

Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$ -trisections with different configurations of vanishing cycles

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
浅野喜敬 (Nobutaka ASANO)

概要

トライセクションは 4 次元多様体から平面へのある安定写像として Gay-Kirby により導入された。Baykur-Saeki は特異値が自己交差を持たないクラスとして、単純なトライセクションを導入した。講演者は、単純な $(2, 0)$ -トライセクションの右左同値類に着目し、平面上のレファレンスパスの取り換えによる単純なトライセクション図式の変化の様子について調べ、右左同値であるが、曲面の同相写像と上三角ハンドルスライドの有限個の列で移り合わない単純なトライセクション図式を持つ単純な $(2, 0)$ -トライセクションが存在することを示した。講演では、得られた結果について紹介する。

1 折り目特異点・カスプ特異点

以下、 X を 4 次元多様体、 $f: X \rightarrow \mathbf{R}^2$ を C^∞ 級写像とし、 $\text{Crit}(f) = \{p \in X \mid p \text{ は } f \text{ の臨界点}\}$ とする。トライセクション写像の定義を述べるために必要な特異点・及びその特異値集合の近傍における正則ファイバーの変化について紹介する。

定義 1. $p \in \text{Crit}(f)$ とする。 p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して、 $f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp. $f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) と表せるとき、 p は不定値 (resp. 定値) 折り目特異点であるという。

定義 2. $p \in \text{Crit}(f)$ とする。 p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して、 $f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ と表せるとき、 p はカスプ特異点であるという。

図 1 左図は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通過した後のファイバーの変化の様子を示したものである。図 1 左図の縦方向の座標が定義 1 における座標 t であり、黒太実線部が f の特異値集合を表している。図 1 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため、正則値 p, q を結ぶ点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている。ファイバーの曲面では手術が行われ、図 1 左図のような変化が生じる。このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 1 左図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び、正則値を結び特異値と交わる値域上の点線をレファレンスパスと呼ぶ。定値折り目特異点

の場合も同様にして、レファレンスパスの引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる。このとき図 1 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 - z^2$ で与えられており、特異値はこの関数の最大値である。よって不定値折り目特異値を通過すると正則ファイバーは空集合に変化し、図 1 右図のような変化が生じる。

カusp特異点の近傍の像は図 1 右図である。緑の点がカusp特異値であり、カusp特異値では 2 本の不定値折り目特異値集合が接する。またカuspの内側の正則値 p のファイバーの近傍は境界成分が 1 つの種数 1 の曲面となる図 1 右図のように 2 本の不定値折り目特異値集合各々に対しレファレンスパスを与える。このとき不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b がレファレンスパスの始点上のファイバーに存在する。 a と b は幾何学的に 1 度だけ交わる。 p のファイバーをレファレンスパスに沿って動かすと、不定値折り目特異値上を通過する際に 3 次元 2-ハンドルの接着が行われ、ファイバーが D^2 へと変化する。

