

# シャドウ補空間の基本群の表示

石川 昌治 (慶應義塾大学経済学部)\*

古宇田 悠哉 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)†

直江 央寛 (中央大学理工学部)‡

本稿では、早稲田大学で開催された研究集会「結び目の数理 IV」における講演内容に基づき、論文 [6] に書かれているはめ込み曲線表示をもつシャドウの部分多面体の補空間の基本群の表示の研究について紹介する。

## 1. 序

3- および 4- ハンドルを持たない 4 次元多様体  $W$  を境界から縮約 (collapse) していくことで、2 次元の多面体を作ることを考える。4 次元多様体の三角形分割を十分細かく細分し、適当な縮約を選ぶと、2 次元多面体は図 1 の局所モデルしか持たないと仮定できる。この多面体のことを境界付き 4 次元多様体  $W$  のシャドウ (shadow) という。4 次元多様体  $W$  のシャドウ  $X$  の各面に対して、 $X$  の  $W$  内での埋め込みの情報として半整数  $\mathbb{Z}/2$  が定まる。この半整数のこと、あるいは、それをすべての面について集めたものをグリーム (gleam) という。4 次元多様体  $W$  はこのグリーム付きのシャドウから一意的に復元される (Turaev's reconstruction)。つまり、グリーム付きのシャドウは境界付き 4 次元多様体の表示を与える。この 4 次元多様体の境界が  $\#_n(S^2 \times S^1)$  と微分同相ならば、それを閉 4 次元多様体の表示と見做すこともできるが、本稿では境界付き 4 次元多様体のみを扱う。

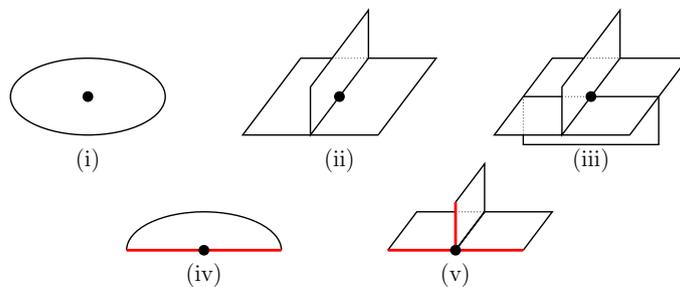


図 1. 単純多面体の局所モデル

シャドウ  $X$  の部分多面体  $Y$  は 4 次元多様体  $W$  に埋め込まれた多面体ということになるので、その補空間  $W \setminus Y$  を考えることができる。具体的な研究対象としては、例え

E-mails: (\*) ishikawa@keio.jp (†) ykoda@hiroshima-u.ac.jp (‡) naoe@math.chuo-u.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号:JP17H06128, JP19K03499, JP20K03588, JP20K03614, JP20K14316, JP21H00978, JPJSBP120219602) の助成を受けたものである。

ば、複素ベクトル空間  $\mathbb{C}^2$  内の平面曲線の補空間が挙げられる。 $\mathbb{C}^2$  内の半径の十分大きい4次元球体  $B^4$  を一つ選び、平面曲線  $C = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$  を  $B^4$  内で固定したまま  $B^4$  の境界から縮約を行うことで、 $B^4 \cap C$  を部分多面体とするシャドウを構成する。ここで  $f(z, w)$  は2変数多項式である。平面曲線の補空間の基本群の研究は古くからあり、一般次元の代数多様体の補空間の基本群の研究とも関連して、多くのことが知られている。例えば、Zariski が発見した同じ特異点をもつが位相型が異なる2つの平面曲線（いわゆる Zariski pair）では、位相型が異なることを証明する道具として、補空間の基本群が使われている [12]。

本稿は早稲田大学での研究集会「結び目の数理 IV」において発表した内容の報告であるが、そこでは円板上にアニュラスを貼り付けて得られる可縮なシャドウに対して、その部分多面体の4次元多様体内での補空間の基本群の計算方法について紹介した。このシャドウは collapsible であることから、扱っている4次元多様体は4次元球体のみということになる。シャドウの形が限定的であるため、恐らくは、上述の Zariski pair はこの枠組みには入っていない。それでも、平面曲線特異点の特異ファイバーやミルナーファイバー、複素化された実直線配置をこのクラスのシャドウにより実現できるので、それなりに広いクラスに対して適用可能な議論となっている。それらの補空間の基本群を Wirtinger 表示と同じ感覚で計算できるというのが、早稲田大学での講演の主旨である。また、グリームをうまく選ぶと絡み目補空間の基本群の Wirtinger 表示が得られることも確認できる。その意味では、今回の結果は絡み目補空間の基本群も含む話となっている。本稿の定理 4.1 が主結果であるが、基本群の表示を正確に説明するためには多少の準備が必要で、本稿ではかなり省略して説明している。詳細については論文 [6] を参照されたい。

