

8 交点以下の非ファイバー結び目の Heegaard 分解と Milnor ペアリング

2021 年 12 月 23 日

結び目の数理 IV

大倉 拓実
東京工業大学理学院修士課程

概 要

結び目の基本群における Lin の表示 (又は Heegaard 分解) に関し, 多くの例を与えたい. 本研究ではひねり付きプレッツェル結び目という結び目の族を導入し, その族に対して Lin の表示を計算するアルゴリズムを与えた. これにより 8 交点以下の非ファイバー結び目の Lin の表示をすべて計算できる. 応用として, 8 交点以下の非ファイバー結び目の Milnor ペアリングも全て計算できる. これについても紹介する.

1 スパインの誘導する双対語による Lin 表示の構成

はじめに本稿における基本事項を確認したい. ここでは主にスパイン, 双対語, Heegaard 分解などの概念について説明する. 尚, 各種定義は参考文献 [KGM] によった.

1.1 平面的な結び目

K を (S^3 上の) 向きづけられた結び目, D をその正則表示とする. 正則表示 D に対し, 平面性という概念を導入する:

定義 1.1. 正則表示 D が平面的であるとは, D を平滑化した際にどの Seifert 円周の内側にも他の Seifert 円周が存在しないことをいう.

1.2 スパイン

K の Seifert 曲面を F , その F の種数を g とおく.

定義 1.2. いくつかのサークルを一つの基点 $*$ で同一視したものをブーケと呼ぶ. F に埋め込まれたブーケで F に変位レトラクトなものを, F のスパインといい, 特に次の条件を満たすとき, 正則なスパインという:

(条件) F から得られる S^3 への埋め込みが標準的な埋め込みである.

注意 1.3. Seifert アルゴリズムにより得られる Seifert 曲面であれば, 正則なスパインの存在は必ず担保される.

以下, F は正則なスパイン $W = \bigvee_{i=1}^{2g} e_i$ をもち, 各サークル $e_1, e_2, \dots, e_{2g}$ は向きづけられているものとする. F のカラー近傍 $F \times [-1, 1]$ に対し, $W^\pm := W \times \{\pm 1\}$, $e_i^\pm := e_i \times \{\pm 1\}$ とする. 境界 $\partial(F \times [-1, 1])$ 上には, W^+ の基点 $*^+$ と W^- の基点 $*^-$ とを結ぶアークで, その内点が $W^\pm$ と交わらないものが存在する. これを γ とおく.

1.3 双対語と Heegaard 分解

$N(F)$ を F の管状開近傍とすると, $S^3 \setminus N(F)$ は種数 $2g$ のハンドル体であり, $\pi_1(S^3 \setminus N(F))$ は階数 $2g$ の自由群である. γ を一点に縮めた $\partial(F \times [-1, 1])$ 上の点を基点として, $\pi_1(S^3 \setminus N(F))$ の生成元 (を表す向きづけられたループ) として $x_1, \dots, x_{2g}$ をとる.

このとき, 各 e_i^+, e_i^- を $x_1, \dots, x_{2g}$ を用いて表した語をそれぞれ y_i, z_i と定義する. ループ e_i の張る円盤を D_i として, これら円盤に適当に表裏を定めておく. ループ x_i とは, $2g$ 個の円盤のうち D_i とのみ一度だけ (横断的に) 交わるループであると特徴づけて良い¹. 双対語 y_1 とは, $*$ を始点に e_1^+ を辿り, D_j を通過する毎に $x_j^\pm$ で記録し, e_1^+ を一巡した時点で, 記録された $x_j^\pm$ らを左から順に並べて得られる語のことである. $x_j^\pm$ の指数は, e_1^+ が D_j の裏から表へ通過すれば+, 表から裏へ通過すれば- と定める. 一般に双対語 y_i, z_i は, 同様に曲面上のループの経路を観察することで構成できる. これら y_i, z_i らを **スパイン W の誘導する双対語** と呼ぶ.

K' を, K に平行で $K' \cap W = \emptyset$ を満たす F 内のサークルとする. $\mathbf{m} := \gamma \cap (\{*\} \times [-1, 1])$ はループで, $\gamma \cap (\bigcup_{i=1}^{2g} D_i) = \emptyset$ より, これは K' のメリディアンと考えて良い. そこで h を $\mathbf{m}$ の表す $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の生成元とすると, van Kampen の定理を用いて以下の結果を得ることができる:

補題 1.4 ([Lin, Tro] による. [KGM, Lemma 1.3.1] 等参照). 次の群同型が存在する:

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_{2g}, h \mid r_i := hy_ih^{-1}z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 2g) \rangle.$$

このような群表示を, 結び目群の **Heegaard 分解** ないし **Lin の表示** と呼ぶ. サイト [KI] にはファイバー結び目の双対語のリストがあり, いくつかの非ファイバー結び目の双対語は参考文献 [GS] で与えられている. また参考文献 [Oha] では, 3 タングルプレッツェル結び目がファイバー結び目であることの必要十分条件を与えている.

