りあうとき, D, D' は **symmetrically equivalent** と定義する.

定義 3 (Refined Kauffman bracket 多項式 [4]). 軸 $\{0\} \times \mathbb{R}$ を持つ平面 \mathbb{R}^2 と軸に横断的に交わる絡み目図式 D に対し, 2 変数多項式不変量 *refined Kauffman bracket* $D \rightarrow \mathbb{Z}(A, B)$, $D \mapsto \langle D \rangle$ を次のスケイン関係式で定義する.

- 軸上にない交点のとき

$$\langle \diagdown \diagup \rangle = A^{+1} \langle \diagup \diagdown \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \tag{1}$$

- 軸上の交点のとき

$$\langle \diagdown \diagup \rangle = B^{+1} \langle \diagup \diagdown \rangle + B^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \tag{2}$$

$$\langle \diagup \diagdown \rangle = B^{-1} \langle \diagup \diagdown \rangle + B^{+1} \langle \rangle \langle \rangle \tag{3}$$

- C : 軸との交差を $2m$ 持つ、成分数 n の自明な図式

$$\langle C \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-m} (-B^2 - B^{-2})^{m-1} \quad (4)$$

補題 4. [4] refined Kauffman bracket 多項式 $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}(A, B)$ は $R1$ と $S1$ の移動を除いて symmetric Reidemeister 移動で不変である.

向きづけられた図式 \vec{D} に対し, 軸上以外または軸上での交点の符号和をそれぞれ A -writh $\alpha(D)$, B -writh $\beta(D)$ と定義する.

命題 5 (refined Jones 多項式 [4]). 写像 $W \rightarrow \mathbb{Z}(A, B)$ 次のように定義する.

$$W_D(A, B) := (-A^{-3})^{\alpha(D)} (-B^{-3})^{\beta(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}(A, B)$$

このとき $W_D(A, B)$ は symmetric Reidemeister 移動で不変である. ゆえに $W_D(s, t)$ は symmetrically equivalent での不変量である.

注意 6. $A^2 = t^{-1/2}$, $B^2 = s^{-1/2}$ とし $W_D(s, t)$ または $W(D)$ と表される. 特に $W_D(t, t) = V_D(t) = \text{Jones 多項式}$ となる.

命題 7. [4] n 成分の symmetric union 図式 D が対称軸上に交点を持たないとき次の式が成り立つ.

$$W(D) = \left(\frac{s^{1/2} + s^{-1/2}}{t^{1/2} + t^{-1/2}} \right)^{n-1} V(L) \quad (5)$$

$V(L)$ は D で表される絡み目 L の Jones 多項式とする.

また, D が対称軸上に交点を持つとき次のようなスケイン関係のような漸化式が成り立つ.

$$W(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}) = -s^{+1/2} W(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}) - s^{+1} W(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}) \quad (6)$$

$$W(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}) = -s^{-1/2} W(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}) - s^{-1} W(\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array}) \quad (7)$$

2 主結果

この章では symmetrically equivalent ではないが refined Jones 多項式が一致する例を紹介する.

Figure 5 の図 $L(p, q, r)$ において, Figure 6 で表している通り 9_{27} は 3つの表示を持つ, $L(p, q, r)$ のより詳細な分類を行うために本研究を行った. 以下, 研究で判明したことを記述する.

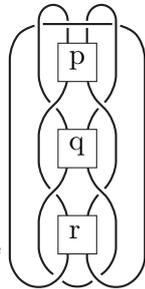


Figure 5: $L(p, q, r)$

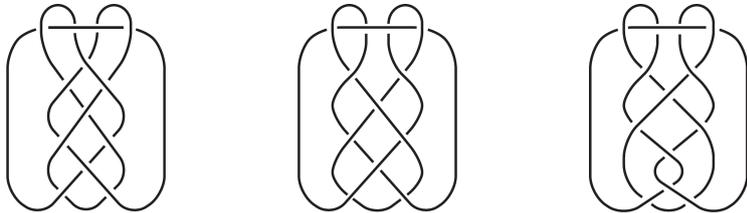


Figure 6: 9_{27}

定理 8. $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次の 2 つの $L(p, q, r)$ ($p, q, r \in \mathbb{Z}$) の系列はそれぞれ同値な結び目の図式である.

$$L(-1, 1, n-1) \cong L(n, 1, -2) \quad (A_n)$$

$$L(0, -1, n+2) \cong L(n, 1, -1) \quad (B_n)$$

証明 Figure 7, Figure 8 を参照. □

定理 9. $(A_n), (B_n)$ はそれぞれ *symmetrically equivalent* ではない. ただし (B_{-1}) を除く.

