

カスプ付きディバイドから定まる絡み目と直線配置の Kirby 図式

菅原 朔見 (北海道大学大学院理学院数学専攻)

概要

体 \mathbb{K} 上のアフィン空間 \mathbb{K}^ℓ 内の超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を超平面配置という。超平面配置のトポロジーの観点からは複素超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ のトポロジーを調べるのが大きな問題意識である。本稿では特に $\ell = 2$ (すなわち直線配置) の場合について扱う。このとき補集合 $M(\mathcal{A})$ は実 4 次元多様体となるが、実直線配置の複素化補集合に対してハンドル分解を表す Kirby 図式をカスプ付きディバイドから定まる絡み目を用いて記述することができたので、それについて紹介する。本稿の内容は吉永正彦氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

1 超平面配置のトポロジー

本章では、本研究で舞台となる超平面配置について紹介し、極小セル分割という特徴的な位相的側面について述べる。

定義 1.1. \mathbb{K} を体とする。アフィン空間 \mathbb{K}^ℓ 上のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を超平面配置という。また超平面の補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{K}^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ と定める。

例 1.2. 係数体 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする。このとき補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ はいくつかの連結な開集合に分かれる。各連結成分を部屋と呼ぶ。部屋全体の集合を $\text{ch}(\mathcal{A})$ と表し、有界な部屋全体の集合を $\text{bch}(\mathcal{A})$ と表す。

例 1.3. 定義体 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする。このとき補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ は連結であり、アフィン代数多様体となる。

超平面配置のトポロジーからの観点では、複素超平面配置 ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合) の補集合のトポロジーを調べるのが重要な問題である。これについて、補集合 $M(\mathcal{A})$ は極小セル分割と呼ばれる特徴的な性質を持つ。

定理 1.4. 複素超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A})$ は極小セル分割をもつ、すなわち任意の $k \geq 0$ に対して Betti 数 $b_k(X) = (k\text{-セルの個数})$ をみたく CW 複体 X とホモトピー同値である。

注意 1.5. 一般に $(k\text{-セルの個数}) \geq b_k$ である。また、一般の複素超曲面の補集合は極小セル分割を持たない。例えば $\mathbb{C}^2 \setminus \{y^2 - x^3 = 0\}$ は基本群が 3 次ブレイド群 B_3 であるため、 $b_1 = 1$ であるが 1-セルが 1 枚のみからなるようなセル分割を持たない。

定理 1.4 の証明の概略を述べる。鍵になるのは次の二つの定理である。

定理 1.6. (Lefschetz 超平面切断定理 [Ha83][HL73]) F を \mathcal{A} と generic に交わる超平面とする。このとき $M(\mathcal{A})$ は $M(\mathcal{A}) \cap F$ に有限個の ℓ -セルを接着して得られる CW 複体とホモトピー同値である。

この定理から、次元についての帰納法を用いることにより $M(\mathcal{A}) \cap F$ が $M(\mathcal{A})$ の $\ell - 1$ スケルトンとホモトピー同値であることがわかる。さらに、 ℓ 次元のセルの個数 c_ℓ について $c_\ell = \dim H_\ell(M(\mathcal{A}), M(\mathcal{A}) \cap F)$ であることがわかる。さらに、 $M(\mathcal{A}) \cap F$ と $M(\mathcal{A})$ のホモロジーの関係については、Orlik-Solomon による組み合わせ論的な記述により以下が成り立つことが知られている。

定理 1.7. [OS92] $i : M(\mathcal{A}) \cap F \rightarrow M(\mathcal{A})$ 包含写像の誘導するホモロジーの間の写像について以下の同型が成り立つ：

$$i_* : H_{\ell-1}(M(\mathcal{A}) \cap F) \cong H_{\ell-1}(M(\mathcal{A})).$$

定理 1.4 の証明は次元による帰納法により行う。対 $(M(\mathcal{A}), M(\mathcal{A}) \cap F)$ に対するホモロジー長完全列から、

$$H_\ell(M(\mathcal{A}) \cap F) \rightarrow H_\ell(M(\mathcal{A})) \rightarrow H_\ell(M(\mathcal{A}), M(\mathcal{A}) \cap F) \rightarrow H_{\ell-1}(M(\mathcal{A}) \cap F) \xrightarrow{i_*} H_{\ell-1}(M(\mathcal{A}))$$

という完全列を得る。定理 1.6 の系から $M(\mathcal{A}) \cap F$ は $(\ell - 1)$ 次元の CW 複体とホモトピー同値なので、 $H_\ell(M(\mathcal{A}) \cap F) = 0$ となること、また i_* が同型写像となることから、同型

$$H_\ell(M(\mathcal{A})) \cong H_\ell(M(\mathcal{A}), M(\mathcal{A}) \cap F)$$

を得る。これから ℓ 次 Betti 数 b_ℓ に対し、 $b_\ell = c_\ell$ を得る。ゆえに任意の $k \geq 0$ に対して $b_k = c_k$ であることが従う。(証明の概略終わり)

$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を実超平面配置とする。実超平面配置からは複素化 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \{H_1 \otimes \mathbb{C}, \dots, H_n \otimes \mathbb{C}\}$ を得ることができる。複素化補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H_{\mathbb{C}}$ と表す ($H_{\mathbb{C}} = H \otimes \mathbb{C}$)。実超平面配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の極小セル分割は実構造を用いて記述することができる。

定義 1.8. F を \mathcal{A} と generic に交わる超平面とする。このとき F と交わらない部屋の集合を

$$\text{ch}_F(\mathcal{A}) := \{C \in \text{ch}(\mathcal{A}) \mid C \cap F = \emptyset\}$$