2 ひねり付きプレッツェル結び目の導入と双対語の計算

2.1 ひねり付きプレッツェル結び目の定義

本稿では, プレッツェル結び目を一般化した**ひねり付きプレッツェル結び目**というものを考える.

一般に結び目の図式が以下の図 1 左のようにひねられた部分をもつとき, これを整数 a を用いて図 1 右のように略記することにする. ここで $|a|$ はひねりの交点の個数, a の正負はひねりの交点の正負を表す.

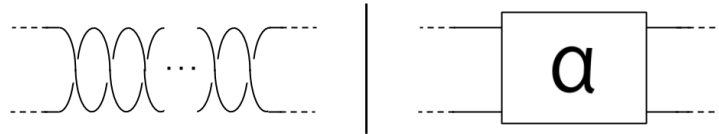


図 1: 図式の略記. 左は正の交点からなるひねりである.

このとき, 正の整数 $n, a_i \in \mathbb{Z} (1 \leq i \leq n)$ に対して, $(n \text{ タングル})$ プレッツェル絡み目 $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ とは下図 2 の左側ような図式で表される絡み目のことを云う:

図 2 の左側において, 図式の左側, 右側の部分にさらにひねりを加えることを考える:

図 2 のような図式 D を, 本稿ではその図式を指定する各整数 a_i, b_i, c_i を用いて

$$D = (a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n).$$

¹ $i \neq j$ のとき, $D_i \cap D_j = \{*\}$, $D_i \cap \gamma = \emptyset$ が成立することに注意する.

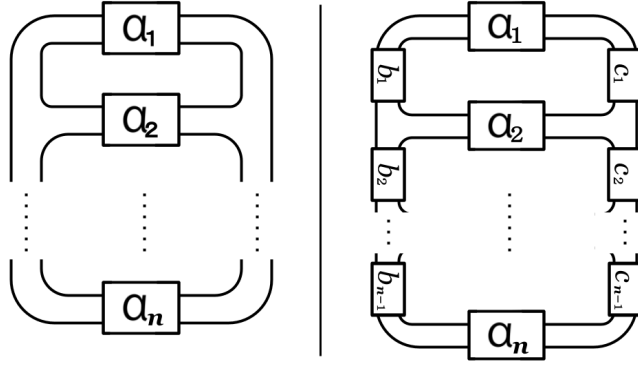


図 2: プレッツェル結び目とひねり付きプレッツェル結び目.

のように表記する.

定義 2.1. 図式 $D = (a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n)$ が表す絡み目の成分数が 1 のとき, これを**ひねり付きプレッツェル結び目**と呼び, $P(D)$ もしくは $P(a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n)$ と表記する.

注意 2.2. 任意の i で $b_i = c_i = 0$ となる場合,

$$P(a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n) = P(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

が成り立つため, 通常のプレッツェル結び目は確かにひねり付きプレッツェル結び目の特別な場合である.

注意 2.3. Reidemeister 移動により,

$$P(a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n) = P((a_1 + b_1 + c_1)_{(0,0)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} (b_{n-1} + c_{n-1} + a_n))$$

が常に成立することが容易にわかる. これを受けて $b_1, c_1, b_{n-1}, c_{n-1}$ をすべて 0 と仮定することも可能だが, 本稿では一貫して $P(a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n)$ という表記をとることにする.

2.2 ひねり付きプレッツェル結び目の双対語

定義 2.4. $\mathbb{Q}$ 上のベクトル $V_i := \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) に対し, $\bigcirc_{i=1}^n V_i := V_1 \circ V_2 \circ \cdots \circ V_n := \begin{pmatrix} u_1 u_2 \cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots v_n \end{pmatrix}$ を定める.