## 2. 平面曲線特異点

$f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  を原点に孤立特異点をもつ多項式写像とし、 $f(0, 0) = 0$  と仮定しておく。図 2 の左図が  $f(z, w) = z^2 - w^2$ 、右図が  $f(z, w) = z^3 - w^2$  で与えられる多項式写像の原点における特異点を描いた図である。左図の特異点のことを（複素2変数写像の）モース特異点という。これらの図は実2次元の平面  $\mathbb{R}^2$  上の図であるが、多項式写像は  $\mathbb{C}^2$  からの写像であり、虚軸方向の情報が描かれていないことに注意して欲しい。特異点を中心とする円は  $\mathbb{R}^2$  上の円板 (disk) を表しているが、同時に、 $\mathbb{C}^2$  上では4次元球体  $B_\varepsilon^4$  を表している。この  $B_\varepsilon^4$  をミルナー球体 (Milnor ball)、その境界である3次元球面  $S_\varepsilon^3$  をミルナー球面 (Milnor sphere) という。ここで  $\varepsilon > 0$  は球体の半径を表し、十分小さいと仮定している。特異曲線  $f^{-1}(0) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$  と  $S_\varepsilon^3$  の交わり  $S_\varepsilon^3 \cap f^{-1}(0)$  は、その横断性から1次元多様体となる。つまり、3次元球面  $S_\varepsilon^3$  内の絡み目となる。これを特異点のリンクという。図 2 の左図の特異点のリンクはホップリンクであり、右図の特異点のリンクは三葉結び目 (trefoil) である。組  $(B_\varepsilon^4, B_\varepsilon^4 \cap f^{-1}(0))$  は組  $(S_\varepsilon^3, S_\varepsilon^3 \cap f^{-1}(0))$  の錐 (cone) と同相であることが知られている [8]。つまり、特異点の位相的な形を知りたけれ

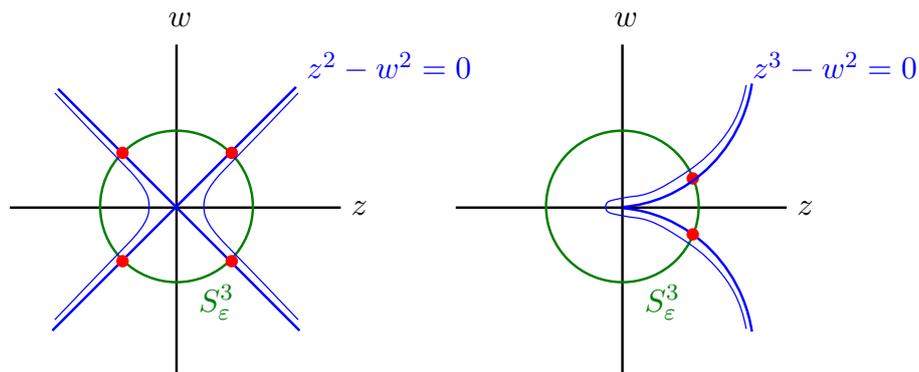


図 2. 平面曲線特異点の例

ば、特異点のリンクを調べればよいことになる。この意味で、特異点のリンクは重要な研究対象となる。

特異点を定める多項式写像を微小変形することで、特異点をより簡単な特異点に分解することを考える。図 3 では  $f_t(z, w) = z^3 + tz^2 - w^2$  という形の、多項式写像の変数  $t \in \mathbb{R}$  による変形を考えている。  $t = 0$  のときが左図で、これは図 2 の右図で紹介した特異点