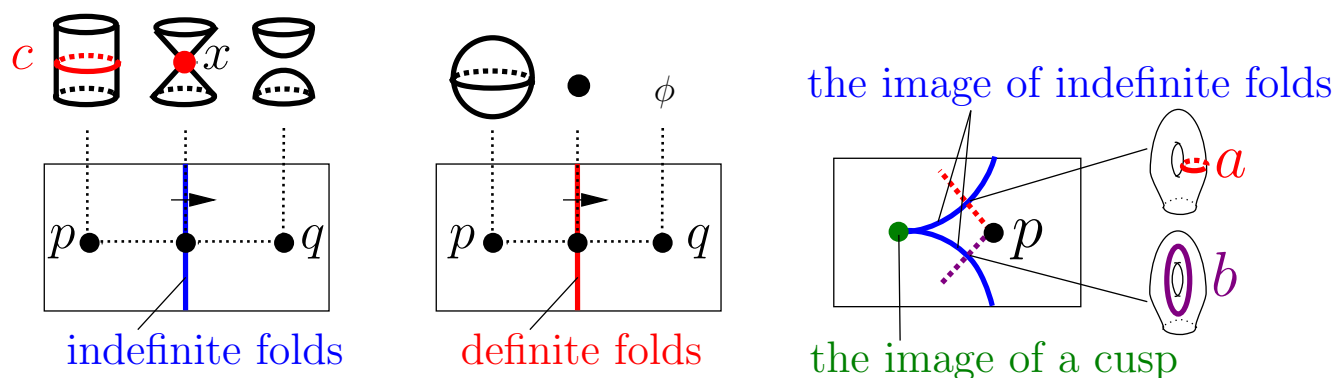


図 1: (左図) : 不定値折り目特異値 (中図) : 定値折り目特異値 (右図) : カusp特異値

単純なトライセクション写像とは、特異値集合に 2 重点を持たないトライセクション写像であり、Baykur-佐伯により初めて導入されたものである。Baykur-佐伯は閉 4 次元多様体の持つ単純な特異 Lefschetz 束を変形することで、単純なトライセクション写像を得るアルゴリズムを具体的に与えている [2]。

2 トライセクション写像

Gay-Kirby は、閉 4 次元多様体から $\mathbf{R}^2$ への安定写像 (トライセクション写像) を構成することで、任意の閉 4 次元多様体がトライセクションを許容することを証明した。この節では、トライセクション写像の定義について述べる。

定義 3. 安定写像 $f : X \rightarrow \mathbf{R}^2$ の特異値集合が図 2 で与えられるとき、 f を (g, k) -トライセクション写像という。

図 2 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し、内側には不定値折り目特異点やカusp特異点の像が描かれている。3 つの白い箱の内部には、各々 g 本の不定値折り目特異値のはめ込みが存在し、白い箱の不定値折り目特異値の単店同士を繋いでいる。ただし、これらの多重点はすべ

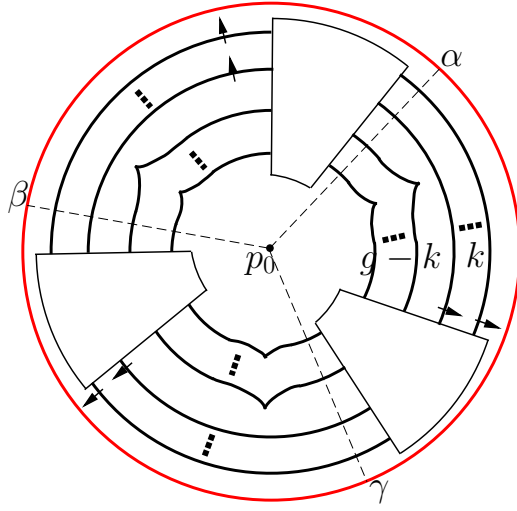


図 2: (g, k) -トライセクション写像の特異値集合.

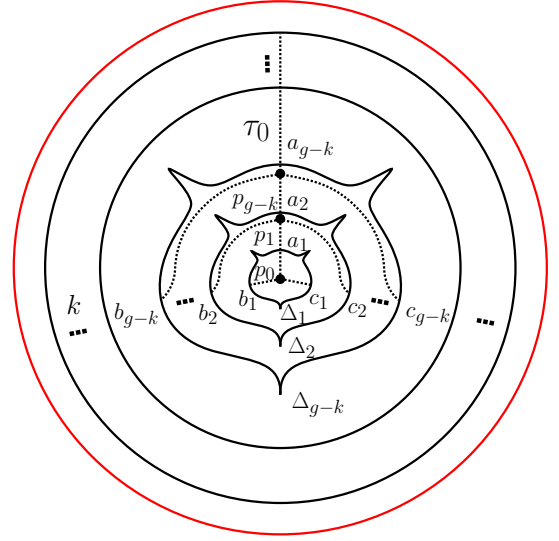


図 3: 単純な (g, k) -トライセクション写像の特異値集合.