定理 2.5. 図式 $D = (a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n)$ が平面的であると仮定する. $\mathbb{Z}[G]$ を $x_1, \dots, x_{2g}$ により生成される自由群の群環とし,

$$d_m := \sum_{j=0}^m c_j, \quad c_0 := 0, \quad x_0 := 1, \quad c_n := 1, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

このとき, 結び目 $P(D)$ には (ある Seifert 曲面の) 正則スパイン W が存在し, 円板の表裏と各ループの向きを適切に設定することで, W の誘導する双対語を成分とするベクトル $\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ が次の $\mathbb{Z}[F]$ 上の行列の演算

に一致するようにできる:

$$\begin{aligned} & \left(\bigcirc_{j=0}^{i-1} \left(J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \circ \left(J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \circ \left(\bigcirc_{k=0}^{i-1} \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_{i-k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{i-k}^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_{i-k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right). \end{aligned}$$

定理 2.5 の証明. 省略 (詳細は [Ohk] に掲載した)

3 8 交点以下の非ファイバー結び目の双対語の計算

下図 3 は, 交点数 8 以下の全ての非ファイバー結び目について, Reidemeister 移動により平面的な図式を得て, Seifert アルゴリズムを施し, 各 Seifert 曲面の表と裏をそれぞれ赤色, 青色で塗り分けたものである:

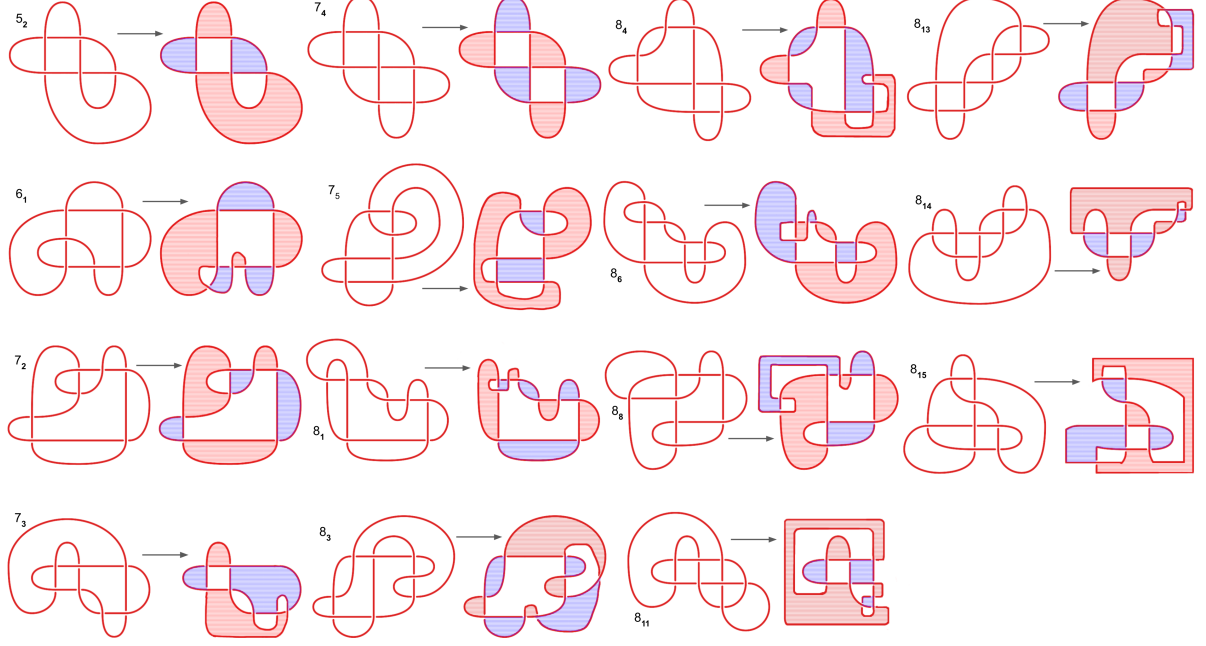


図 3: 8 交点以下の非ファイバー結び目.(図式はサイト [KI] によった)

図 3 の各曲面から, 8 交点以下の非ファイバー結び目はすべて, 平面的な図式によってひねりつきプレッツェル結び目としてみなせることが分かる. 各結び目を定義 2.1 の方法で表記したものを以下にまとめる:

$$\begin{aligned}
 5_2 &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1), \\
 6_1 &= P(-5_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1), \\
 7_2 &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 5), \\
 7_3 &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1), \\
 7_4 &= P(-3_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 3), \\
 7_5 &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-1,-1)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1), \\
 8_1 &= P(1_{(0,0)} 1_{(0,0)} - 7), \\
 8_3 &= P(1_{(0,0)} 3_{(0,0)} - 5), \\
 8_4 &= P(-5_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1_{(0,0)} 1), \\
 8_6 &= P(1_{(0,0)} 1_{(-1,-3)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1), \\
 8_8 &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,4)} 1_{(0,0)} 1), \\
 8_{11} &= P(-1_{(0,0)} - 3_{(0,0)} - 1_{(0,-2)} 1_{(0,0)} 1), \\
 8_{13} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(0,0)} - 1_{(0,2)} 1_{(0,0)} 3), \\
 8_{14} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-2,0)} - 1_{(-2,0)} 1_{(0,0)} 1), \\
 8_{15} &= P(-1_{(0,0)} - 1_{(-1,0)} - 2_{(-1,0)} - 1_{(0,0)} - 1).
 \end{aligned}$$