と定義する。

命題 1.9. 実超平面配置の複素化補集合の ℓ 次 Betti 数について以下が成り立つ：

$$b_\ell(M(\mathcal{A})) = \# \text{ch}_F(\mathcal{A}).$$

特に $\ell = 2$ の場合は、極小セル分割を持つことと合わせて次がわかる。

系 1.10. 実直線配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ は 1 スケルトンが S^1 の n 個の 1 点和で、2-セルが $\# \text{ch}_F(\mathcal{A})$ 枚それに接着しているようなセル分割を持つ。

実超平面配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の具体的な極小セル分割について [Y07] による方法は次のようなものである。 $M(\mathcal{A})$ 上に (境界付近で適切にコンパクト化することにより、) Morse 関数 $\varphi : M(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して、これは以下を満たす。

- $\varphi^{-1}(0) = M(\mathcal{A}) \cap (F \otimes \mathbb{C})$.
- 各 $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対して、ちょうど一つ臨界点 $p_C \in C$ が存在し、Morse index が ℓ である。
- 部屋 C が臨界点 p_C における安定多様体になる。
- これ以外には臨界点が存在しない。

この Morse 関数 φ の勾配流を詳しく見ることにより、接着写像が記述できる。

2 カスプ付きディバイド

本章では、ディバイドの一般化であるカスプ付きディバイドについて紹介する。カスプ付きディバイドから得られる絡み目は、主結果の Kirby 図式を記述するために用いる。

定義 2.1. カスプ付きディバイド P とは、有限個の閉区間と S^1 から D^2 への連続写像の像で、有限個のカスプを除けば proper で generic なはめ込みの像になっているものをいう。

定義 2.2. カスプ付きディバイドから得られる S^3 内の絡み目を

$$L(P) = \{(x, y) \mid x \in P, y \in T_x P, |x|^2 + |y|^2 = 1\} \subset S^3$$

と定義し、これもディバイド絡み目と呼ぶことにする。

注意 2.3. カスプがひとつもないものをディバイドという。ディバイドは A'Campo により代数曲線の孤立特異点の近傍を記述するツールとして導入されたものである [AC99][AC98]。 (カスプのない) ディバイドは、得られる絡み目が fibered であるという性質をもつ。これは、ディバイドが零点集合となるような D^2 上の Morse 関数を構成し、それを複素化することによりわかる [AC98]。

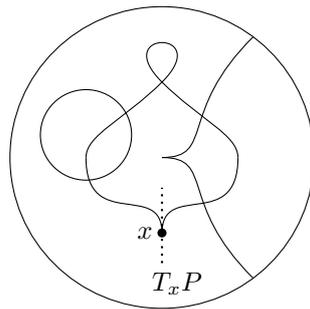


図1 カスプ付きディバイド，カスプでも接線が定まる。

注意 2.4. カスプの点では関数の微分をすることはできないが、接線を引くことは可能であり、 $L(P)$ は well-defined に定まる。カスプの点は、 $L(P)$ 上の半捻りに対応し、カスプの向きによって右捻りか左捻りかが変わる (図 2)。

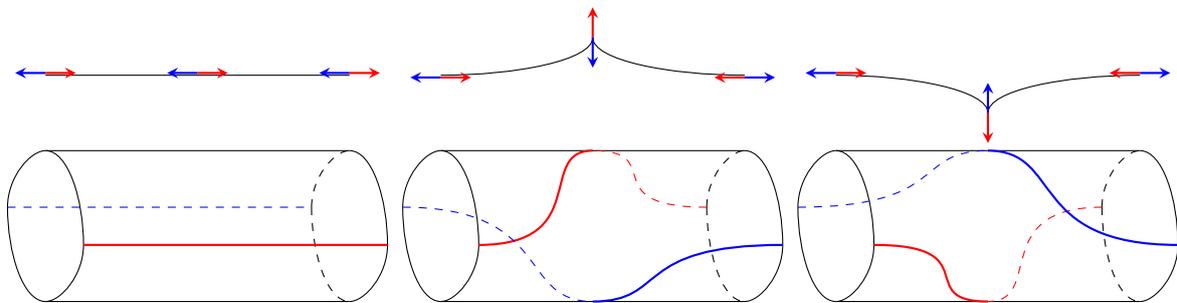


図2 カスプでの半捻り

注意 2.5. 以下の操作は $L(P)$ のイソトピー型を変えないディバイドの変形である (図 3).

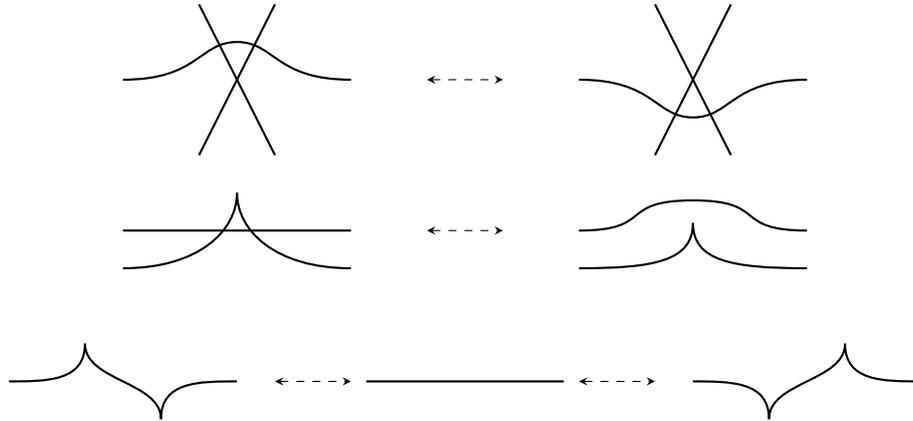


図 3 イソトピーを変えない変形

注意 2.6. カスパ付きディバイド上ではディバイド上に構成した Morse 関数を構成することができず、一般に $L(P)$ は fibered ではない. 実際, 以下のカスパ付きディバイドからは fibered ではない絡み目が得られる.