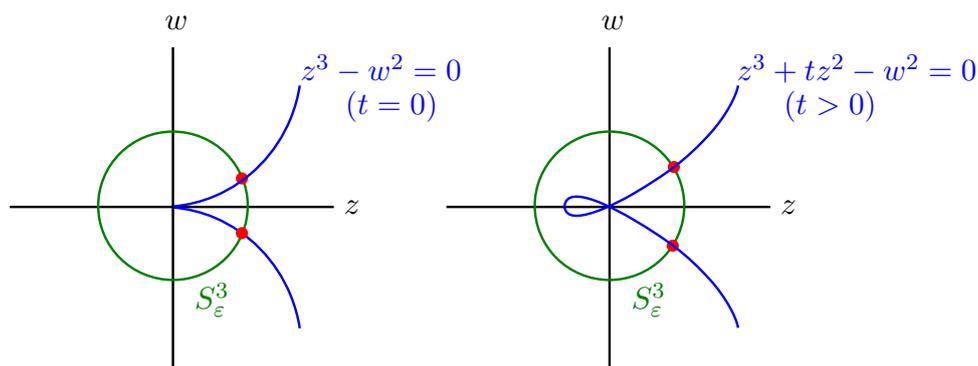


図 3. 実モーリス化の例

である。  $t$  を正に少し動かすと、右図のような曲線が得られる。ここで  $t > 0$  は曲線の変化がミルナー球体に収まるように、十分小さく選んでおく必要がある。  $t = 0$  のときに原点にあった特異点は、  $t > 0$  において、原点の 2 重点と、その左側の曲線が囲っている円板領域の中心にある特異点の 2 つの特異点に分裂する。これらの特異点はモーリス特異点であり、この変形をモーリス化という。三葉結び目のザイフェルト曲面の 1 次元ホモロジー群の階数は 2 であるが、モーリス化を行ったとき、そこに現れる特異点の数は常にこの階数と一致する。図 3 の例の場合、それらの特異点を、2 重点あるいは曲線が囲む領域として認識することができる。このような変形のことを平面曲線特異点の実モーリス化 (real morsification) という。実モーリス化に関しては次の事実が知られている。

**定理 2.1** (A'Campo [1, 2], Gusein-Zade [3, 4, 5]). 任意の平面曲線孤立特異点に対し, 実モース化が存在する.

実モース化の曲線からモース特異点の消滅サイクル (vanishing cycle) たちの交差を読み取ることができ, そこから特異点近傍にあるファイバー束 (ミルナー束) のモノドロミー行列を書き出し, アレクサンダー多項式を計算したりできる. 特異点のそれぞれの性質の視覚的な説明を可能にする面白い結果である.

### 3. 円板上にはめ込まれた曲線により表示されるシャドウ

$W$  を境界をもつコンパクトで滑らかな 4 次元多様体で, 0-ハンドル, 1-ハンドル, 2-ハンドルのみで構成できるものとする.  $L$  をその境界  $\partial W$  内の絡み目とする. 多面体が図 1 の局所モデルしか持たないとき, これを単純多面体 (simple polyhedron) という.  $X$  を  $W$  に局所平坦に埋め込まれた単純多面体で,  $\partial X = L \subset \partial W$  を満たすものとする. 縮約により  $W$  から  $X$  が得られるとき,  $X$  を組  $(W, L)$  のシャドウ (shadow) という.

本稿では 4 次元球体のシャドウを扱うが, さらにその中でも非常に特別な形をしたものだけを考える.

**定義 3.1.** 単純多面体  $X$  について,  $X$  内の円板  $D$  で,  $X \setminus D$  が境界  $\partial D$  と交わらない半開アニュラス  $S^1 \times (0, 1]$  の有限個の非交和 (disjoint union) となるものが存在するとき,  $X$  ははめ込み曲線表示 (immersed curve presentation) をもつという.

別の言い方をすると, はめ込み曲線表示をもつ単純多面体  $X$  は, 円板上に描かれた一般的 (generic) にはめ込まれた曲線たちに沿ってアニュラスたちを貼り付けて得られる可縮な多面体である (図 4 を参照). 曲線は一般的にはめ込まれているため横断的に交わる 2 重点しか持たず, よって  $X$  は単純多面体となる.

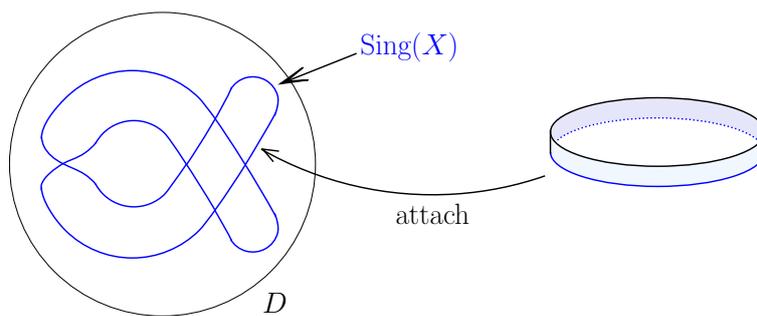


図 4. はめ込み曲線表示をもつ単純多面体

論文 [7] において, ディバイドに対して二重化 (doubling) を行い, その領域に図 5 のようにグリームを配置すると, ディバイドのファイバー曲面のミルナー球体への埋め込みの様子が明確に記述できることを示している. 図の  $a, b, c$  はそれぞれ  $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 0$

である．色の塗られた部分と  $X \setminus D$  の半開アニュラスたちの和集合がファイバー曲面となる． $b = -1$  はその位置にあるモース特異点に対応するフレーミングが  $-1$  の 2-ハンドルの  $-1$  に対応している．このラベル  $b$  のついた領域に色を塗ることは，そのモース特異点の消滅サイクルを一点に潰すことに対応し，左図の表す特異ファイバーの表示と見做すことができる．