命題 10. $L(p, q, r)$ ($p, q, r \in \mathbb{Z}$) に対し, *refined Jones* 多項式 W は

$$W(p, q, r) = 1 - (-s^{-1})^{p+r} \cdot f(t) - (-s^{-1})^{p+q+r} \cdot g_1(t) \quad (8)$$

ただし

$$f(t) = t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 4 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$$

$$g_1(t) = t^{-5} - 3t^{-4} + 6t^{-3} - 9t^{-2} + 11t^{-1} - 12 + 11t - 9t^2 + 6t^3 - 3t^4 + t^5$$

とする.

命題により (B_n) の組については, *refined Jones* 多項式が一致しないため *symmetrically equivalent* ではないことがわかる. しかし, (A_n) の組については, *refined Jones* 多項式が一致する.

次に (A_n) の組が実際に *symmetrically equivalent* ではないことを証明するために Collari と Lisca [5] により導入された原理とその原理から導かれる定理について紹介する.

symmetric union 図式 D , 整数 h に対し, 新しい *symmetric union* 図式 $D(h)$ を対称軸上のそれぞれの交点を $|h|$ 個の連続する交点に置き換えることで定める. また, 下図の通り h の符号により交点が決まる.



Figure 9: $D(h)$

新たに定義した *symmetric union* 図式 $D(h)$ において次の命題が成り立つ.

命題 11 (Collari, Lisca [5]). D, D' をそれぞれ *symmetric union* 図式とする. このとき D, D' が *symmetrically equivalent* であるとき, 任意の整数 h に対して $D(h), D'(h)$ は *symmetrically equivalent* である. 特に $D(h)$ と $D'(h)$ はアイトピーである.

