

曲面絡み目の plat 表示を用いた結び目群の計算

安田 順平 (大阪大学大学院理学研究科)

概要

絡み目の plat 表示はブレイドを用いた絡み目の表示の方法であり、これはブレイド状曲面を用いることによって曲面絡み目へ拡張できる。本講演では plat 表示による曲面絡み目の結び目群を計算する方法として、曲面絡み目の結び目群をブレイド状曲面の結び目群の表示から得る方法を紹介する。また結び目カンドルについても議論する。

1 導入

結び目理論においてブレイドを用いた絡み目の表示は次の 2 つが知られている。1 つはブレイドの閉包 (図 1) であり、もう 1 つはブレイドの plat 閉包 (図 2) である。

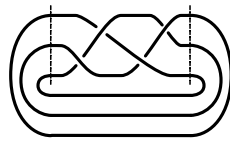


図 1 ブレイドの閉包

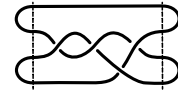


図 2 ブレイドの plat 閉包

曲面絡み目とは 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ へ埋め込まれた閉曲面である。向き付け可能な全ての曲面絡み目は 2 次元ブレイドと呼ばれるコンパクト曲面の閉包によって表示できることが知られている ([6])。これは (1 次元) 絡み目におけるブレイドの閉包の類似である。

昨年の講演において、適切なブレイド状曲面の **plat 閉包**と曲面絡み目の **plat 表示**を導入し、全ての曲面絡み目が plat 表示を持つことを紹介した。これは (1 次元) 絡み目におけるブレイドの plat 表示の類似である。

結び目群とは曲面絡み目 F の補空間の基本群であり、結び目対称カンドルとは結び目群を拡張して得られる曲面絡み目の不変量である。本稿の目的はこれらの不変量を曲面絡み目の plat 表示を用いて計算することであり、主定理は次の通りである。

定理 5.2. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して、plat 閉包 $\tilde{S}$ の結び目群 $G(\tilde{S})$ は次の群表示を持つ：

$$G(\tilde{S}) = \langle x_1, \dots, x_{2m} \mid r_1, \dots, r_n, x_{2i-1} = x_{2i}^{-1} (i = 1, \dots, m) \rangle.$$

ここで関係子 $r_1, \dots, r_n$ はブレイド状曲面の補空間の基本群 $\pi_1(D^4 \setminus S)$ のある群表示から得られる関係子である。

定理 5.3. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して、plat 閉包 $\tilde{S}$ の結び目対称カンドル $X(\tilde{S})$ は次の対称カンドル表示を持つ：

$$X(\tilde{S}) = \langle x_1, \dots, x_{2m} \mid r_1, \dots, r_n, x_{2i-1} = \rho(x_{2i}) (i = 1, \dots, m) \rangle_{\text{sq}}.$$

ここで $r_1, \dots, r_n$ は定理 5.2 と同様にして得られる関係子である.

本稿では PL カテゴリーまたは滑らかなカテゴリーで議論を行う. これにより曲面絡み目は局所平坦な PL 写像又は C^∞ 級写像によって $\mathbb{R}^4$ へ埋め込まれている.

2 ブレイドと絡み目の plat 表示

本稿において n, m は正整数, $I = [0, 1]$ は閉区間, $D = I^2$ は 2 次元円板又は正方形とし, 自然な埋め込みによって $I \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ とする. 2 次元円板 D の n 点集合 $Q_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ を $q_k = (1/2, k/n + 1) \in D$ によって定める. 写像 $p: D \times I \rightarrow I$ を第 2 成分の射影とする.

円筒 $D \times I$ 内の 1 次元多様体 β が次数 n の幾何ブレイド (geometric braid) であるとは次を満たすことをいう:

- (1) 制限写像 $p|_\beta: \beta \rightarrow I$ は n 次の被覆写像である.
- (2) 境界 $\partial\beta$ は $Q_n \times \{0, 1\}$ と一致する.