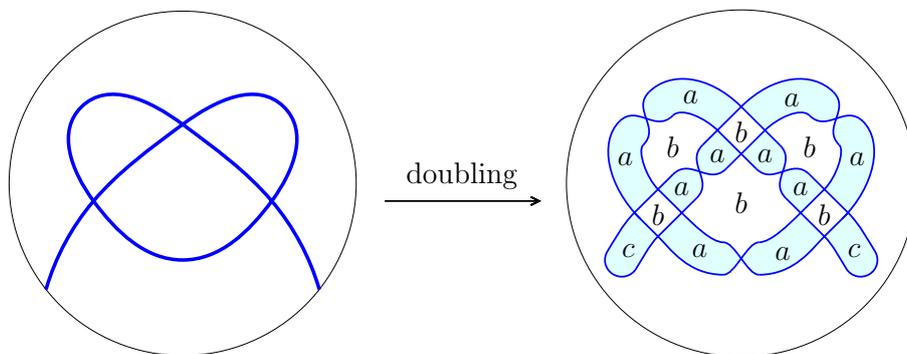


図 5. ディバイドのファイバー曲面のはめ込み曲線による表示

#### 4. 基本群の表示

$X$  をはめ込み曲線表示をもつ多面体とし， $C_X$  をそのはめ込まれた曲線とする． $C_X$  の各交点に上下の情報を任意に入れる．この絡み目図式を  $D_X$  とする． $C_X$  の曲線に囲まれた各領域  $R$  に対し，その淵に沿って一周したときの各コーナーにおける図 6 の左図に書かれている局所寄与 (local contribution) の総和を  $c(R)$  とする．右図の絡み目図式の場合，図に書き込まれた整数が  $c(R)$  となる．左図は Turaev の本 [11] の 408 ページにも描かれている由緒正しいルールである．

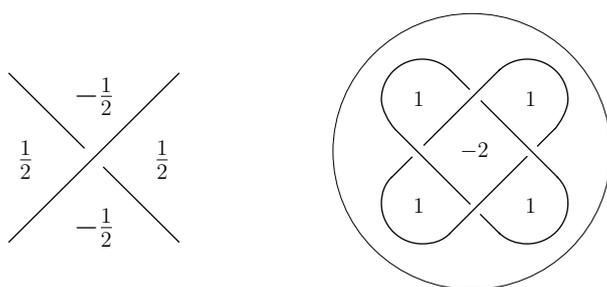


図 6. 領域の局所寄与の総和  $c(R)$

論文 [6] にあるいくつかの定理のうち，シャドウの部分多面体が  $\partial D$  と隣接する領域を含まない場合を扱ったものが次の定理である．本稿でターゲットとしている部分多面体は

すべてこの条件を満たしている。基本群の計算も多少（というか、かなり）簡略化されるので、リーズナブルな条件である。

**定理 4.1** (石川-古宇田-直江 [6]).  $X$  をはめ込み曲線表示をもつコンパクト 4次元多様体のシャドウとし,  $\mathfrak{gl}$  をそのグリームとする.  $C_X$  を  $X$  のはめ込み曲線表示の曲線とし,  $D_X$  を  $C_X$  の各交点に上下の情報を任意に入れて得られる絡み目図式とする.  $Y$  を  $X$  の部分多面体とし,  $X \setminus D$  の半開アニュラスたちをすべて含み,  $\partial D$  と隣接する領域は含まないと仮定する.  $A$  を  $C_X$  の **reduced system of cutting trees** (後述) とする. このとき,  $Y$  の  $B^4$  内での補空間の基本群は

$$\pi_1(B^4 \setminus Y) \cong \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \mid s_1, \dots, s_{n'}, t_1, \dots, t_{n''} \rangle$$

と表示される. ここで,  $x_1, \dots, x_n$  は  $D_X \setminus A$  の各弧のメリディアン,  $y_1, \dots, y_m$  は  $Y \setminus A$  の領域のメリディアンである. また, 関係式は

- (i)  $s_i = y_{r_i} x_i y_{l_i}^{-1}$
- (ii)  $t_j = x_{b_j}^{-1} \gamma_j x_{f_j} \gamma_j^{-1}$
- (iii)  $\gamma_j = y_{j_k}^{\mathfrak{gl}(R_{j_k}) - c(R_{j_k})} \dots y_{j_2}^{\mathfrak{gl}(R_{j_2}) - c(R_{j_2})} y_{j_1}^{\mathfrak{gl}(R_{j_1}) - c(R_{j_1})}$

で与えられる.