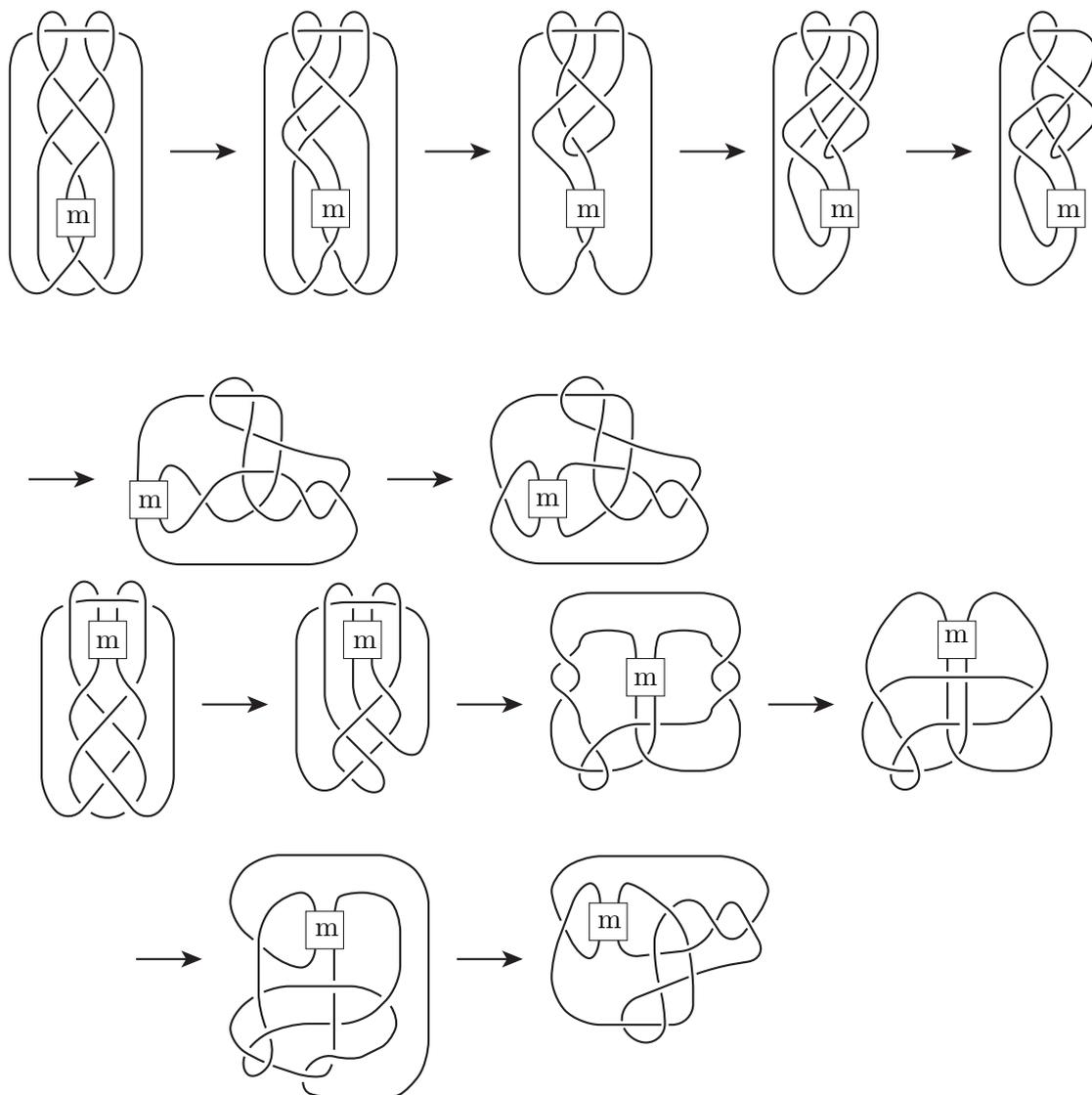


Figure 7: $L(0, -1, m + 2) \cong L(m, 1, -1)$

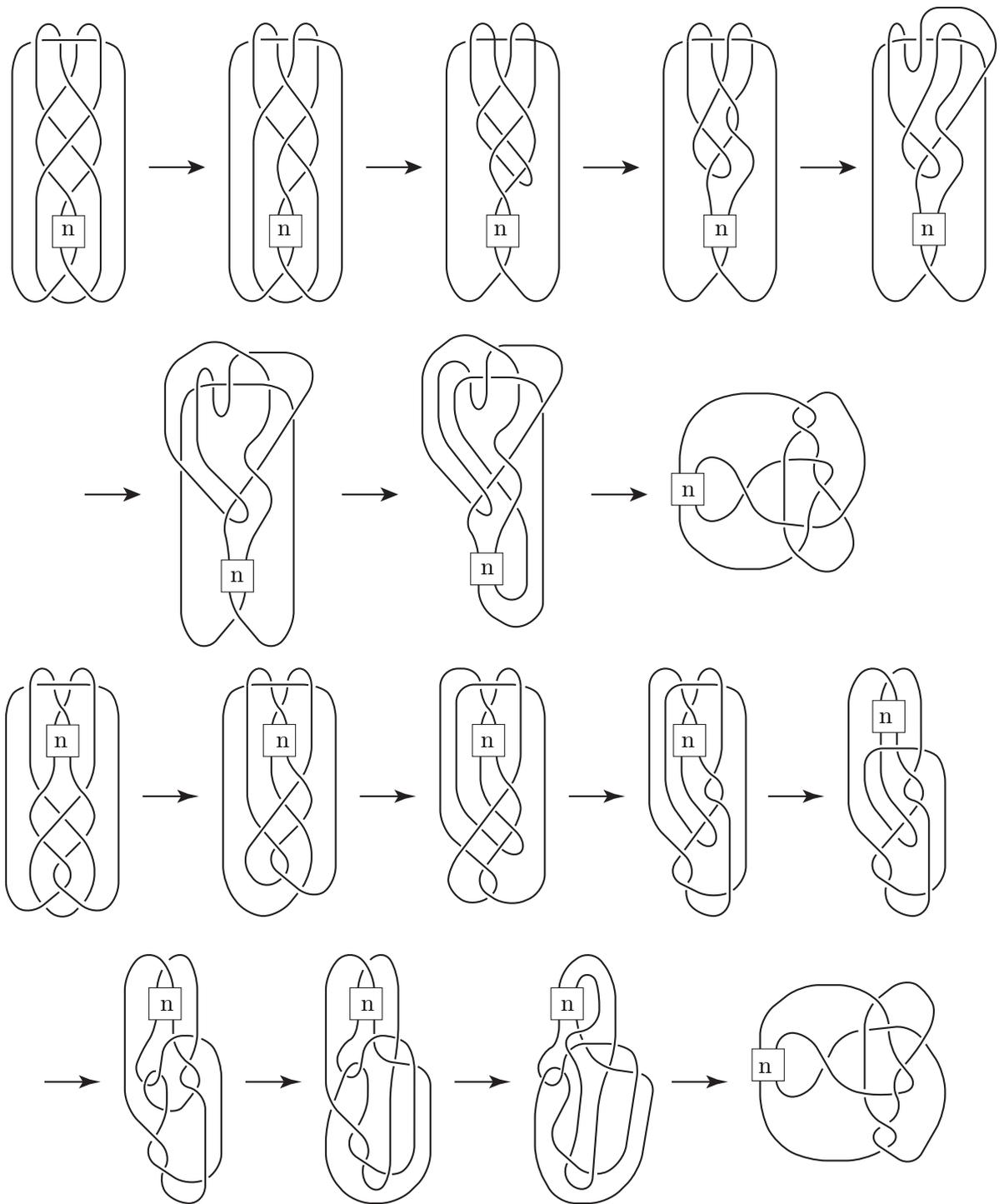


Figure 8: $L(-1, 1, n - 1) \cong L(n, 1, -2)$

定義 12 (Λ 多項式 [6]). 絡み目の図式に対する Λ 多項式を以下のように定義する。

$$\Lambda(\bigcirc) = 1 \quad (9)$$

$$\Lambda(\curvearrowright) = a\Lambda(\frown) \quad (10)$$

$$\Lambda(\curvearrowleft) = a^{-1}\Lambda(\smile) \quad (11)$$

$$\Lambda(\curvearrowright\curvearrowleft) + \Lambda(\curvearrowleft\curvearrowright) = x(\Lambda(\bigcirc) \bigcirc) + \Lambda(\curvearrowright\curvearrowleft) \quad (12)$$

定義 13 (Kauffman 多項式 [6]). 絡み目 L に対してカウフマン多項式 $F(L; a, x)$ を、以下で定義する。

$$F(L; a, x) = a^{-wr(L)}\Lambda(L) \quad (13)$$

命題 14. [7] $n \in \mathbb{Z}$, n 個の連続する *half-twist* を持つ絡み目を $D(n)$ とする. このとき,

$$\Lambda(D(n)) = \sigma_n\Lambda(D(1)) - \sigma_{n-1}\Lambda(D(\bigcirc) \bigcirc) + \tau_n\Lambda(D(\curvearrowright\curvearrowleft)) \quad (14)$$