て 2 重点であり，折り目特異値は p_0 を中心とした円周に直行する接ベクトルを持たない．白い箱の間では，外側には不定値折り目特異値が k 本あり，内側には 1 つのカスプ特異値が 1 つついた不定値折り目特異値が $g - k$ 本ある．また，各白い箱の間に存在する特異値は互いに交わらない．さらに， $f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である．

トライセクション写像をより単純化したものとして，Baykur-Saeki は特異値が図 3 で与えられる単純なトライセクション写像を導入し，任意の閉 4 次元多様体が単純な trisection 写像をもつことを証明した [2]．

定義 4. 安定写像 $f: X \rightarrow \mathbf{R}^2$ の特異値集合が図 3 で与えられるとき， f を単純な (g, k) -トライセクション写像という．

3 右左同値・安定写像

この章では可微分写像の同値関係である右左同値と，安定写像について紹介する．安定写像は次節で紹介するトライセクション写像を含む写像のクラスであり，比較的扱い易く意味のある特異点を持つ写像である．

定義 5. 可微分写像 $f, g: M \rightarrow N$ に対して以下の図式が可換であるとき， f と g は右左同値であるといい， $f \simeq g$ と表す：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

微分同相写像を定義域と値域の多様体全体における座標変換のようなものと思うと、2つのこの同値関係の下で、安定写像を定義する。

定義 6. $f : M \rightarrow N$ の近傍内の任意の可微分写像 g に対し $f \simeq g$ であるとき、 f を安定写像であるという。但し、写像空間 $C^\infty(M, N)$ にはホイットニー C^∞ 位相を入れている。

例えば、多様体上の Morse 関数で特異値がすべて異なるものは安定写像である。この意味で、安定写像は Morse 関数の一般化である。

4 主結果

可微分写像の右左同値類を特異点から与えられる図式より決定することは基本的な問題である。本稿では、次の問題を考える：単純なトライセクションの同値類全体の集合と単純なトライセクション図式全体の集合の間に一対一の対応は存在するか？一般に、単純なトライセクション写像が与えられると、そこから得られる単純なトライセクション図式は一意的ではない。そこで、単純なトライセクション図式全体の集合を自然な同値関係で同一視することを考える。

定義 7. $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}), (\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ を単純な $(2, 0)$ -トライセクション図式とする。

- 図式の曲線のラベルを保つ Σ から Σ' への同相写像、
- 上三角ハンドルスライド、
- レファレンスパスの取り換え

の有限列で $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\})$ が $(\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ に移るとき、これらの単純なトライセクション図式は同値であるといい、 $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}) \sim (\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ と表す。

講演者は単純な $(2, 0)$ -トライセクションの右左同値類に着目し、その図式全体の集合をレファレンスパスの取り換えで生じる図式の変化、上三角ハンドルスライド、曲面の同相写像により同一視したものについて考察した。互いに右左同値だが、曲面の（ラベルを保つ）同相写像と上三角ハンドルスライドでそれらの単純な $(2, 0)$ -トライセクション図式が移り合わない例を構成した。構成にはレファレンスパスの取り換え操作である Δ_2 -ムーブを用いる。

定理 8. $f : X \rightarrow \mathbf{R}^2$ をモノドロミーが非自明である単純な $(2, 0)$ -トライセクションとする。 b'_2 と c'_2 及び a'_2 と $\mu_1^{-1}(c'_2)$ が平行でないならば、少なくとも2つの単純な $(2, 0)$ -トライセクション f' と f'' が存在し、以下を満たす：

- f, f', f'' は互いに右左同値だが、 f, f', f'' の単純なトライセクション図式は相異なる。即ち、同相写像と上三角ハンドルスライドでは移り合わない。

5 謝辞

現地での講演の機会を与えて下さいました世話人の皆様に感謝申し上げます。また、現地にて質問・議論をして頂いた参加者の皆様にも大変感謝しております。ありがとうございました。

参考文献

- [1] N. Asano Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$ -trisections with different configurations of vanishing cycles, preprint, available at [arXiv:2109.13533](https://arxiv.org/abs/2109.13533).
- [2] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplified indefinite fibrations on 4-manifolds, *Trans. AMS*, <https://doi.org/10.1090/tran/8325>.
- [3] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.