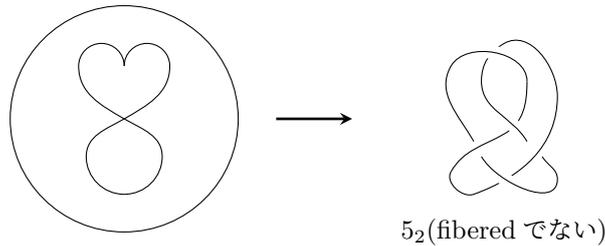


図 4 fibered でない $L(P)$ の例

また主結果でカスパ付きディバイドを構成する際の舞台となる D^2 や S^3 のモデルを準備する. D^2 に対応するものとして, 長方形

$$\text{Rect}(R, 1) = [-R, R] \times [-1, 1] \approx D^2$$

と定める. ただし $R > 0$ を十分大きい実定数である. $\mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1)$ に対し, 長方形の境界との (最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ についての) 距離を $\delta(\mathbf{x}) = \min\{x_1 + R, R - x_1, x_2 + 1, 1 - x_2\}$ とする. $\text{Rect}(R, 1)$ 上で接ベクトルを対応させることにより, 3-次元球面のモデルを

$$S^3(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, \|\mathbf{y}\| = \delta(\mathbf{x})\} \approx S^3$$

とする. これは 4 次元球体

$$D^4(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, \|\mathbf{y}\| \leq \delta(\mathbf{x})\} \approx D^4$$

の境界である. (本稿では単にノルム $\|\cdot\|$ と書けば最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ のことを表す.)

3 補集合 $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解

以降, $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ を \mathbb{R}^2 内の実直線配置とし, $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H_{\mathbb{C}}$ を複素化補集合とする. 本章では, 講演では詳細に触れなかった $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解について述べる.

各直線 $H \in \mathcal{A}$ はアフィン直線であるから, 一次式

$$\alpha_H(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c = 0$$

により定義される $(a, b, c \in \mathbb{R}$ で $(a, b) \neq (0, 0)$). \mathbb{C}^2 と \mathbb{R}^2 上の接バンドルの全空間 $T\mathbb{R}^2$ との同一視を $\mathbf{x} + \sqrt{-1} \cdot \mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2)$ で与える. 複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ はこの同一視によって, 次のようにみれる.

命題 3.1.

$$M(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, H \in \mathcal{A}_{\mathbf{x}} \text{ ならば } \mathbf{y} \notin T_{\mathbf{x}}H\}.$$

である. ただし, $\mathcal{A}_{\mathbf{x}} = \{H \in \mathcal{A} \mid \mathbf{x} \in H\}$ である.

Proof. $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ を $z_i = x_i + \sqrt{-1} \cdot y_i$ と実部と虚部に分けると,

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) \in H_{\mathbb{C}} &\Leftrightarrow az_1 + bz_2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x_1 + \sqrt{-1} \cdot y_1) + b(x_2 + \sqrt{-1} \cdot y_2) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + c + \sqrt{-1} \cdot (ay_1 + by_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad \text{かつ} \quad ay_1 + by_2 = 0 \end{aligned}$$

となる. これは接ベクトルとの対応によると,

$$(z_1, z_2) \in H_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in H \text{ かつ } \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}H (\subset T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2)$$

と言い換えることができる. あとは $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H_{\mathbb{C}}$ であることから従う. □

雑に言えば, $M(\mathcal{A})$ は \mathcal{A} と横断的に交わる接ベクトル全体の集まりである.

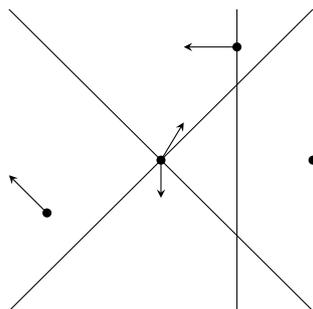


図5 接ベクトル対応を用いた $M(\mathcal{A})$ の点の様子

また, 適切な座標変換のもと, \mathcal{A} に以下の条件を仮定する. これは適切に座標変換を施すことで一般性を失わずに仮定することができる.

- (i) ある実数 $R_0 > 1$ が存在して, \mathcal{A} の任意の交点 (x_1, x_2) の x_2 座標は $1 < x_2 < R_0$ を満たす.
- (ii) $F = \{x_2 = 0\}$ は \mathcal{A} と generic に交わる.
- (iii) $H_i \in \mathcal{A}$ と F の交点 $(a_i, 0)$ について, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

- (iv) H_i の定義式 α_i に対し, $H_i^- = \{\alpha_i < 0\}$ が F の負の方を含む. (したがって $H_i^+ = \{\alpha_i > 0\}$ は F の正の方を含む.)
- (v) H_i と F のなす偏角 θ_i について $\pi/4 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n \leq 3\pi/4$ をみताす.
- (vi) $R > 0 (R \gg R_0)$ を, 任意の i に対して H_i と $\{x_2 = R_0\}$ の交点の x_1 座標が $\{-R + R_0 < R - R_0\}$ に含まれるようにとる.