ただし, $\sigma_{n-1} + \sigma_{n+1} = x\sigma_n$, $\tau_{n-1} + \tau_{n+1} = x\tau_n + a^{-n}x$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_0 = \tau_0 = \tau_1 = 0$ を満たす.

補題 15. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $L(-2, 2, 2n-2)$ と $L(2n, 2, -4)$ は Kauffman 多項式が異なる. ゆえにアイソトピーではない.

証明 $L(p-2, 2, q-4) = L'(p, q)$ と置くと

$L(-2, 2, 2n-2) = L'(0, 2n)$, $L(2n, 2, -4) = L'(2n, 0)$ と表せる.

補題を用いることにより,

$$\Lambda(L'(0, 2n)) - \Lambda(L'(2n, 0)) = \sigma_{2n}(\Lambda(L'(0, 1)) - \Lambda(L'(1, 0)))$$

さらに

$$\Lambda(L'(0, 1)) - \Lambda(L'(1, 0)) = x^{-1}(\Lambda(L'(0, 2)) - \Lambda(L'(2, 0)))$$

となり, プログラム [9] で計算した結果 $\Lambda(L'(0, 2)) \neq \Lambda(L'(2, 0))$ である. よって $\Lambda(L'(0, 2n)) \neq \Lambda(L'(2n, 0))$ 定義より $F(L'(0, 2n)) = a^{2n-2}\Lambda(L'(0, 2n))$, $F(L'(2n, 0)) = a^{2n-2}\Lambda(L'(2n, 0))$ であるので

