

曲面の写像類群に含まれる純ブレイド群の最高次数 について

片山 拓弥 (学習院大学)*

1. 導入

本稿は、2021年12月に早稲田大学において開催された研究集会「結び目の数理IV」での著者の講演を纏めた記事である。発表された研究内容は大阪大学の久野恵理香氏との共同研究に基づく。

主結果を述べるために記号を用意する。 $S_{g,p}^b$ を種数 g 、 p 点穴あき、 b 個の境界成分を持つ連結な向き付け可能曲面とする。本稿では向き付け不可能な曲面は一切扱わず、曲面といえば向き付け可能な曲面を指す。また、慣習により、 $b=0$ または $p=0$ のときは $S_{g,p}^b$ から0に等しい添字を削除する。ただし g は0であっても削除しないこととする。例えば2次元球面 $S_{0,0}^0$ は以下 S_0 と表される。 $S_{g,p}^b$ の写像類群 $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$ とは、 $S_{g,p}^b$ の向き付けを保ち境界を固定する同相写像全体が合成によりなす群を、境界を固定するイソトピーで割って得られる群のことである。 $\text{Mod}(S_{0,n}^1)$ を n 次ブレイド群と呼び B_n と記す。同相写像を穴の置換として見ることによりブレイド群 B_n から n 次対称群への自然な全射を得るが、この全射の核を n 次純ブレイド群と呼び PB_n と記す。曲面 $S_{g,p}^b$ のEuler標数を次の等式により定義する：

$$\chi_{g,p}^b := 2 - 2g - p - b.$$

主結果は以下である。

定理 1.1. $PB_n \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p})$ なるための必要十分条件は n が以下の不等式を満たすこと。

$$n \leq \begin{cases} 1 & ((g,p) \in \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3)\}) \\ 2 & ((g,p) \in \{(0,4), (1,0), (1,1)\}) \\ -\chi_{g,p} & (g=0, p \geq 5) \\ 2 - \chi_{g,p} & (g \geq 2, p=0) \\ 1 - \chi_{g,p} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

定理 1.2. $b \geq 1$ とする。このとき $PB_n \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^b)$ なるための必要十分条件は n が以下の不等式を満たすこと。

$$n \leq \begin{cases} 2 - \chi_{g,p}^b & (g \geq 1, p+b \leq 2) \\ 1 - \chi_{g,p}^b & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

では先行研究について簡単に紹介しよう。写像類群の間の既知の単射準同型として、Aramayona–Leininger–Souto [1], Birman–Hilden [3], Ivanov–McCarthy [8] などに見ら

キーワード：曲面の写像類群, 埋め込み, 純ブレイド群, 直角アルティン群

* 〒170-0031 東京都豊島区目白1-5-1 学習院大学理学部

e-mail: katayama@math.gakushuin.ac.jp

れるような曲面の分岐または不分岐被覆から誘導される単射準同型と, Paris–Rolfsen [13]に見られるような曲面の包含写像から誘導される単射準同型がある. 単射準同型の非存在性に関する大きな成果は Birman–Lubotzky–McCarthy [4], Harer [7], [8] などに見られる. 特に [4] と [7] からは, 少数の例外を除き写像類群の同型類は曲面の同相類によって決まるという結果が得られ, [8] は写像類群の自己単射準同型は同型である (co-Hopf 性) という結果を直接述べている. Aramayona–Souto [2] は曲面の被覆と (純) 写像類群の間の単射準同型の存在性について調べた論文と思うことができ, 特殊な仮定のもとではあるが被覆の関係にない場合に単射準同型の非存在を示している. そして, Castel [5] はブレイド群から写像類群への単射準同型を特徴づけており, 任意の単射準同型は特殊な分岐被覆から誘導される単射準同型の “transvection” であるという成果を得ている. 本研究では純ブレイド群というブレイド群の有限指数部分群に注目して単射準同型を考察しているが, その根源は上記の研究に既に見られるものである. 例えば, [4] と [7] は初めから有限指数部分群の間で保たれる不変量を計算しており, co-Hopf 性についても Shakeleton [14] が写像類群の有限指数部分群に一般化している. ただし, 定理 1.1 と定理 1.2 のように, ソースの写像類群をある程度固定してターゲットの写像類群を勝手にとる, というタイプの結果は [5] のみであり, 手法も結果もかなり異なったものとなっている. 実際, 定理 1.2 の中にはブレイド群全体には拡張できない純ブレイド群の埋め込みが含まれ, [5] は定理 1.2 を示唆しないし, 定理 1.2 もまた [5] の主結果を示唆しない.