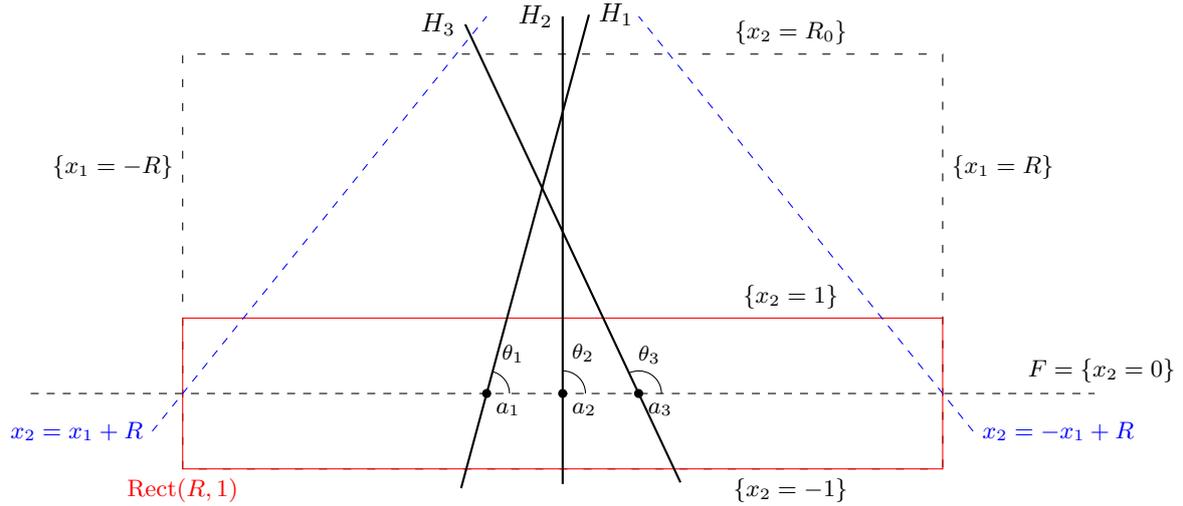


図6 仮定を満たすような A の図

H_C の \mathbb{C}^2 における管状近傍を \tilde{H}_C とおき, M_1 を

$$M_1 = \left(\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_C \right) \cap \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in [-R, R] \times [-1, R_0], \|\mathbf{y}\|_\infty \leq R\}$$

と定義する. M_1 は境界つきコンパクト 4 次元多様体であり, M_1 の内部は $M(\mathcal{A})$ に微分同相である ([Dur83]).

続いて, M_1 から \mathcal{A} の各部屋の近傍を抜き去る. $C \in \text{ch}(\mathcal{A})$ に対し, \tilde{C} を \mathbb{C}^2 における C の管状近傍とし, M_2 を次で定義する:

$$M_2 = \left(M_1 \setminus \bigcup_{C \in \text{ch}(\mathcal{A})} \tilde{C} \right) \cup \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \|\mathbf{y}\|_\infty \leq R\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_C.$$

M_2 と M_1 は微分同相ではないことに注意する. M_2 と M_1 の関係について以下が成り立つ.

補題 3.2. 多様体 M_1 は M_2 に 2-ハンドルを $\#\text{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着して得られる. このとき接着する 2-ハンドルは $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ なる部屋の管状近傍 \tilde{C} そのものである.

Proof. まず M_2 の定義から, 各部屋 $C \in \text{ch}(\mathcal{A})$ に対して $\tilde{C} \approx D^4$ を M_2 に接着して M_1 は得られるので, この接着のされ方を見れば良い.

部屋 C が $C \cap F \neq \emptyset$ をみたす場合は, 接着する領域は D^3 と同相になる (図 7). 従って \tilde{C} の M_1 への接着は D^4 との境界連結和になり, 接着して得られる多様体は微分同相である. 一方, $C \cap F = \emptyset$ すなわち

$C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ の場合は、接着する領域が $\partial D^2 \times D^2$ となる。従って \tilde{C} の M_1 への接着は 2-ハンドルの接着となる。 \square

以後 $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-ハンドルを $h^2(C)$ と表す。

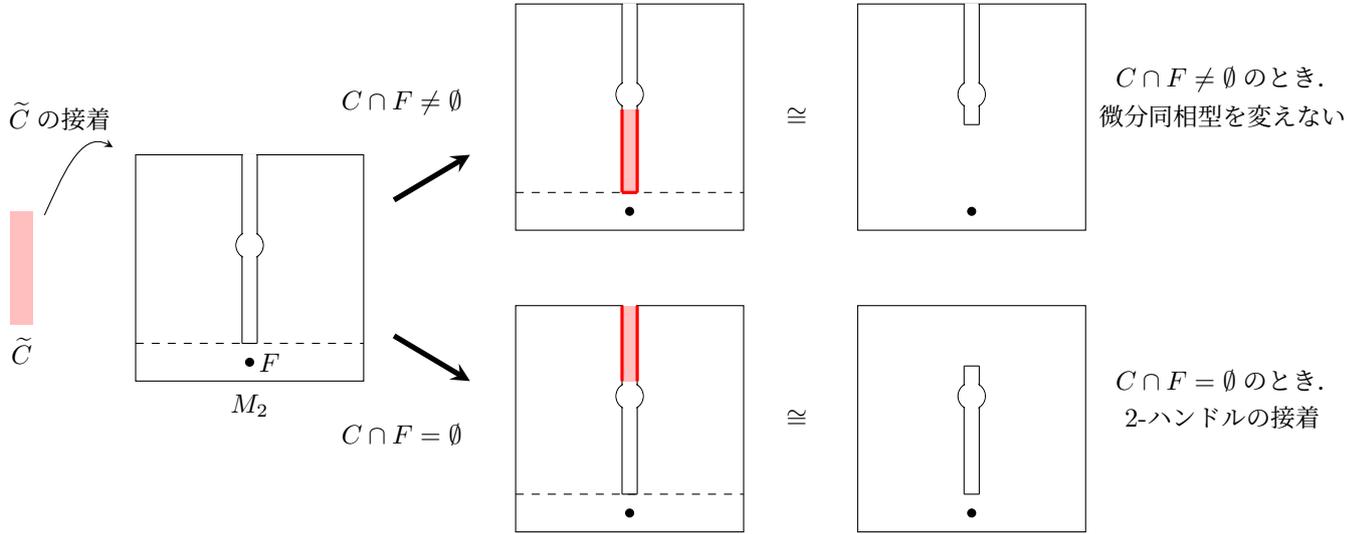


図 7 接着の様子 (次元を落としているため 2 次元の 1-ハンドルに見えるが実際は 4 次元 2-ハンドルの接着.)