$$F(L'(0, 2n)) \neq F(L'(2n, 0))$$

$$\begin{aligned} F(L(-2, 2, -2)) &= F(L'(2, 0)) = a^2\Lambda(L'(0, 2)) \\ &= (3a^{-6} + 6a^{-4} + 4a^{-2} + 3 + a^2) + x(-7a^{-7} - 10a^{-5} - a^{-3} + 3a^{-1} - a^3) \\ &\quad + x^2(-16a^{-6} - 30a^{-4} - 21a^{-2} - 10 - 3a^2) + x^3(32a^{-7} + 43a^{-5} - 7a^{-3} - 19a^{-1} + a^3) \\ &\quad + x^4(48a^{-6} + 63a^{-4} + 28a^{-2} + 16 + 3a^2) + x^5(-52a^{-7} - 59a^{-5} + 32a^{-3} + 40a^{-1} + a) \\ &\quad + x^6(-68a^{-6} - 63a^{-4} - 4a^{-2} - 9) + x^7(35a^{-7} + 28a^{-5} - 40a^{-3} - 32a^{-1} + a) \\ &\quad + x^8(42a^{-6} + 25a^{-4} - 14a^{-2} + 3) + x^9(-10a^{-7} - 4a^{-5} + 17a^{-3} + 11a^{-1}) \\ &\quad + x^{10}(-11a^{-6} - 3a^{-4} + 8a^{-2}) + x^{11}(a^{-7} - 2a^{-3} - a^{-1}) + x^{12}(a^{-6} - a^{-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(L(0, 2, -4)) &= F(L'(2, 0)) = a^2 \Lambda(L'(2, 0)) \\
&= (3a^{-6} + 6a^{-4} + 4a^{-2} + 3 + a^2) + x(-8a^{-7} - 13a^{-5} - 3a^{-3} + 5a^{-1} + 3a) \\
&+ x^2(-17a^{-6} - 32a^{-4} - 21a^{-2} - 8 - 2a^2) + x^3(33a^{-7} + 55a^{-5} + 4a^{-3} - 30a^{-1} - 12a) \\
&+ x^4(49a^{-6} + 74a^{-4} + 28a^{-2} + 5 + 2a^2) + x^5(-52a^{-7} - 74a^{-5} + 17a^{-3} + 55a^{-1} + 16a) \\
&+ x^6(-68a^{-6} - 78a^{-4} - 4a^{-2} + 6) + x^7(35a^{-7} + 35a^{-5} - 33a^{-3} - 39a^{-1} - 6a) \\
&+ x^8(42a^{-6} + 32a^{-4} - 14a^{-2} - 4) + x^9(-10a^{-7} - 5a^{-5} + 16a^{-3} + 12a^{-1} + a) \\
&+ x^{10}(-11a^{-6} - 4a^{-4} + 8a^{-2} + 1) + x^{11}(a^{-7} - 2a^{-3} - a^{-1}) + x^{12}(a^{-6} - a^{-2})
\end{aligned}$$

□

定理 16. (A_n) の組である $L(-1, 1, n-1)$ と $L(n, 1, -2)$ は *symmetric equivalent* ではない.

証明 D を $L(-1, 1, n-1)$, D' を $L(n, 1, -2)$, $h = 2$ として $D(h)$ と $D'(h)$ を比較する.

この時 $D(2) = L(-2, 2, 2n-2)$, $D'(2) = L(2n, 2, -4)$ となる.

補題より $L(-2, 2, 2n-2)$ と $L(2n, 2, -4)$ はアイソトピーでない.

命題より $L(-1, 1, n-1)$ と $L(n, 1, -2)$ は *symmetrically equivalent* ではない. □

引用文献

- [1] Christoph Lamm, Symmetric unions and ribbon knots. *Osaka J. Math.*, 37 (2000), no. 3, 537–550. MR 1789436
- [2] Christoph Lamm, The search for nonsymmetric ribbon knots. *Exp. Math.*, 30 (2021), no. 3, 349–363. MR 4309311
- [3] Michael Eisermann and Christoph Lamm, Equivalence of symmetric union diagrams. *J. Knot Theory Ramifications*, 16(2007),no.7,879–898. MR 2354266
- [4] Michael Eisermann and Christoph Lamm, A refined Jones polynomial for symmetric unions. *Osaka J. Math.*,48 (2011), no. 2, 333–370. MR 2831977
- [5] Carlo Collari and Paolo Lisca, On symmetric equivalence of symmetric union diagrams. 2019
- [6] Louis H. Kauffman, An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318 (1990), no. 2, 417–471. MR 958895
- [7] Taizo Kanenobu, Examples on polynomial invariants of knots and links.II. *Osaka J. Math.*, 26 (1989),no. 3, 465–482. MR 1021426
- [8] Charles Livingston and Allison H. Moore, Knotinfo: Table of knot invariants. URL: knotinfo.math.indiana.edu.
- [9] Kouji Kodama, URL: <http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/kodama/knot.html>.