Twisted Milnor pairings of Casson-Gordon type and non-slice knots

柳田幸輝

概要

~~これは [Yan21] の概要であり、~~2021 年 12 月 23 日〜26 日に行われた研究集会「結び目の数理 IV」の報告書である。本報告書の Theorem 1.1 の証明において、計算に誤りがございました。そのため、以下の通り訂正させていただきます。

1　導入

S^3 内の結び目 K が（位相的）**slice** であるとは、四次元球体 B^4 内に局所平坦に埋め込まれた円板 D で空間対 (B^4, D) の境界が (S^3, K) に一致しているものが存在することを言う。slice な結び目は algebraically slice となるが、その逆が成り立たないことを Casson-Gordon が示した [CG86]。それと同時に、Casson-Gordon により新しく定義された τ-不変量は、より強いスライス性の障害となることが予想される。しかし、その定義に四次元多様体の交叉形式を含んでいるため、計算は容易ではない。対して、Milnor pairing の捻じれコホモロジーへの一般化である twisted Milnor pairing より、τ-不変量の符号数が計算可能であることを Kirk-Livingston は示唆している [KL99]。しかしながら、詳細な証明や計算例はなかった。

そこで本研究では、twisted Milnor pairing の非退化性に詳細な証明を与えた。さらに、Casson-Gordon τ-不変量に類似した設定で、twisted Milnor pairing がスライス性の障碍となることを示した。twisted Milnor pairing は計算機を用いることで具体的に導出できる。~~その応用として次を示した。~~

~~**Theorem 1.1.** 八の字結び目の *(2,1)-cable* 結び目はスライス結び目ではない。~~

これは河内氏 [Kaw80] によって提起された問題であり、長い間解けていなかった。2022 年に I. Dai 氏と S. Kang 氏、A. Mallick 氏、J. Park 氏、M. Stoffregen 氏らによって、八の字結び目の $(2,1)$-cable 結び目は滑らかなスライス結び目ではない事が証明されている（詳細は [DKM+22] 参照）。ここで結び目 $K \subset S^3$ が**滑らかに** *slice* であるとは、四次元球体 B^4 内に滑らかに埋め込まれた円板 D で空間対 (B^4, D) の境界が (S^3, K) に一致しているものが存在することを言う。

本稿は以下で構成されている。2 節では、twisted Milnor pairing を定義し主定理を述べる。~~3 節で、与えられた結び目に主定理を適用するための計算手法について述べる。~~

2　結び目の twisted Milnor pairing

本節では、結び目より構成される三次元多様体の twisted Milnor pairing の定義を述べる。そして、twisted Milnor pairing がスライス性の障碍であることを見る (Theorem 2.1)。

2.1　記号の準備

twisted Milnor pairing の定義に向けて、結び目より構成される多様体とその上の捩れコホモロジーを定義する。そして、主定理の重要な要素である linking 形式も復習する。

まず、$K \subset S^3$ を向き付けられた結び目とし、素冪 $q \in \mathbb{Z}$ を一つ固定する。X_K は K に沿って 0-手術を施すことによって得られる多様体とする。X_q は X_K の q 次巡回被覆空間、さらに $\tilde{X}_q$ は被覆写像が誘導する準同型 $H_1(X_q;\mathbb{Z}) \to H_1(X_K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ に対応する X_q の無限巡回被覆空間とする。次に $\tilde{X}_q$ 内の曲面 $\tilde{\Sigma}_0$ を次で構成する。K のザイフェルト膜の境界と円板の境界を貼り合わせることによって得られる曲面 Σ_0 は、自然に X_K 内の曲面とみなせる。$\tilde{X}_q$ の構成法より、これは $\tilde{X}_q$ に持ち上がるから、その曲面を $\tilde{\Sigma}_0$ とする。

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}_q & \xrightarrow{\infty\text{-cover}} & X_q & \xrightarrow{q\text{-sheeted cover}} & X_K \\ \cup & & & & \cup \\ \tilde{\Sigma}_0 & & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & & \Sigma_0. \end{array}$$

次に $\tilde{X}_q$ の捩れコホモロジーを以下で構成しよう。$\mathrm{Tor} H_1(X_q;\mathbb{Z})$ を $H_1(X_q;\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-捩れ部分加群としよう。これを定義域にもつ準同型 $\chi : \mathrm{Tor} H_1(X_q;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/d$ を一つ固定する。ここで、d は q とは互いに素な素冪である。ζ_d を 1 の原始 d 乗根とし、$\mathbb{Q}(\zeta_d)$ は ζ_d を添加した円分体として、次の合成写像を考える。

$$\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X_q) \xrightarrow{\alpha} H_1(X_q;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/d \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{Q}(\zeta_d)^\times.$$