次に $\rho : [1, R_0] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ を $\rho(h) = \frac{h-1}{R_0-1}$ なる一次関数と定め、 M_3 を

$$M_3 = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_2 \left| \begin{array}{l} x_2 \geq 1 \text{ ならば} \\ x_2 \leq x_1 + R, x_2 \leq -x_1 + R, \\ \text{かつ } \rho(x_2) \leq \|\mathbf{y}\|_\infty \leq 1 \end{array} \right. \right\}$$

と定義する。 M_3 は M_2 の境界付近を縮めて得られるため、 M_2 と微分同相である。 また M_3 においては $h^2(C)$ の接着領域は次のように書ける：

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in C \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}, \mathbf{y} = \rho(x_2)\} \approx S^1 \times D^2.$$

従って $h^2(C)$ の接着円は、 $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in C$ を一つ任意に取り、

$$\{(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = \rho(x_2)\} \approx S^1$$

と書くことができる。 続いて M_4 を

$$M_4 := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, \|\mathbf{y}\|_\infty \leq \delta(\mathbf{x})\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_C.$$

と定義する。

定義より、 $M_4 \subset M_3$ であるが、 M_3 から M_4 へは以下のような変位レトラクト σ を構成することができる。

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} \left(\left(x_1 - \frac{y_1}{y_2}(x_2 - 1 + \|\mathbf{y}\|_\infty), 1 - \|\mathbf{y}\|_\infty \right), \mathbf{y} \right) & (x_2 \geq 1 - \|\mathbf{y}\|_\infty \text{ かつ } |y_1| \leq |y_2|) \\ \left(\left(x_1 - \frac{y_2}{y_1}(x_2 - 1 + \|\mathbf{y}\|_\infty), 1 - \|\mathbf{y}\|_\infty \right), \mathbf{y} \right) & (x_2 \geq 1 - \|\mathbf{y}\|_\infty \text{ かつ } |y_1| \geq |y_2|) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (x_2 \leq 1 - \|\mathbf{y}\|_\infty) \end{cases}$$

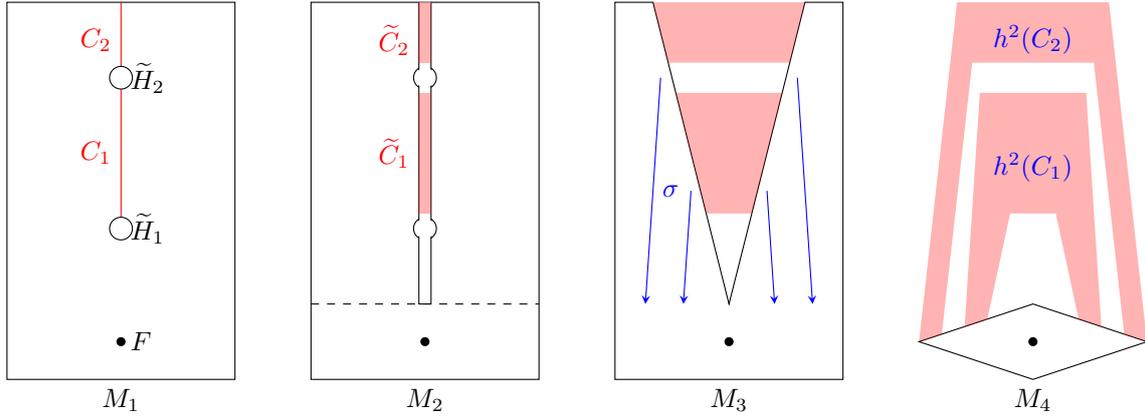


図8 M_1 から M_4 までの様子

写像 σ が変位レトラクトであることは、 $\sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (1-t) \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t \cdot \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とすると $0 \leq t \leq 1$ に対して $\sigma_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M_3$ であり、 $\sigma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $\sigma_0 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ であることから従う。また、 $M_3 \setminus M_4$ の点 \mathbf{p} が σ により写される部分 $\{x_2 = 1 - \|\mathbf{y}\|_\infty\}$ の各点の逆像は M_3 にふくまれる閉区間と同相であることから、 M_3 と M_4 が微分同相であることが従う。

補題 3.3. M_4 は直線の本数 n と同じだけ 1-ハンドルを持つ 1-ハンドル体と微分同相であり、 M_1 はこれに 2-ハンドルを $\#\text{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着して得られる 4 次元多様体に微分同相である。

Proof. 定義より、 M_4 は

$$D^4(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2, \|\mathbf{y}\|_\infty \leq \delta(\mathbf{x})\} (\approx D^4)$$