Reduced system of cutting trees の定義については論文 [6] を参照されたい. 簡単に言うと, 基本群の元を読む際に, まず  $C_X$  上のどこかに点を打って基点とし, 次に基点からメリディアンの位置までのパスを決める必要がある. そこで,  $C_X$  と横断的に交わる弧をいくつか描いて, パスはその弧は通過しないというルールを作っておく.  $D$  内でのこれらの弧の補集合を単連結にしたいので, 各弧の端点の一方は  $\partial D$  上にあるとしておく. 弧の代わりに木 (tree) を描いて対応することもでき, それをいろいろな場所に描くので, system of cutting trees と呼んでいる. 図 7 の実線  $A$  と 3 つの点線の集まりが system of cutting trees である. 定理の「 $\partial D$  と隣接する領域は含まない」という仮定の下では, 図 7 の点線のような,  $C_X$  とは一度しか交わらない弧は無視してよいことが分かるので, それらを除いたものが reduced system of cutting trees である. また, 関係式 (iii) の  $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$  についても論文 [6] を参照されたい.

関係式 (iii) について,  $\mathfrak{gl}(R) = c(R)$  が  $Y$  のすべての領域  $R$  で成り立っていると  $\gamma_j = 1$  となることが分かる. これを (ii) に代入すると  $x_{f_j} = x_{b_j}$  が得られる. つまり,  $A$  により分割された  $D_X$  の弧のメリディアンは, 実は基本群の同じ元になることが分かる. さらに次の結果が得られる.

**定理 4.2** (石川-古宇田-直江 [6]).  $\mathfrak{gl}(R) = c(R)$  が  $Y$  のすべての領域  $R$  で成り立つ場合は, 定理 4.1 の基本群の表示を整理すると, 絡み目図式  $D_X$  の基本群の Wirtinger 表示が得られる.

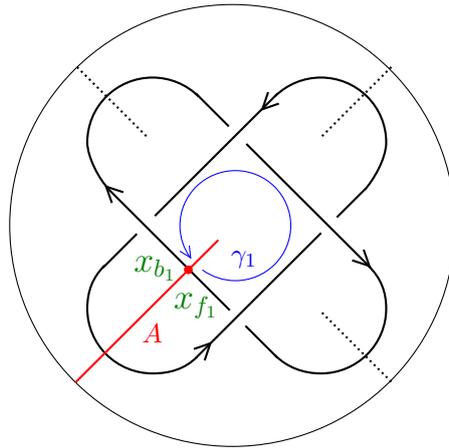


図 7. Reduced system of cutting trees

## 5. 具体例

5.1. モース特異点の特異ファイバー.  $f(z, w) = z^2 - w^2$  で与えられる多項式写像の原点における特異点を考える. 図 8 の左図のように,  $f(z, w) = 0$  で与えられる平面曲線は原点で交わる 2 枚の複素平面である. それを二重化してはめ込み曲線表示を作り, 中央の図のようにグリームを定める. ここで,  $Y$  を図の塗られた部分と  $X \setminus D$  である半開アニュラスたちの和集合とする. これは特異ファイバーに対応する. このとき,  $B^4 \setminus Y$  の基本群は, 定理 4.1 を用いると右図のようにして計算される. ここでは, まず右上と右下にある  $D_X$  の弧のメリディアンをそれぞれ  $x, y$  とし, それらに対して定理 4.1 の関係式 (i) を適用していくことで, 図のメリディアンたちを埋めていく. 次に, 中央の四角形領域  $R$  について,  $gl(R) = -1, c(R) = 2$  より関係式 (iii) は  $\gamma_1 = (xy^{-1})^{-1-(-2)} = xy^{-1}$  となる. よって, 関係式 (ii) より

$$xyx^{-1} = (xy^{-1})(yx^{-1}yxy^{-1})(xy^{-1})^{-1} = xy^{-1}yx^{-1}yxy^{-1}yx^{-1} = y,$$

つまり,  $xy = yx$  が得られる. よって, 生成元は  $x, y$  であり, それらは可換なので,  $\pi_1(B^4 \setminus Y) \cong \mathbb{Z}\langle x \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle y \rangle$  が従う. これはモース特異点の特異ファイバーのミルナー球体内での補空間の基本群であり, 同時に, 特異点のリンクであるホップリンクの補空間の基本群でもある.