各ひねり付きプレツェル結び目を表す整数を定理 2.5 の式に代入することで, 8 交点以下の非ファイバー結び目の双対語をすべて計算できる. *Mathematica* による計算結果を以下にまとめる. なお, 使用したコードは [Ohk] に掲載した:

	y_1	z_1	y_2	z_2	y_3	z_3	y_4	z_4
5 ₂	$x_1^2 x_2^{-1}$	x_1^2	x_2	$x_1^{-1} x_2$	-	-	-	-
6 ₁	x_1^2	$x_1^2 x_2$	$x_1 x_2^{-1}$	x_2^{-1}	-	-	-	-
7 ₂	$x_1 x_2^{-1}$	x_1	x_2^3	$x_1^{-1} x_2^3$	-	-	-	-
7 ₃	$x_1^2 x_2^{-1}$	x_1^2	$x_2 x_3^{-1}$	$x_1^{-1} x_2$	$x_3 x_4^{-1}$	$x_2^{-1} x_3$	x_4	$x_3^{-1} x_4$
7 ₄	$x_1^2 x_2^{-1}$	x_1^2	x_2^2	$x_1^{-1} x_2^2$	-	-	-	-
7 ₅	$x_1 x_2^{-1}$	x_1	x_2^2	$x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_2$	$x_2^{-1} x_3$	$x_2^{-1} x_3 x_4^{-1} x_2$	$x_3^{-1} x_4$	$x_2^{-1} x_4 x_2$
8 ₁	x_1^{-1}	$x_1^{-1} x_2$	$x_1 x_2^3$	x_2^3	-	-	-	-
8 ₃	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-1}$	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2$	$x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^2$	$x_2^{-1} x_1 x_2^2$	-	-	-	-
8 ₄	x_1^2	$x_1^2 x_2$	$x_1 x_2^{-1}$	$x_2^{-1} x_3$	$x_2 x_3^{-1}$	$x_3^{-1} x_4$	$x_3 x_4^{-1}$	x_4^{-1}
8 ₆	x_1^{-1}	$x_1^{-1} x_2$	$x_1 x_2^2$	$x_3^{-1} x_2^2$	$x_2^{-2} x_3 x_2$	$x_2^{-2} x_3 x_4^{-1} x_2^2$	$x_2^{-1} x_3^{-1} x_4 x_2$	$x_2^{-2} x_4 x_2^2$
8 ₈	$x_1 x_2^{-1}$	x_1	$x_2 x_3^{-1}$	$x_1^{-1} x_2$	x_3^{-2}	$x_2^{-1} x_4 x_3^{-2}$	$x_3^3 x_4^{-1} x_3^{-2}$	$x_3^2 x_4^{-1} x_3^{-2}$
8 ₁₁	$x_1 x_2^{-1} x_1 x_2^{-1}$	$x_1 x_2^{-1} x_1$	$x_2 x_1^{-1} x_2 x_3^{-1}$	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2$	x_3	$x_2^{-1} x_4 x_3$	$x_4^{-1} x_3$	$x_3^{-1} x_4^{-1} x_3$
8 ₁₃	$x_1 x_2^{-1}$	x_1	$x_2 x_3^{-1}$	$x_1^{-1} x_2$	x_3^{-1}	$x_2^{-1} x_4 x_3^{-1}$	$x_3^2 x_4^{-2} x_3^{-1}$	$x_3 x_4^{-2} x_3^{-1}$
8 ₁₄	$x_1 x_2^{-1}$	x_1	$x_2^2 x_3^{-1}$	$x_1^{-1} x_2^2$	x_3	$x_2^{-1} x_3 x_4$	$x_3 x_4^{-1}$	x_4^{-1}
8 ₁₅	$x_1 x_2^{-1}$	x_1	$x_2^2 x_3^{-1}$	$x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_2$	$x_3 x_2^{-1} x_3 x_4^{-1}$	$x_2^{-1} x_3^2$	x_4	$x_3^{-1} x_4$

4 ひねり付きプレツェル結び目の緯線

$D = (a_{1(b_1, c_1)} a_{2(b_2, c_2)} \cdots a_{n-1(b_{n-1}, c_{n-1})} a_n)$ を平面的な図式とし, K をひねり付きプレツェル結び目 $P(D)$ とする. また, F は D に Seifert アルゴリズムを施して得られる種数 $2g$ の Seifert 曲面とし, 定理 2.5 の証明と同様に, F のスパインを図 4 のようにとるものとする:

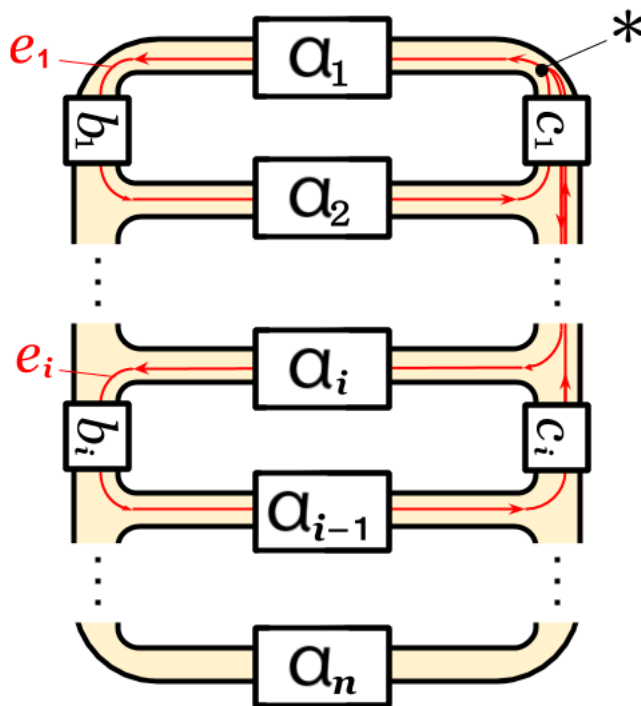


図 4: スパインのとり方

この節では $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の緯線 $\mathbf{l}_K$ を, K の双対語を用いて表記したい. その為には, 緯線を F のスパインを構成するループ $e_1, e_2, \dots, e_{2g}$ によって, $\mathbf{l}_K = e_{i_1}^{\epsilon_1} e_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots e_{i_m}^{\epsilon_m}$ (各 ϵ_{i_j} は 1 か -1) のように表すので十分である.

実際 $e_{i_1}^{\epsilon_1} e_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots e_{i_m}^{\epsilon_m}, y_{i_1}^{\epsilon_1} y_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots y_{i_m}^{\epsilon_m}, z_{i_1}^{\epsilon_1} z_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots z_{i_m}^{\epsilon_m}$ は定義より同じ基本群の元である。

定理 4.1. $K = P(D)$ の緯線について、以下が成り立つ：

(1) 全ての a_i が奇数であり、かつ全ての b_i, c_i が偶数のとき、

$$l_K = e_1 e_3 \cdots e_{2g-1} (e_1 e_2 \cdots e_{2g})^{-1} e_2 e_4 \cdots e_{2g}.$$

(2) 全ての a_i および b_2, c_2 が奇数であり、かつ b_2, c_2 を除く全ての b_i, c_i が偶数のとき、

$$l_K = e_1 (e_2 e_4 \cdots e_{2g})^{-1} e_1^{-1} e_2 e_3 \cdots e_{2g} (e_3 e_5 \cdots e_{2g-1})^{-1}.$$

証明. 省略 (詳細は [Ohk] に掲載した)

例 4.2. 前節の結果を観察することにより、8 交点以下の非ファイバー結び目のうち、定理 4.1 のいずれかの仮定を満たさないものは 8_{15} のみであることがわかる。この結び目については個別に緯線を求めた：

$$l_{8_{15}} = y_1 y_2^{-1} y_1^{-1} y_2 y_3 y_4^{-1} y_3^{-1} y_4.$$

8 交点以下の非ファイバー結び目はすべて、各 i について l に現れる y_i の指数の合計が 0 となることに注意する。

以上の結果から、8 交点以下のすべての非ファイバー結び目を含むひねり付きプレッツェル結び目について、緯線 l_K を双対語で表せるようになった。

5 応用例：巡回被覆空間の Milnor ペアリング

本節では応用として巡回被覆空間の Milnor ペアリングを幾つか計算する。Milnor ペアリングは Blanchfield ペアリングないしザイフェルト行列を用い計算できる公式が知られている ([Lit, Theorem A.1] と [Erle, Satz 4.4] 参照) が、本論文ではカップ積を直接計算する別の新しい方法を提唱する。

本論では簡単の為、 M を連結で向き付き滑らかな閉 3 次元多様体とし、全射準同型 $\alpha : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ を固定する。また $\widetilde{M}$ でそれに付随する巡回被覆空間とする。 $t : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ を被覆変換とする。