から \tilde{H}_C を除いて得られるコンパクト 4 次元多様体である。 \mathcal{A} に属する直線の交点の座標についての仮定 (i) から、 $D^4(R, 1)$ 上ではどの直線も交わることない。また、 \tilde{H}_C は (複素) 直線 H_C の管状近傍であるから、 D^4 上に制限すると D^4 に proper に埋め込まれた D^2 の管状近傍 $D^2 \times D^2$ とみなせる。従って $D^4(R, 1)$ から \tilde{H}_C を取り除くことは D^4 に 1-ハンドルを接着することと同じである。従って M_4 は D^4 に 1-ハンドルが n 個接着した 1-ハンドル体と微分同相である。また、 $M_2 \cong M_3 \cong M_4$ (微分同相) であり、 M_1 は M_2 に 2-ハンドルを $\#\text{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着して得られる 4 次元多様体に微分同相であったから、補題が従う。 \square

M_4 が 1-ハンドル体であることから、ハンドル分解を表す Kirby 図式は S^3 上の n 個の点付き円として表すことができる。1-ハンドルが proper に埋め込まれた D^2 の管状近傍を引き抜いて得られる場合は、点付き円は引き去る D^2 の境界である (S^3 上の) S^1 に対応する。これが今回の場合、 $\text{Rect}(R, 1)$ 上のディバイドから得られる絡み目とみなすことができることをみる。 $H \in \mathcal{A}$ に対し、 $\bar{H} := H \cap \text{Rect}(R, 1)$ とする。

補題 3.4. \bar{H} を $\text{Rect}(R, 1)$ 上のディバイドとみなす。このとき 1-ハンドル体 M_4 の点付き円は \bar{H} から得られる $S^3(R, 1)$ 上のディバイド絡み目とみなせる。

Proof. まず \bar{H} は $\text{Rect}(R, 1)$ 内に proper に埋め込まれた閉区間であるから、ディバイドの成分とみなせる。接ベクトルの対応によると、 H_C は

$$H_C = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in T\mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \in H, \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}H\}$$

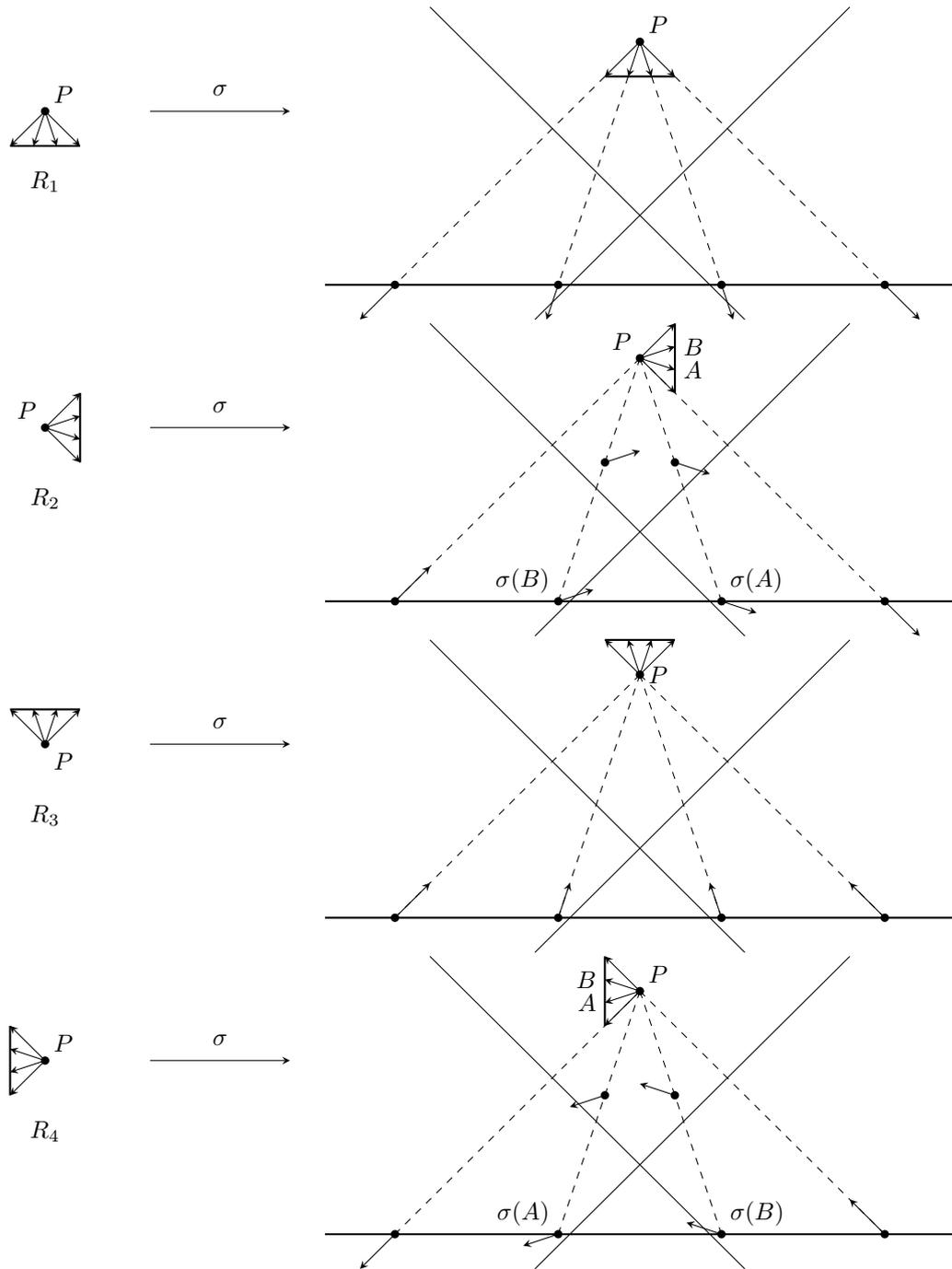


図9 σ の様子

と表せていた (補題 3.1). これと $\partial D^4(R, 1) = S^3(R, 1)$ の交叉が 1-ハンドルの点付き円となるが, それは

$$H_C \cap S^3(R, 1) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D^4(R, 1) \mid \mathbf{x} \in H \cap \text{Rect}(R, 1), \mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}H, \|\mathbf{y}\|_{\infty} = \delta(\mathbf{x})\}$$

となる. 定義からこれは \overline{H} から得られるディバイド絡み目である.