ここで $p : \tilde{X}_q \to X_q$ は被覆写像、α はアーベル化写像、ι は $n \mapsto \zeta_d^n$ で定まる準同型である。この $\bar{\chi}$ が誘導する $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ への作用によって、**局所系を係数にもつコホモロジー** $H^*(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}})$ が定まるのであった。これは有限次元 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$-ベクトル空間であることが知られている（[CG86, Lemma 4 and the corollary]、[FP12, Corollary 4.2]）。通常のコホモロジーと同様に、カップ積が以下で定まる。

$$\smile : H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}) \otimes H^1(\tilde{X}_q;\overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}}) \to H^2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}}).$$

ここで有限次元 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$-ベクトル空間 V に対して $\bar{V}$ は、アーベル群として $(V,+)$ と一致し、スカラー積が $a \cdot v := \bar{a}v$ $(a \in \mathbb{Q}(\zeta_d),\, v \in \bar{V})$ で定まる有限次元 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$-ベクトル空間とする。

最後に $\mathrm{Tor} H_1(X_q;\mathbb{Z})$ 上の linking 形式について復習する。M を有理ホモロジー 3 球面とする。このとき、**linking 形式**という $H_1(M;\mathbb{Z})$ 上で定められる非特異双線形写像

$$\mathrm{lk} : H_1(M;\mathbb{Z}) \times H_1(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が定まる事が知られている [Sei35]。B_q を K で分岐する q 重分岐被覆空間とする。このとき、q が素冪であることから、B_q は有理ホモロジー球面となる [Gor72]。すなわち、B_q 上で linking 形式が定められる。一方で、q が素冪より、$\mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z}) \cong H_1(B_q;\mathbb{Z})$ であるから、自然に $\mathrm{Tor}H_1(X_q;\mathbb{Z})$ に linking 形式が誘導されることが分かる。

2.2 Twisted Milnor pairing の定義と主定理

前節の記号の下、**twisted Milnor pairing** は次で構成される。

$$\smile_\psi \colon H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}) \otimes H^1(\tilde{X}_q;\overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}}) \xrightarrow{\smile} H^2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{Q}(\zeta_d)}_{\bar{\chi}})$$
$$\xrightarrow{\psi} H^2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)) \xrightarrow{[\tilde{\Sigma}_0]\frown} H_0(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)) \cong \mathbb{Q}(\zeta_d).$$

ここで、ψ は $\mathbb{C}$ 上の通常のエルミート内積が誘導する射であり、$[\tilde{\Sigma}_0] \in H_2(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d))$ は $\tilde{\Sigma}_0 \subset \tilde{X}_q$ の表すホモロジー類である。この pairing は非退化である [KL99]。~~[Yan21] にてその証明を与えた。~~

この twisted Milnor pairing を、符号数を一般化した Witt 群の元として考える。捩じれカップ積は $\tilde{X}_q \to X_q$ 上の被覆変換 t と同変であった。よって、t-同変エルミート空間 $(H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}), \sqrt{-1}\smile_\psi, t)$ が構成される。この t-同変エルミート空間が表す **$\mathbb{Z}$-同変 Witt 群** $\mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ の元を $\mu(K,\chi) := [(H^1(\tilde{X}_q;\mathbb{Q}(\zeta_d)_{\bar{\chi}}), \sqrt{-1}\smile_\psi, t)] \in \mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ であらわす。$\mathbb{Z}$-同変 Witt 群についての定義や性質は付録 A にて詳しく述べる。

このとき、次が示せた。

Theorem 2.1. スライス結び目 $K \subset S^3$ を任意にとり、$q,d \in \mathbb{Z}$ は互いに素な素冪で、d は奇数とする。このとき、*linking* 形式のメタボライザー $N \subset H_1(B_q;\mathbb{Z})$ であって、$\chi(N) = \{0\}$ をみたす任意の非自明な準同型 $\chi : H_1(B_q;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/d$ にたいして、$\mu(K,\chi) = 0 \in \mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}(\zeta_d))$ となるものが存在する。