5.1 Milnor ペアリングの準備

この時、ミルナーは次の双対定理を示した。

定理 5.1 ([Mil1, §4]). $\mathbb{Q}$ を有理数体とする。 $\widetilde{M}$ の有理ホモロジー $H_*(\widetilde{M}; \mathbb{Q})$ が有限次元とする。この時、 $H^2(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ であり、次のカップ積は非退化である：

$$\smile : H^1(\widetilde{M}; \mathbb{F}) \times H^1(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(\widetilde{M}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}.$$

さらに等長性 $t^*x \smile t^*y = x \smile y$ を満たす。

この非退化形式は **Milnor ペアリング** や **ミルナー双対** ともいう。この定理の主張は端的で美しいが、その様な交代型式の計算例は今まで皆無であった。もしその交代型式が行列表示できれば、定量的な情報が得られる。実際、Milnor[Mil2] は等長的な非退化交代型式の同型類を全て分類し、或る不変量で特徴づけている。

そこで、本論では結び目を 0 手術して得られる 3 次元多様体に対して、計算のアルゴリズムを与え、例を挙げる。以下、結び目 $K \subset S^3$ に対して、 M_K を K を 0 手術して得られる 3 次元多様体とする。 $H_*(M_K; \mathbb{Z}) \cong H_*(S^2 \times S^1; \mathbb{Z})$ に注意し、全射 $\pi_1(M_K) \rightarrow \mathbb{Z}$ を一つ固定する。次の補題に注意しておこう：

補題 5.2. $\widetilde{S^3 \setminus K} \rightarrow S^3 \setminus K$ を無限巡回被覆とする。 $H_2(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ の生成元は結び目 K の緯線 l_K で代表される。また $H_1(S^3 \setminus K; \mathbb{Q})$ は $H_1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q})$ に同型である。特に、 $H_1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q})$ は有限次元である。

注意 5.3. Milnor [Mil1] は次の相対版ペアリングも考察し、その非退化性を論じていた：

$$\smile: H^1(\widetilde{S^3 \setminus K}, \partial(\widetilde{S^3 \setminus K}); \mathbb{Q})^{\otimes 2} \longrightarrow H^2(\widetilde{S^3 \setminus K}, \partial(\widetilde{S^3 \setminus K}); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}. \quad (1)$$

また自然な同型射 $H_1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q}) \cong H^1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q}) \cong H^1(\widetilde{M}_K, \partial(\widetilde{M}_K); \mathbb{Q})$ が存在する事に注意すれば、 $M = M_K$ の Milnor ペアリングと、(1) は一致する事が、コホモロジー長完全列の考察から確かめられる。

次に基本群 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の記述を与えよう。補題 1.4 の表示から、 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の緯線 $\mathbf{l}_K$ を用いて、 $\pi_1(M_K)$ の表示は次で得られる。

$$\pi_1(M_K) \cong \langle x_1, x_2, \dots, x_{2g}, h \mid \mathbf{l}_K, \quad r_i := hy_i h^{-1} z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 2g) \rangle.$$

次に $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示を得る為に記号を用意する。 $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $x_i^{(k)}$ を不定元 x_i のコピーとする。 $y_i^{(k)}$ を語 y_i 内にある x_i を $x_i^{(k)}$ に置き換える事で得られる語とする。すると、Reidemeister-Schreier 手法によって、 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の表示は次で得られる。

$$\pi_1(\widetilde{M}_K) \cong \langle x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{2g}^{(k)} \quad (k \in \mathbb{Z}) \mid \mathbf{l}_K^{(k)}, \quad r_i^{(k)} := y_i^{(k)}(z_i^{(k+1)})^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 2g, k \in \mathbb{Z}) \rangle.$$

ここで注意する事に、任意の $\mathbf{l}_K^{(k)}$ は $\mathbf{l}_K^{(0)}$ に等しい事が、関係 $r_i^{(k)}$ から解る。よって $\mathbf{l}_K^{(k)}$ 達は $\mathbf{l}_K^{(0)}$ のみとして良い。以下、 $\mathbf{l}_K^{(0)}$ は $\mathbf{l}_K$ と単に書く。

次に、 $\widetilde{M}_K$ の (2 次以下の) 胞体複体を与える。ここで注意する事に、Gabai 等の結果によって M_K が Eilenberg-MacLane 空間である事に気づこう。特に、その巡回被覆 $\widetilde{M}_K$ もそうである。従って、 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の群複体は、 $\widetilde{M}_K$ のセル複体とみなすことが出来る。であるので、 $\pi_1(\widetilde{M}_K)$ の (自明係数) 群複体 $C_*(\pi_1(\widetilde{M}_K); \mathbb{Q})$ から考察してもよい。そこで $i \leq 2g$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\mathbb{Q}a_i^{(k)}$ と $\mathbb{Q}b_i^{(k)}$ をそれぞれ不定元 $a_i^{(k)}$, $b_i^{(k)}$ を基底とする $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間とする。すると二次までの複体は次で書ける：

$$\mathbb{Q}\mathbf{l}_K \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}b_i^{(k)} \xrightarrow{\partial_2^{\mathbf{l}_K} \oplus \partial_2} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}a_i^{(k)} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