□

\overline{H} から得られるディバイド絡み目が 1-ハンドルの点付き円とわかるように, 対応するディバイドの成分にも点をつけておく.

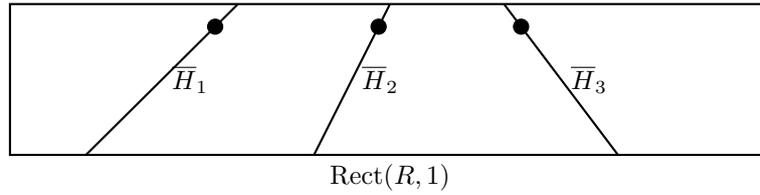


図 10 1-ハンドル体を表すディバイド

M_1 のハンドル分解を得るためには, 残りは 2-ハンドルの接着写像がわかれば良い. 各 2-ハンドルは $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ の管状近傍 \tilde{C} であったから, \tilde{C} が M_3 に接着している部分が σ により M_4 にどのように貼り付いているかをみる. $h^2(C)$ の接着円が M_3 上では, $p \in C$ を一つ固定することで,

$$\{(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = \rho(x_2)\}$$

で書けていたことを思い出すと, M_4 上での 2-ハンドルの接着円は

$$\{\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = \rho(x_2)\}$$

と表せる. これは, $S^3(R, 1)$ 内の絡み目となり, \mathbf{p} を十分近い $\mathbf{p}' \in C$ へ少し動かしても $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ と $\sigma(\mathbf{p}', \mathbf{y})$ は絡まないことがわかるため ([SY21] の prop. 2.3 を参照), フレーミング係数は 0 となる.

以上により M_1 の (従って $M(\mathcal{A})$ の) ハンドル分解を得ることができた.

4 カスパ付きディバイドを用いた Kirby 図式

本章では, 主結果であるカスパ付きディバイドを用いた $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式の記述について紹介する. まずは (厳密ではないが) 主結果を述べておく.

定理 4.1. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は " \mathcal{A} の実構造の組み合わせ構造を用いて得られる " $\text{Rect}(R, 1)$ 上のカスパ付きディバイドから得られる絡み目として記述できる.

Kirby 図式を記述するために, 1-ハンドルに対応する点付き円, 2-ハンドルに対応する絡み目を準備する必要がある. まず 1-ハンドルについては, 前節でも述べたように, \overline{H} が対応するカスパ付きディバイドの成分である. 2-ハンドルについては, $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ との対応があったので, $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に応じて $\text{Rect}(R, 1)$ 内のカスパ付きの曲線を定めれば良い.

定義 4.2. $C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$, $H_i \in \mathcal{A}$ に対して, 符号 $\delta_i(C)$ を以下で定める.

$$\delta_i(C) = \begin{cases} +1, & \text{if } \alpha_i(C) > 0, \\ -1, & \text{if } \alpha_i(C) < 0. \end{cases}$$

$C \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する $\text{Rect}(R, 1)$ 上のカスプ付きの曲線 $\gamma(C)$ を以下のようにして定める.

- (i) \overline{H}_1 の左側では, $\delta_1(C) = +1$ ならば左向きカスプを書き, $\delta_1(C) = -1$ ならば滑らかな曲線を図 7 のように書く.
- (ii) $(\delta_i, \delta_{i+1}) = (+1, -1), (-1, 1)$, $\delta_i = \delta_{i+1}$ のときはそれぞれ図 8 のように \overline{H}_i と \overline{H}_{i+1} の間に曲線を書く.
- (iii) \overline{H}_n の右側では, $\delta_n(C) = -1$ ならば右向きカスプを書き, $\delta_n(C) = +1$ ならば滑らかな曲線を図 9 のように書く.