2. 謝辞

研究集会「結び目の数理 IV」のお世話をしてくださり, また著者に講演の機会をくださった谷山公規先生, 安原晃先生, 村尾智さん, 丹下稜斗さん, 木村直記さんに厚くお礼申し上げます. 著者は課題番号 20J01431 を通して科研費により支援を受けています.

3. 純ブレイド群の埋め込み

この節では, 純ブレイド群から曲面の写像類群への単射準同型の構成方法を解説する. まず, 曲面の包含写像から得られる写像類群の間の準同型について述べる. この種の準同型は単射になることもならないこともあるが, それ自身が単射にならない場合でも別の単射準同型を構成するのに使われるので重要である. 連結な向き付け可能曲面の包含写像 $i: S \rightarrow F$ を考える. 本稿では i を S の **拡張** と呼ぶ. 拡張 i が **適格** であるとは $i(S)$ が F の閉集合であって, $i(\partial S)$ の各成分が ∂F のどの成分とも並行にならないときをいう. 適格な拡張は写像類群の間の自然な準同型を誘導する. この誘導準同型の核は以下のようによく調べられている.

命題 3.1 ([13]). 拡張 $i: S \rightarrow F$ が適格であるとする. もし $F \setminus \text{Int}(i(S))$ がアニュラスと 1 点穴あき円盤の非交和ならば, 誘導準同型 $\text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(F)$ の核は自由アーベル群であって, その自由生成系は

$$A = \{[T_{c_1}][T_{c_2}]^{-1} \mid c_1, c_2 \text{ は外部のアニュラスの境界成分}\}$$

と

$$\{[T_c] \mid c \text{ は外部の 1 点穴あき円盤の境界成分}\}$$

の和である. ここで, T_c は曲線 c についての Dehn ツイスト.

適格な拡張 i が**円環的**であるとは $F \setminus \text{Int}(i(S))$ の各連結成分がアニュラスであるときをいう。また、適格な拡張 i が**双曲的**であるとは $F \setminus \text{Int}(i(S))$ の各連結成分が負の Euler 標数をもつときをいう。

命題 3.2 ([13]). 拡張 $i: S \rightarrow F$ が双曲的であるとする。このとき誘導準同型 $\text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}(F)$ は単射である。

自然数 n, m が $n \leq m$ を満たすとき、双曲的拡張 $S_{0,n}^1 \rightarrow S_{0,m}^1$ が存在する。従って次が成り立つ。

系 3.3. もし $n \leq m$ ならば、 $B_n \hookrightarrow B_m$ であり $PB_n \hookrightarrow PB_m$ 。

次に、球面の分岐被覆により誘導されるブレイド群の単射準同型を復習しよう。 $S_{g-1,0}^2$ の超楕円的対合により誘導される二重分岐被覆 $S_{g-1,0}^2 \rightarrow S_{0,2g}^1$ を考える。底曲面の写像類群である B_{2g} は、Birman–Hilden 理論により $\text{Mod}(S_{g-1}^2)$ のファイバーを保つ写像類全体がなす部分群に同型である。いま、 S_{g-1}^2 と $S_{0,p}^{b+2}$ を境界に沿って貼り合わせることで円環的または双曲的な拡張 $S_{g-1}^2 \rightarrow S_{g,p}^b$ を得る。すると誘導準同型 $\text{Mod}(S_{g-1}^2) \rightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^b)$ を部分群 B_{2g} に制限しても単射になることが命題 3.1 と命題 3.2 により分かる。すなわち B_{2g} は $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$ に埋め込まれる。また、二重分岐被覆 $S_g^1 \rightarrow S_{0,2g+1}^1$ からは単射準同型 $B_{2g+1} \hookrightarrow \text{Mod}(S_g^1)$ を得る。もし $b+p \geq 2$ ならば拡張 $S_g^1 \rightarrow S_{g,p}^b$ は双曲的なので単射準同型 $B_{2g+1} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,p}^b)$ を得る。Birman–Hilden 理論についてのより詳しい説明は原論文 [3] や最近の進展を纏めた記事 [12] にある。