5.2. モース特異点のミルナーファイバー. 先程の節と同じはめ込み曲線表示を考える. ただし今回は  $Y$  を図 9 の塗られた部分と  $X \setminus D$  である半開アニュラスたちの和集合とする. このとき, 基本群の計算は先程と全く同じになるが, 中央の四角形領域は  $Y$  に含まれていないため, そのメリディアンは  $B^4 \setminus Y$  では自明となる. よって  $xy^{-1} = 1$  という関係式が加わる. 前節の基本群の計算結果に  $x = y$  を加えると,  $\pi_1(B^4 \setminus Y) \cong \mathbb{Z}$  となる. これはモース特異点のファイバー曲面 (いわゆる, ミルナーファイバー) の  $B^4_\varepsilon$  内での補空間

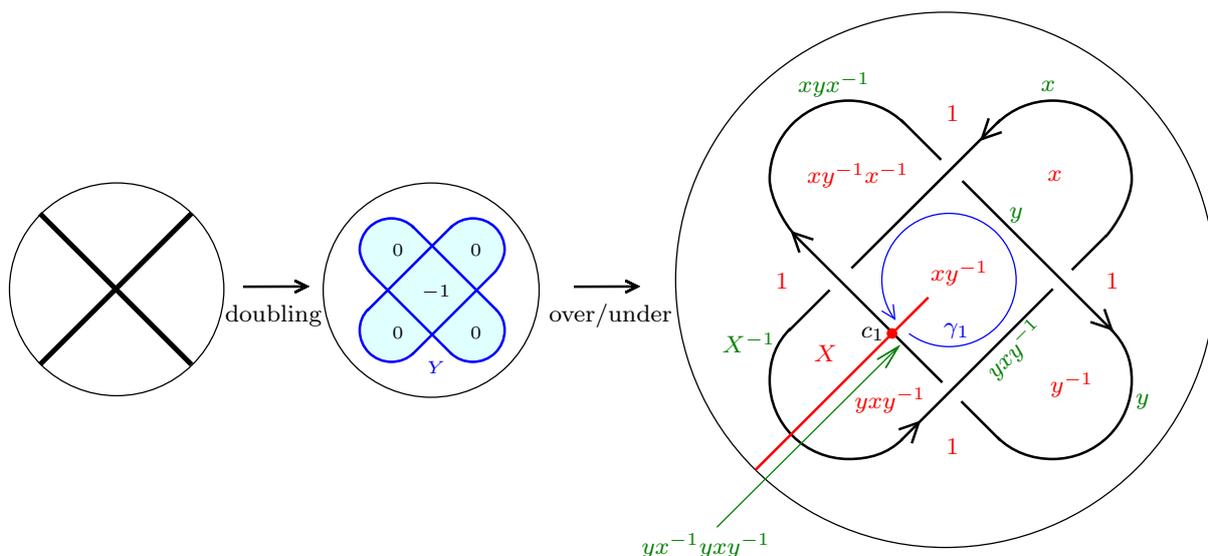


図 8. モース特異点の特異ファイバーのはめ込み曲線表示とその補空間の基本群の計算

の基本群であり、この基本群はファイバー曲面のメリディアンにより生成される。Milnor の本 [8] で示されているように、このミルナーファイバーはベクトル場を作ることで、特異点のリンクを固定したまま  $\partial B_\epsilon^4 = S_\epsilon^3$  内に押し付けることができる。この  $S_\epsilon^3$  内の曲面はホップリンクのファイバー曲面であり、つまりアニュラスである。実際、図 9 のはめ込み曲線表示に半開アニュラス 2 つを貼って  $Y$  を作ると、4次元球体にアニュラスが埋め込まれている様子が確認できる。

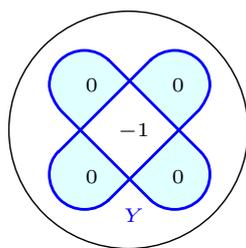


図 9. モース特異点のミルナーファイバーのはめ込み曲線表示

5.3.  $f(z, w) = z^3 - w^2$  の特異点の特異ファイバー.  $f(z, w) = z^3 - w^2$  で与えられる多項式写像の原点における特異点を考える。特異ファイバーの補空間の基本群の計算方法は先程と同様で、図 10 のようになる。さらに  $xy^{-1}x^{-1}y$  と書かれている二面体領域から  $\gamma_1 = (xy^{-1}x^{-1}y)^{-1-(-1)} = 1$  という式が得られ、定理 4.1 の関係式 (ii) から  $xyx^{-1} = y^{-1}xy$

が得られる．結果，基本群は  $\pi_1(B^4 \setminus Y) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$  となる．これは三葉結び目補空間の基本群である．