ここで ∂_1 は零写像で、 ∂_2 は $r_i^{(k)}$ のヤコビ行列で書ける事が知られている (例えば [Lin, Tro] を参照)。厳密に書けば、次で定まる線形写像で与えられる。

$$\partial_2: \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}b_i^{(k)} \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}a_i^{(k)}; \quad b_i^{(k)} \longmapsto \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon\left(\frac{\partial y_i^{(k)}}{\partial x_j^{(k)}}\right) a_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{2g} \varepsilon\left(\frac{\partial z_i^{(k+1)}}{\partial x_j^{(k+1)}}\right) a_j^{(k+1)}.$$

また $\partial_2^{\mathbf{l}_K}: \mathbb{Q}\mathbf{l}_K \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}a_i^{(k)}$ を零写像とする。 ∂_2 の $\text{Hom}(\bullet, \mathbb{Q})$ をとったものを ∂_2^* と書くと、次を得る：

$$H^1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q}) \cong \text{Ker}(\partial_2^*). \quad (2)$$

また補題 5.2 から $H^2(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ の生成元は緯線 $\mathbb{Q}\mathbf{l}_K$ で代表される事にも注意しよう。

次に、カップ積を [Tro, §2.4] から復習する。以下、 $C_1 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Q}a_i^{(k)}$ を X_1 と書く。準備として、次の関数を考えよう：

$$\kappa: F \times F \longrightarrow X_1 \otimes X_1; \quad (u, v) \longmapsto \alpha(u) \otimes u\alpha(v),$$

ここで $\alpha(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{2g} \varepsilon(\partial w / \partial x_i^{(k)}) a_i^{(k)}$ とする。すると、簡単に確かめられる事に κ は (正規化された) F の 2-コサイクルである。だが $H^2(F; X_1 \otimes X_1) = 0$ の事もあり、一意的に $\Upsilon: F \rightarrow X_1 \otimes X_1$ で次を満たすように取れる²：

$$\Upsilon(uv) = \Upsilon(u) + \Upsilon(v) + \kappa(u, v), \quad \Upsilon(1) = 0 \quad \Upsilon(x_i^{(k)}) = 0, \quad \forall u, v \in F, i \in I.$$

すると次が知られている：

² この一意性は代数的にすぐ解る。なお Υ は u の語の長さの帰納法で構成される；[Tro, Lemma 2.4] を参照。

命題 5.4 ([Tro, §2.4]). 任意の 1-コサイクル $f: X_1 \rightarrow \mathbb{Q}$ と $f': X_1 \rightarrow \mathbb{Q}$ に対し, カップ積 $f \smile f'$ と 2 サイクル $\mathbf{l}_K$ のペアリングは $(f \otimes f')(\Upsilon(\mathbf{l}_K))$ に等しい. つまり

$$\langle f \star f', \mathbf{l}_K \rangle = (f \otimes f')(\Upsilon(\mathbf{l}_K)) \in \mathbb{Q}.$$

(2) によれば, 1-コサイクルの集合はコホモロジー $H^1(\pi_1(\widetilde{M}_K); \mathbb{Q}) = H^1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q})$ と同一視される. 以上をまとめると次の定理を得る:

定理 5.5. 結び目 $K \subset S^3$ に対して, M_K を K を 0 手術して得られる 3 次元多様体とする.

この時, $H^1(X_1; \mathbb{Q}) = \text{Ker}(\partial_2^*)$ はコホモロジー $H^1(\widetilde{M}_K; \mathbb{Q})$ に同型であり, 双線形写像

$$H^1(X_1; \mathbb{Q}) \times H^1(X_1; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}; \quad (f, f') \mapsto (f \otimes f')(\Upsilon(\mathbf{l}_K))$$

は *Milnor* ペアリングと一致する.

以上より, $\text{Ker}(\partial_2^*)$ と $\Upsilon(\mathbf{l}_K)$ が計算出来れば, *Milnor* ペアリングは計算できることになった.