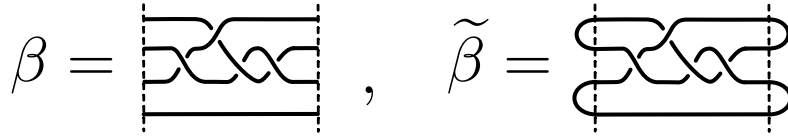


図 3 次数 4 のブレイドによる八の字結び目の plat 表示

円筒 $D \times I$ 内の **wicket** とは, $D \times I$ 内の半円周 (semicircle) であり, 半円周の境界は $\text{Int}D \times \{0\}$ で垂直に交わっているものである ([2]). $D \times I$ 内の m -**wicket system** とは, 互いに交わらない m 本の wicket の和集合である. 構成より m -wicket system w の境界は $D \times \{0\}$ 内の $2m$ 点集合となる. また w の端点集合は, 各 wicket の端点に対応する m 組の分割が与えられる. そこで $|\partial w|$ によって w の境界成分である D 上の $2m$ 点を表し, ∂w によって分割も込めた境界成分を表すことにする. すると wicket の定義より, 2 つの m -wicket system w, w' の境界 $\partial w, \partial w'$ が等しいとき, w と w' は等しいことが分かる:

$$\partial w = \partial w' \implies w = w'.$$

特に $\partial w_m = \{\{q_1, q_2\}, \dots, \{q_{2m-1}, q_{2m}\}\}$ となる m -wicket system w_m を標準的な (standard) m -wicket system と呼ぶ.

$D \times I$ は $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 内にあるとする. 次数 $2m$ のブレイド β に対して, 2 つの標準的 m -wicket system を図 3 の右図のように β へ貼り合わせることによって $\mathbb{R}^3$ 内の絡み目 $\tilde{\beta}$ を定める. この絡み目を β の **plat 閉包** という.

絡み目 L があるブレイドの plat 閉包と一致するとき, L は **plat form** であるという. 全同位変形によって全ての絡み目はある plat form な絡み目と同値であることが分かる. L と同値な plat form を絡み目 L の **plat 表示** と呼ぶ.

以下の $m + 1$ 個のブレイドによって生成されるブレイド群 B_{2m} の部分群 K_{2m} を **Hilden の部分群** という ([3], cf. [1]) :

$$K_{2m} = \langle \sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i+1}^{-1}\sigma_{2i}^{-1} \ (i = 1, 2, \dots, m-1) \rangle.$$

円筒 $D \times I$ 内の m -wicket system 全体のなす配置空間を $\mathcal{W}_m$ とする. $\mathcal{W}_m$ は弧状連結であることが知られている.

命題 2.1 (Brendle-Hatcher [2]). 配置空間 $\mathcal{W}_m$ の基本群は Hilden 部分群と同型である :

$$\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m) \simeq K_{2m}.$$

この $\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ から K_{2m} への群同型写像は次のようにして与えられる ([2]). 写像 $f : (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ を $\mathcal{W}_m$ 内の閉曲線とする. この f に対して次数 $2m$ の幾何ブレイド β_f を次のように定める :

$$\beta_f = \{|\partial f(t)| \times \{t\} \subset D \times I \mid t \in I\}.$$

各々の同値類を取ることで $[f] \in \pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ から $[\beta_f] \in B_{2m}$ への写像が得られ, この写像が well-defined かつ命題 2.1 の同型を与えることが分かる.

定義 2.2. 幾何ブレイド β が**適切 (adequate)** であるとは, ある閉曲線 $f : (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ が存在して $\beta = \beta_f$ を満たすことをいう.

Hilden 部分群は適切な幾何ブレイド (の同値類) によって生成されることに注意する. また連続写像 $\rho : (\mathcal{W}_m, w_m) \rightarrow (\text{Conf}_{2m}(D), Q_{2m})$ を $\rho(w) = |\partial w|$ として定めるとき, 上の対応は $[f] \in \pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ に $[\rho \circ f] \in \pi_1(\text{Conf}_{2m}(D), Q_{2m}) = B_{2m}$ を対応させていることに他ならない.

3 曲面絡み目とブレイド状曲面

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ へ埋め込まれた閉曲面を**曲面結び目 (surface-knot)** といい, いくつかの互いに交わらない曲面結び目の和集合を**曲面絡み目 (surface-link)** という. 特に 2 次元球面 S^2 と同相な曲面結び目を **2 次元結び目 (2-knot)** という. 2 つの曲面絡み目 F と F' が $\mathbb{R}^4$ の全同位 (ambient isotopy) で移りあうとき, F と F' は**同値である** といい, $F \simeq F'$ と記す.