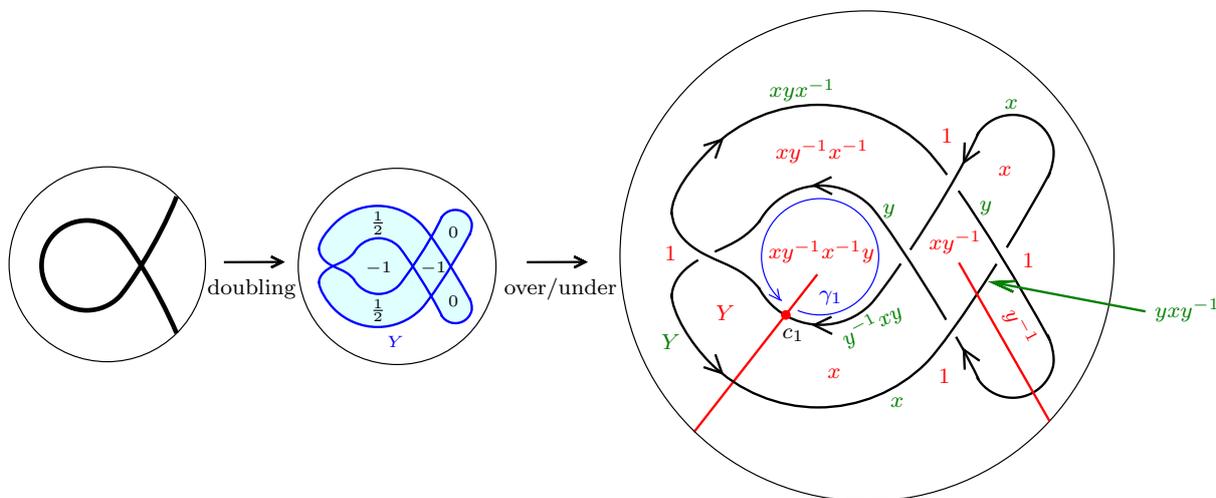


図 10.  $f(z, w) = z^3 - w^2$  の特異点の特異ファイバーのはめ込み曲線表示とその補空間の基本群の計算

5.4. 複素化された実直線配置. 最後に，複素化された実直線配置の  $\mathbb{C}^2$  内での補空間の基本群の計算を紹介する．複素化された実直線配置については，本研究集会で北海道大学の菅原朔見氏が講演しているのて，その報告集の記事を参照されたい．

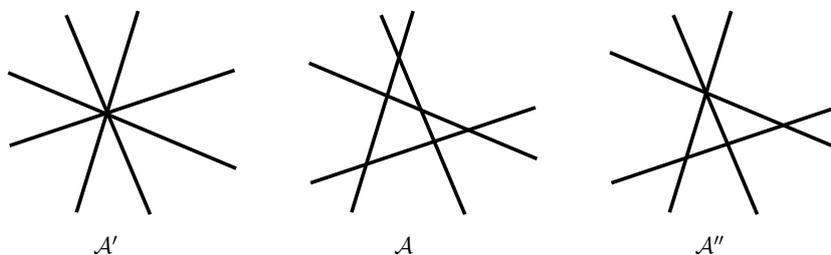


図 11. 実直線配置  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}''$

図 11 にある 3 つの実直線配置を左からそれぞれ  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}''$  とし，それらを複素化して得られる  $\mathbb{C}^2$  内の直線配置をそれぞれ  $\mathcal{A}'_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathcal{A}''_{\mathbb{C}}$  とする．

図 12 のように，中央にある実直線配置  $\mathcal{A}$  に対して二重化を行う．グリームは図 5 のルールに従って設定する． $Y$  として， $\partial D$  と隣接しないすべての領域を選ぶ． $Y \cap D$  のすべての領域を一点に潰すことを考えると， $B^4 \setminus Y$  は  $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}'_{\mathbb{C}}$  ( $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  ではない!) とホモトピー同値であることが分かる．定理 4.1 により基本群を計算すると

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}'_{\mathbb{C}}) \cong \langle x, y, Z, W \mid xZyW = ZyWx = yWxZ = WxZy \rangle$$

となる.  $x, y, z, w$  は  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  の 4 枚の複素平面のメリディアンであり,  $Z, W$  はそれぞれ  $z, w$  と共役な元である. 求めた基本群は  $\mathbb{C}^2$  内の原点で交わる 4 枚の複素平面の補空間の基本群, つまり, 平面曲線  $f(z, w) = z^4 - w^4 = 0$  の補空間の基本群であるから, 特に, (4, 4)-トーラスリンク補空間の基本群とも同型である.