定理 1.2 の証明では以下の埋め込みも使っている。これは一番目の二重分岐被覆の例と命題 3.1 を組み合わせること得られる。

命題 3.4. $B_{2g+2} \hookrightarrow \text{Mod}(S_{g,1}^1)$ 。

主結果を得るためにはもう一つ別の種類の単射準同型が必要である。

定義 3.5. S を穴あき曲面、 F を曲面とする。 $\bar{S}$ を S の無限遠に境界として円周を加えて得られるコンパクトな曲面とする ($S \cong S_{g,p}^b$ ならば $\bar{S} \cong S_{g,p}^{b+p}$)。拡張 $i: S \rightarrow F$ が**擬円環的**であるとは、 i が $\bar{S}$ に幾つかのアニュラスと 1 点穴あき円盤を以下のように貼り合わせて得られるときをいう：アニュラス A (resp. 1 点穴あき円盤 D) の 1 つの境界成分は $\bar{S} - S$ の連結成分と貼り合い、 A のもう片方の境界成分は $\partial \bar{S}$ の成分と貼り合うかまたは何とも貼り合わない。定義から直ちに分かるように、 $S \subset F$ は適格でない。しかしながら $\bar{S} \subset F$ は適格である。

曲面 S の**純写像類群** $\text{PMod}(S)$ は、ブレイド群から純ブレイド群を定義した方法と同様にして定義される。球面の純写像類群については次の補題が成立する。これは、定義 3.5 中の記法で言えば、 $\text{PMod}(S)$ が $\text{PMod}(\bar{S})$ の直積分解の因子になっていると読むこともできる。

補題 3.6 ([6]). $\text{PMod}(S_{0,p}^b) \times \mathbb{Z}^b \cong \text{PMod}(S_{0,p}^{p+b})$ 。

そこで命題 3.1 を使うと次を得る。

命題 3.7. $S \rightarrow F$ を擬円環的拡張とする。もし S が球面ならば、 $\text{PMod}(S)$ は $\text{PMod}(F)$ に埋め込まれる。

擬円環的拡張は非常に多くの場合において最高次の純ブレイド群を見つけるのに役に立つ。実際、定理 1.1 と定理 1.2 に現れる上限 $1 - \chi_{g,p}^b$ は擬円環的拡張によって実現

される。実際の絵を見たい方にはアップロードされた講演スライドを読んでいただきたい。

4. 写像類群に含まれる直角アルティン群

この節では、特殊な直角アルティン群の曲面の写像類群への埋め込みに関する著者らの結果を紹介する。有限単純グラフ Γ 上の直角アルティン群 $A(\Gamma)$ とは次の群表示によって定義される群のことである：

$$A(\Gamma) := \langle V(\Gamma) \mid v_i v_j = v_j v_i \text{ if } \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

ここで $V(\Gamma)$ は Γ の頂点集合、 $E(\Gamma)$ は Γ の辺集合である。直角アルティン群は、曲面の写像類群の部分群として以下のように自然に現れる。

定理 4.1 (Koberda の埋め込み定理 [11]). S を Euler 標数が負の曲面とし Γ を有限グラフとする。もし $\Gamma \leq \mathcal{C}(S)$ ならば、 $A(\Gamma) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ である。

ここで $\mathcal{C}(S)$ は Harvey による S の曲線複体の 1-骨格である。Koberda の埋め込み定理において主張されている直角アルティン群の埋め込みは、 $\Gamma \leq \mathcal{C}(S)$ が与える曲線に沿った Dehn ツイストの十分大きな冪を取ることによって実現される。

C_m^c を m 頂点の巡回グラフの補グラフとする。Koberda の埋め込み定理と直角アルティン群の埋め込みの標準形の理論 ([10]) を駆使することにより、以下が得られる。