最後に, 結び目の符号数との関連を述べる. 結び目 K の緯線を $\mathbf{l}_K$ に対し, $\omega(K) := (f \otimes f')(\Upsilon(\mathbf{l}_K)) \in X_1 \otimes X_1$ とおく. u_i ($i = 1, 2, \dots, 2g$) を $t^*(u_i) = u_{i+1}$ ($i \leq 2g-1$) を満たすような F の元として, $\omega(K)$ の $\alpha(u_i) \otimes \alpha(u_j)$ の係数を (i, j) 成分とする $\mathbb{Q}$ 上の $2g \times 2g$ 行列を, 以下 $\Omega(K)$ と表す. *Milnor*[Mil1] は次の定理を示唆した (証明は [Ke2] を参照)

定理 5.6 ([Mil1, Ke2]). 被覆変換が誘導する同型射 $t^*: H^1(M_K; \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(M_K; \mathbb{Q})$ の $(2g \times 2g)$ -行列表示を T と置く.

この時, $\Omega T^T - T \Omega$ の符号数 S が元の結び目の符号数に一致する.

5.2 双対語からの *Milnor* ペアリングの計算

前節の最後に述べた記法を用いて, *Lin* 表示から *Milnor* ペアリングの計算法を与えるアルゴリズムを示す:

定理 5.7. 結び目群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の *Lin* の表示が $\langle x_1, x_2, \dots, x_{2g}, h \mid r_i := hy_i h^{-1} z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, 2g) \rangle$ で与えられ, K の *Alexander* 多項式の次数が $2g$ に一致すると仮定する.

結び目 K の緯線が $\mathbf{l}_K = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ (すべての j について $\epsilon_j = \pm 1, 1 \leq i_j \leq 2g$) で表され, 各 i について $\mathbf{l}_K$ に現れる x_i の指数の合計が 0 となる時, *Milnor* ペアリングは $\Omega(K)$ で与えられ, $\Omega(K)$ は以下の式で計算される:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - \epsilon_k}{2} E_{i_k, i_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k \left(\sum_{m=1}^{2g} \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq k \\ \wedge i_l = m}} \epsilon_l E_{i_k, m} \right) \right).$$

ただし $E_{i,j}$ は (i, j) 成分のみ 1, その他の成分はすべて 0 となるような $2g \times 2g$ 行列とする.

定理 5.7 の証明. 省略 (詳細は [Ohk] に掲載した)

5.3 8 交点以下の非ファイバー結び目の *Milnor* ペアリングの計算

各ひねり付きプレッツェル結び目を表す整数から, 定理 2.5 を用いて双対語ひいては緯線を計算し, 定理 5.7 に代入するという手順で, 8 交点以下の非ファイバー結び目の Ω をすべて計算できる. *Mathematica* による計算結果を以下にまとめる. なお, 使用したコードは [Ohk] に掲載した:

K	Ω	$\det\Omega$
5_2	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	4
6_1	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	4
7_2	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	9
7_3	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4
7_4	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	16
7_5	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_1	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	9
8_3	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	16
8_4	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_6	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_8	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{11}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{13}	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{14}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	4
8_{15}	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	9

参考文献

- [Bla] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.
- [Erle] Erle, Dieter. *Die quadratische Form eines Knotens und ein Satz über Knotenmannigfaltigkeiten*. (German) J. Reine Angew. Math. 236 (1969), 174–218. MR0248856

- [Fox] R. H. Fox, *Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring*, Ann. of Math. **57** (1953), no. 2, 547–560
- [GS] H. Goda, T. Sakasai, *Factorization formulas and computations of higher-order Alexander invariants for homologically fibered knots*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **20** (2011), 1355–1380.
- [KGM] 北野晃朗, 合田洋, 森藤孝之 *ねじれ Alexander 不変量*, (2006), 6, 100–102.
- [Ke1] C. Kearton, *Blanchfield duality and simple knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **202** (1975), 141–160.
- [Ke2] C. Kearton, *Signatures of knots and the free differential calculus*, Quart J. Math.
- [KI] *KnotInfo: Table of Knots* (最終閲覧：2020) <https://knotinfo.math.indiana.edu/>
- [Lic] W.B. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1974
- [Lin] X.S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 361–380
- [Lit] R. A. Litherland, *Cobordism of satellite knots. Four-manifold theory* (Durham, N.H., 1982), 327–362, Contemp. Math., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984. MR0780587
- [Mil1] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.
- [Mil2] J. W. Milnor, *On isometries of inner product spaces*, Invent. Math. **8** (1969), 83–97.
- [N1] T. Nosaka, *Twisted Alexander invariants of knot group representations*, to appear Tokyo Journal of Mathematics.
- [N2] T. Nosaka, *Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds*, preprint
- [Oha] 大橋 明行, *ブレッツェル結び目のファイバー性とねじれアレキサンダー不変量について*, (2013), 35–37.
- [Ohk] Takumi Ohkura, *Heegaard presentations and Milnor pairings of some knots*, preprint
- [Tro] H. F. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. **76** (1962), 464–498