また、上で定めた twisted Milnor pairing から Casson-Gordon signature が得られることを Kirk-Livingston が示唆していたが、具体的に与えられていなかった。~~[Yan21] ではそれを明記した。~~

3 計算手法と実際の応用

Theorem 2.1 によれば、linking 形式と捩じれミルナーペアリングが導出できれば、結び目の非スライス性を判定できる可能性がある。ここでは、各々を具体的に計算するうえで有用な手法について紹介する。

3.1 linking 形式とねじれカップ積の計算

まず、linking 形式と $H_1(B_q;\mathbb{Z})$ の行列表示に関しては、[Nos21] が応用可能である。特にこの行列表示に用いている基底は、基本群からのアーベル化写像を容易に記述できる。その

ため、$\bar{\chi}:\pi_1(\tilde{X}_q)\to\mathbb{Q}(\zeta_d)^\times$ を具体的に求めることができる。

さらに、$H_1(B_q;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/d'\oplus\mathbb{Z}/d'$ (d' は素数) である場合に、応用上の利点が二つある。一つが、linking 形式のメタボライザーがすべて求められることである。二つ目に、リンキング形式のメタボライザー N に対して、$\chi(N)=0$ となる非自明な準同型 $\chi:H_1(B_q;\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/d'$ は、ある $x\in N$ によって $\chi=d'\mathrm{lk}(x,\bullet)$ と表すことができる点である。そこで実際の計算では、$H_1(B_q;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/d'\oplus\mathbb{Z}/d'$ となる場合に絞って計算している。

捩じれミルナーペアリングについては、その定義より、捩れカップ積を計算できればよい。結び目より構成される多様体の捩れカップ積は、群コホモロジーを用いた議論によって計算される手法が確立されている [Tro62][Nos21]。すなわち、結び目の外部補空間の Heegaard 分解から結び目の表示を与え、その群コホモロジーを考えることでカップ積を計算できる。

3.2 ~~八の字結び目の (2, 1)-cable 結び目への応用~~

~~この小節では、K を八の字結び目の (2, 1)-cable 結び目とおき、Theorem 1.1 の証明概略を述べる。~~

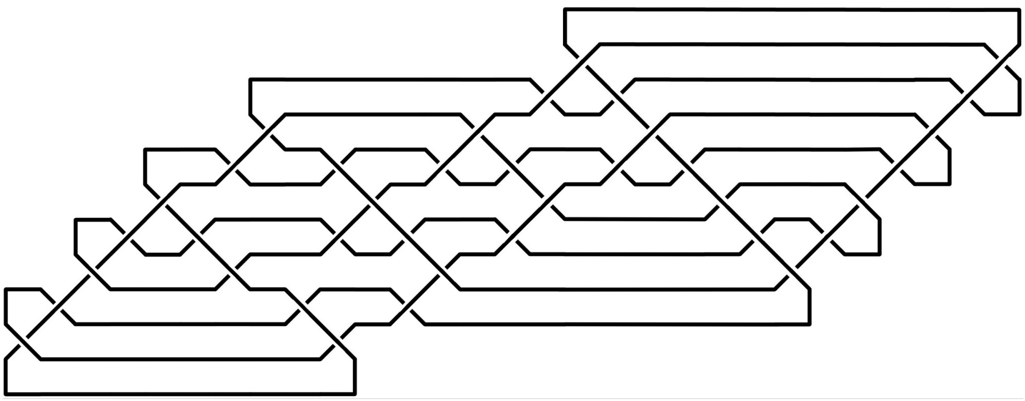

図 1　$K=(4_1)_{(2,1)}$ の結び目図式

~~*Proof of Theorem 1.1.* 結び目の外部補空間の Heegaard 分解から結び目群を与えれば、K で分岐する S^3 の 11 重分岐被覆を B_{11} について、$H_1(B_{11};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/199\oplus\mathbb{Z}/199$ であり、その linking 形式 lk は~~

$$\mathrm{lk}((1,0),(1,0))=\frac{23}{199},\ \mathrm{lk}((1,0),(0,1))=\frac{121}{199},\ \mathrm{lk}((0,1),(0,1))=\frac{23}{199}$$