定理 4.2. $A(C_m^c)$ が $\text{Mod}(S_{g,p})$ に埋め込まれるための必要十分条件は m が以下の不等式を満たすこと。

$$m \leq \begin{cases} 0 & ((g, p) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}) \\ 3 & ((g, p) \in \{(0, 4), (1, 0), (1, 1)\}) \\ 5 & ((g, p) = (1, 2), (0, 5)) \\ 2g + 2 & (g \geq 2, p = 0) \\ 2g + p + 1 & (g \geq 2, 1 \leq p \leq 2) \\ 2g + p & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

定理 4.3. $A(C_m^c) \times \mathbb{Z}$ が $\text{Mod}(S_{g,p})$ に埋め込まれるための必要十分条件は m が以下の不等式を満たすこと。

$$m \leq \begin{cases} 0 & (g, p) \in \{(0, 4), (1, 1)\} \\ 3 & (g, p) \in \{(0, 5), (1, 2)\} \\ p - 1 & (g = 0, p \geq 6) \\ p + 2 & (g = 1, p \geq 3) \\ 2g + 1 & (g \geq 2, p = 0) \\ 2g + p & (g \geq 2, p \geq 1). \end{cases}$$

純ブレイド群への埋め込みについては以下が成り立つ。

定理 4.4 ([9]). Suppose $n \geq 3$. $A(C_{n+1}^c) \times \mathbb{Z} \hookrightarrow PB_n$.

定理 1.1 と定理 1.2 は以上の結果を組み合わせることで証明される。もう少し詳しく述べると、純ブレイド群を写像類群へ埋め込むパートは 3 節の結果を組み合わせることで容易に達成される。最高次の評価には上の形の直角アルティン群を使う。実際、 n が定理で与えられた上限よりも大きいとき、自由アーベル群または上の形の直角アルティン群で、 PB_n には含まれるが $\text{Mod}(S_{g,p}^b)$ には含まれないものが存在する。また、定理 4.2 と定理 4.3 は境界なし曲面に関する結果であるが、境界付き曲面の場合にも写像類群のキャップ準同型を使って同種の定理が得られることに注意しておく。

参考文献

- [1] J. Aramayona, C. Leininger and J. Souto, *Injectons of mapping class groups*, *Geom. Topol.* **13** (2009), no. 5, 2523–2541.
- [2] J. Aramayona and J. Souto, *Homomorphisms between mapping class groups*, *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 4, 2285–2341.
- [3] J. Birman and H. Hilden, *On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces*, *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), no. 3, 424–439.
- [4] J. Birman, A. Lubotzky and J. McCarthy, *Abelian and solvable subgroups of the mapping class groups*, *Duke Math. J.* **50** (1983), no. 4, 1107–1120.
- [5] F. Castel, *Geometric representations of the braid groups*, *Asterisque*, No. 378 (2016), vi+175 pp. ISBN: 978-2-85629-835-0.
- [6] M. Clay, C. Leininger and D. Margalit, *Abstract commensurators of right-angled Artin groups and mapping class groups*, *Math. Res. Lett.* **21** (2014), no. 3, 461–467.
- [7] J. Harer, *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*, *Invent. Math.* **84** (1986), 157–176.
- [8] N. Ivanov and J. McCarthy, *On injective homomorphisms between Teichmüller modular groups. I*, *Invent. Math.* **135** (1999), 425–486.
- [9] T. Katayama and E. Kuno, *The RAAGs on the complement graphs of path graphs in mapping class groups*, preprint, available at arXiv: 1804.03470v2.
- [10] S. Kim and T. Koberda, *An obstruction to embedding right-angled Artin groups in mapping class groups*, *Int. Math. Res. Not.* **2014** (2014), no. 14, 3912–3918.
- [11] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, *Geom. Funct. Anal.* **22** (2012), 1541–1590.
- [12] D. Margalit and R. Winarski, *The Birman–Hilden theory*, *Celebratio Mathematica* (2017) and *Bulletin of the London Mathematical Society*, **53** (2021), no. 3, 643–659.
- [13] L. Paris and D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, *J. Reine Angew. Math.* **521** (2000), 47–83.
- [14] K. Shackleton, *Combinatorial rigidity in curve complexes and mapping class groups*, *Pac. J. Math.* **230** (2007), no. 2, 217–232.