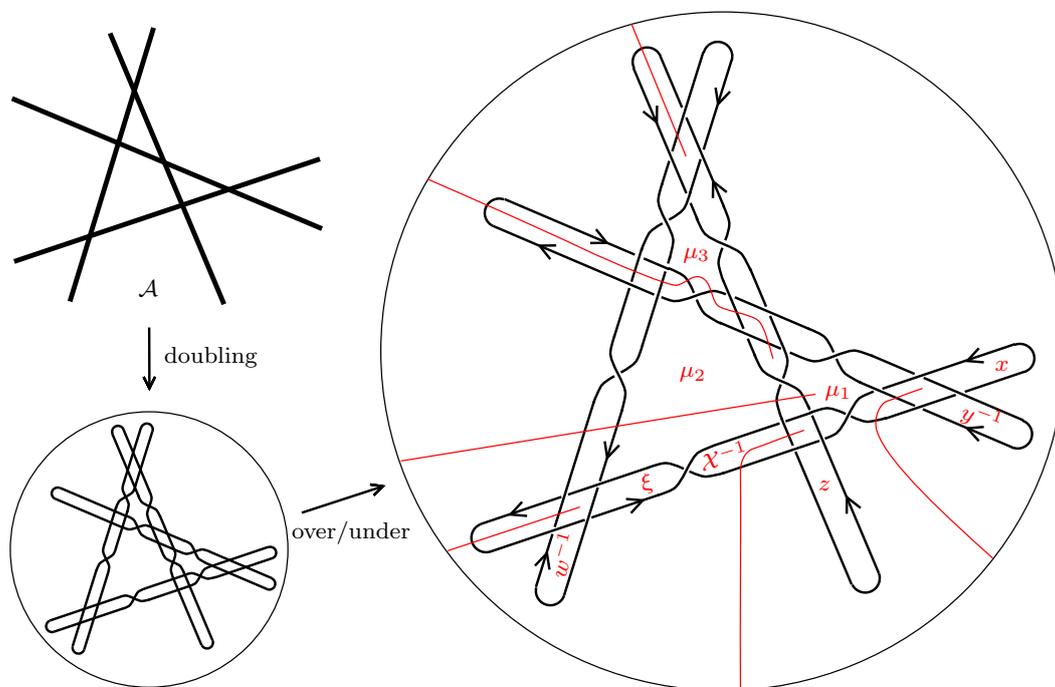


図 12. 複素化された実直線配置のはめ込み曲線表示

次に  $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  の基本群を計算する.  $\mathcal{A}$  には直線に囲まれた領域が 3 つあるが, その 3 つの領域に対応するシャドウの領域 (図 12 の  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  が書かれた領域) は  $Y$  に含めないことにする. つまり,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$  という関係式を加える. この部分多面体  $Y$  は  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  に対応し, 定理 4.1 を使って基本群を計算すると,

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}\langle x \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle y \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle z \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle w \rangle$$

が得られる.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  は一般的な位置にある 4 枚の複素平面であり, 複素平面同士の交点はモース特異点であることから, それらのメリディアンが可換であることが分かる. よって, すべてのメリディアンが可換となるため, 基本群は  $\mathbb{Z}^4$  となる.

最後に  $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}'_{\mathbb{C}}$  の基本群を計算する. この場合は  $\mu_1$  に対応する領域は  $Y$  に含める必要があるので,  $\mu_2 = \mu_3 = 1$  という関係式を加えればよい. 計算すると, 基本群は

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{A}'_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}\langle x \rangle \oplus \langle y, z, w \mid wzy = ywz = zyw \rangle$$

となる.

複素化された実直線配置の補空間の基本群については, Randell の 1985 年の論文 [9, 10] で簡潔な表示が示されている. 今回の計算結果はその簡潔な表示をシャドウを使ってかなり遠回りに計算したもので, 効率の良いものとは決して言えない. 一方, ここで紹介した 3 つの直線配置の補空間の基本群の計算例から分かるように, 領域のメリディアンのワードを関係式に組み込むことで直線配置の補空間の計算同士を関連付けることができる. 定理 4.1 を直線配置 (あるいはディバイド) に特化した形に書き換え, より使い易い状態にして考察を進めると, 新しいものが見えてくるのではないかと期待している.

#### 参考文献

- [1] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I*, Math. Ann. **213** (1975), 1–32.
- [2] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes II*, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Vancouver, 1974, 395–404.
- [3] S.M. Gusein-Zade, *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 10–13.
- [4] S.M. Gusein-Zade, *Dynkin diagrams of singularities of functions of two variables*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 295–300.
- [5] S.M. Gusein-Zade, *The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces*, Russian Math. Surveys **32** (1977), 23–69.
- [6] M. Ishikawa, Y. Koda, H. Naoe, *Presentation of the fundamental groups of complements of shadows*, preprint, arXiv:2110.02431 [math.GT]
- [7] M. Ishikawa, H. Naoe, Milnor fibration, A'Campo's divide and Turaev's shadow, Singularities — Kagoshima 2017, Proceedings of the 5th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, World Scientific Publishing, 2020, pp. 71–93.
- [8] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, No. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo 1968.
- [9] R. Randell, *The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes*, Invent. Math. **69** (1982), no. 1, 103–108.
- [10] R. Randell, Correction: “The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes”, [Invent. Math. **69** (1982), no. 1, 103–108]. Invent. Math. **80** (1985), no. 3, 467–468.
- [11] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol 18, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [12] O. Zariski, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. Math. **51** (1929), no. 2, 305–328.