~~によって表示されることがわかる。特に linking 形式のメタボライザーは $(1,137),(1,138)\in\mathbb{Z}/199\oplus\mathbb{Z}/199$ で生成される二つの部分群 $\langle(1,137)\rangle,\langle(1,138)\rangle$ のどちらかであることがわかる。各メタボライザーで消える準同型 $\chi_1,\chi_2:H_1(B_{11};\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/199$ をそれぞれ $\chi_1(x):=199\mathrm{lk}((20,153),x),\chi_2(x):=199\mathrm{lk}((55,172),x)$ で与える。この二つの指標による捩れ Milnor pairing の符号数を計算機を用い計算すれば、どちらも 2 であることが分かる。よって Theorem 2.1 の対偶よりこの結び目はスライスではない。~~ □

付録 A　エルミート形式のなす $\mathbb{Z}$-同変 Witt 群

この節では $\mathbb{Z}$-同変 Witt 群について述べる。

F を標数が 2 でない体で対合 $\bar{\cdot}^F : F \to F$ を持つとする。さらに F 上の有限次元ベクトル空間を V で表し、$t : V \to V$ は自己同型写像とする。V 上の半双線形形式 $b : V \times V \to F$ が **t-同変エルミート形式**であるとは、任意の $x, y \in V$ に対して $b(x, y) = \overline{b(y, x)}^F$ と $b(tx, ty) = b(x, y)$ がなりたつことを言う。ここでは組 (V, b, t) を **t-同変エルミート空間**とよぶ。また、エルミート空間 (V, b, t) が**非特異**であるとは、b より自然に誘導される写像 $V \to \mathrm{Hom}(V, F)$ が単射であることを意味する。さらに、エルミート空間 (V, b, t) が**メタボリック**であるとは、部分ベクトル空間 $N \subset V$ で、$N = N^\perp$ かつ $tN \subset N$ を満たすものが存在することと定義する。さらに、このような N を**メタボライザー**と呼ぶ。

F 上の t-同変非特異エルミート空間の同型類は、直和によって可換モノイドとなる。この可換モノイドが誘導する **Grothendieck 群**を $\mathrm{Gr}(F)$ とあらわす。$\mathrm{Gr}(F)$ において、メタボリックなエルミート空間全体は部分群をなす。この部分群による $\mathrm{Gr}(F)$ の剰余群を **t-同変 Witt 群**と呼ぼう。ここでは $\mathrm{Witt}^{\mathbb{Z}}(F)$ と表す。

付録 B　今後の課題

河内氏が提起した問題の拡張として次が考えられている [Miy94][KW18]。

Question. 結び目 K は fiber かつ $-$amphicheiral で、そのアレキサンダー多項式が既約とする。このとき、K の $(2n, 1)$-cable 結び目は非スライスか？

~~我々の手法は条件を満たす他の結び目に対しても適用できるかもしれない。~~

参考文献

[CG86] A. Casson and C. Gordon, *Cobordism of classical knots*, À la recherche de la topologie perdue, Progr. Math., vol. 62, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1986, With an appendix by P. M. Gilmer, pp. 181–199.

[DKM+22] I. Dai, S. Kang, A. Mallick, J. Park, and M. Stoffregen, *The* $(2,1)$*-cable of the figure-eight knot is not smoothly slice*, arXiv preprint arXiv:2207.14187 (2022).

[FP12] S. Friedl and M. Powell, *An injectivity theorem for Casson-Gordon type representations relating to the concordance of knots and links*, Bull. Korean Math. Soc. **49** (2012), no. 2, 395–409.

[Gor72] C. Gordon, *Knots whose branched cyclic coverings have periodic homology*, Trans. Amer. Math. Soc. **168** (1972), 357–370.

[Kaw80] A. Kawauchi, *The (2,1)-cable of the figure eight knot is rationally slice*, a handwritten manuscript, 1980.

[KL99] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson-Gordon invariants*, Topology **38** (1999), no. 3, 635–661.

[KW18] M. H. Kim and Z. Wu, *On rational sliceness of Miyazaki's fibered, -amphicheiral knots*, Bull. Lond. Math. Soc. **50** (2018), no. 3, 462–476. MR 3829733

[Mil68] J. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., 1968, pp. 115–133.

[Miy94] K. Miyazaki, *Nonsimple, ribbon fibered knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), no. 1, 1–44.

[Nos21] T. Nosaka, *Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds*, 2021, preprint, arXiv:2107.08851.

[Sch85] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Sei35] H. Seifert, *Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), no. 1, 84–101.

[Tro62] H. Trotter, *Homology of group systems with applications to knot theory*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 464–498.

[Yan21] K. Yanagida, *Twisted milnor pairings of casson-gordon type and non-slice knots*, 2021, preparation.