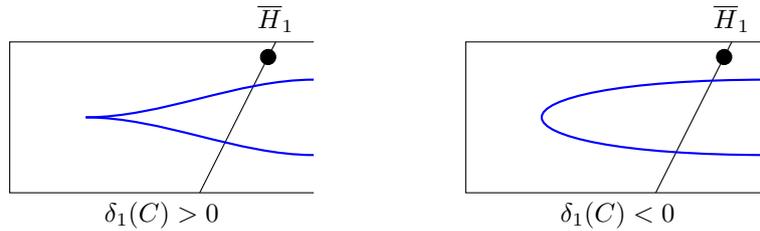


図 11 \overline{H}_1 の左側

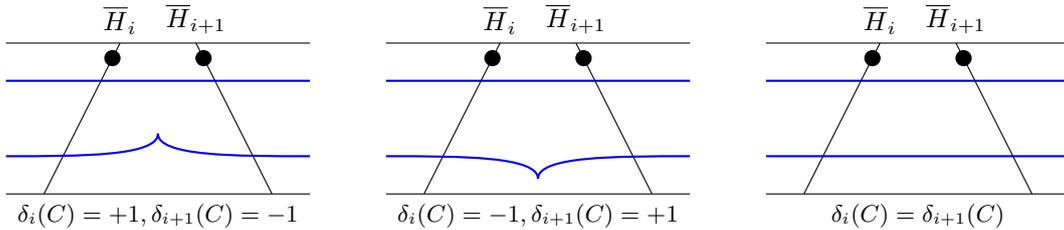


図 12 \overline{H}_n と \overline{H}_{n+1} の間

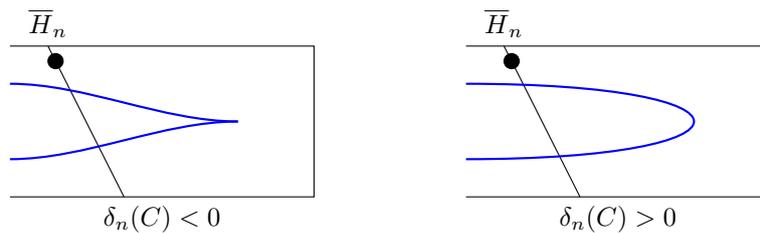


図 13 \overline{H}_n の右側

また $\text{ch}_F(\mathcal{A}) = \{C_1, \dots, C_b\}$ が複数個の元からなる場合については, 各 C_s 上から一点 $P_s = (k_s, h_s)$ を $1 < h_1 < \dots < h_b < R_0$ となるようにとる. このとき, h_s の値が大きい順に, $\text{Rect}(R, 1)$ では, $\gamma(C_s)$ を x_2 の座標が小さい順に構成する.

注意 4.3. 順番は一意に定まらないこともある. その場合カスプ付きディバイドとしては異なったものが得られるが, ディバイド絡み目については注意 3.5 の変形により移り合うことができ, 同じ絡み目が得られることがわかる.

主定理の正確な主張を述べる.

定理 4.4. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は $\text{Rect}(R, 1)$ 上のカスプ付きディバイド $\{\overline{H}_1, \dots, \overline{H}_n, \gamma(C_1), \dots, \gamma(C_b)\}$ から得られる絡み目として記述できる. ここに \overline{H}_i から得られる結び目は 1-ハンドルの接着を表す点付き円を, $\gamma(C_s)$ から得られる結び目は 2-ハンドルの接着円を表す. また 2-ハンドルのフレーミング係数は全て 0 である.

証明については述べないが, $C_s \in \text{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-ハンドルの接着円と $\gamma(C_s)$ がイソトピックになることを示せば十分である. 詳細は [SY21] の 5.2 節を参照.

例 4.5. $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ を generic に交わる直線配置とすると $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を表すカスプ付きディバイドは図 14 のようになる.

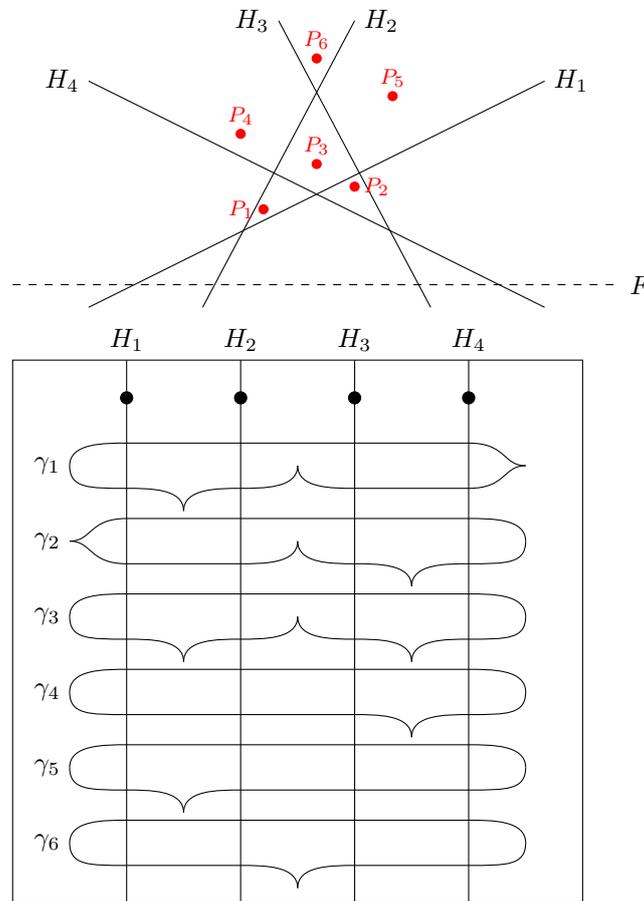


図 14

参考文献

- [AC99] N. A'Campo, Real deformations and complex topology of plane curve singularities, Ann. Fac. Sci. Toulouse 8 (1999) 5-23.

- [AC98] N. A'Campo, Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 88 (1998), 151-169 .
- [CP00] O. Couture, B. Perron, Representative braids for links associated to plane immersed curves. *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2000), no. 1, 1-30.
- [DP03] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements. *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, 473–507.
- [Dur83] A. H. Durfee, Neighborhoods of algebraic sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **276** (1983), no. 2, 517-530.
- [F93] M. Falk, Homotopy types of line arrangements. *Invent. Math.* **111** (1993), no. 1, 139–150.
- [GS99] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus. Graduate Studies in Mathematics, 20. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1999. xvi+558 pp.
- [Ha83] H. A. Hamm, Lefschetz theorems for singular varieties. *Proc. Symp. Pure Math.* **40** (1983), 547–557.
- [HL73] H. A. Hamm, D. T. Lê, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **6** (1973), 317–355.
- [OS92] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, *Grundlehren Math. Wiss.* **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [OT92] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. *Grundlehren Math. Wiss.* **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [R02] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers and minimality of hyperplane arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 9, 2737–2743.
- [SS07] M. Salvetti, S. Settepanella, Combinatorial Morse theory and minimality of hyperplane arrangements. *Geom. Topol.* **11** (2007), 1733–1766.
- [SY21] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, arXiv:2103.15262, to appear in *Topology and its applications*.
- [Y07] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem. *Kodai Math. J.* **30** (2007) no. 2, 157–194.
- [Z75] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **154** 1975.