D_1 と D_2 を正方形 I^2 , 写像 $\text{pr}_i : D_1 \times D_2 \rightarrow D_i$ ($i = 1, 2$) を第 i 成分への射影とする. また D_2 の基点 y_0 を ∂D_2 上に取り固定する.

次数 n の (点付き) **ブレイド状曲面 ((pointed) braided surface)** とは次の 3 つを満たす $D_1 \times D_2$ に埋め込まれた向き付けられた曲面 S である ([14]):

- (1) 制限写像 $\pi_S = \text{pr}_2|_S : S \rightarrow D_2$ は次数 n の単純分岐被覆写像である.
- (2) 境界 ∂S は $D_1 \times \partial D_2$ 内の閉ブレイドである.
- (3) 基点 y_0 の π_S による逆像 $\text{pr}_1(\pi_S^{-1}(y_0))$ は Q_n と一致する.

ここで n 次の分岐被覆写像が**単純**であるとは、各分岐値の逆像が $n - 1$ 点からなるときを言う。

2次元ブレイド (2-dimensional braid) とはブレイド状曲面 S であって境界 ∂S が自明な閉ブレイドとなるものである。即ち、各 $y \in \partial D_2$ について $\text{pr}_1(\pi_S^{-1}(y)) = Q_n$ が成り立つ。分岐被覆写像 π_S の次数をブレイド状曲面 S の**次数**といい、 $\deg S$ と記す。

2つのブレイド状曲面が**同値**であるとは、 $D_1 \times D_2$ のファイバーを保つ同位 (isotopy) $\{h_t\}_{t \in I}$ によって移り合うことを言う。ここで連続写像 h_t がファイバーを保つとは、 $D_1 \times D_2$ を D_2 上の自明な D^2 束と見なしたときに h_t が $D_1 \times D_2$ のファイバー構造を保つことを意味している。ブレイド状曲面が**自明**であるとは、2次元ブレイド $Q_n \times D_2$ に同値であることをいう。

補題 3.1 ([8], Lemma 16.9). ブレイド状曲面 S が自明である必要十分条件は分岐被覆写像 π_S が分岐点を持たないことである。

主定理を述べるために、ブレイド状曲面のチャート表示を導入する。

2次元円板 D_2 上の有限有向グラフ Γ が次数 n の**チャート (chart)** であるとは次を満たすことをいう ([5, 8]) :

- (1) Γ の各頂点の次数は 1, 4, 6 のいずれかである。
- (2) 共通部分 $\partial D_2 \cap \Gamma$ は 1 価頂点のみであり Γ は基点 y_0 を含まない。
- (3) 各辺には $1, 2, \dots, n - 1$ のいずれかを値に持つラベルが付与されている。
- (4) 各 4 価頂点の近傍において、辺のラベルと向きは図 5 のようになっている。ここで i と j は辺に付与されたラベルであって $|i - j| > 1$ を満たす。
- (5) 各 6 価頂点の近傍において、辺のラベルと向きは図 6 のようになっている。ここで i と j は辺に付与されたラベルであって $|i - j| = 1$ を満たす。

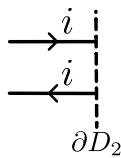
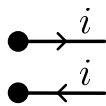


図 4 チャートの黒頂点と境界点

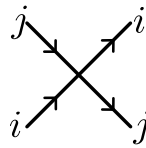


図 5 チャートの交点

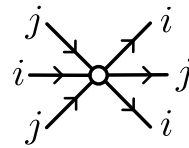


図 6 チャートの白頂点

ここで有向グラフ Γ は多重辺やループを含むことに注意する。チャートにおいて、4 価頂点を**交点 (crossing)**, 6 価頂点を**白頂点 (white vertex)**, D_2 の内部にある 1 価頂点を**黒頂点 (black vertex)**, そして ∂D_2 上の 1 価頂点を**端点 (boundary vertex)** と呼ぶ。チャートの各 1 価頂点 v に対して、 v のラベルを隣接する辺のラベルの値として定める。図 4 の左上のように隣接する辺の向きが黒頂点を始点とするとき、その黒頂点の符号は**正 (positive)** であるといい、終点となる向きのときその黒頂点の符号は**負 (negative)** であるという。

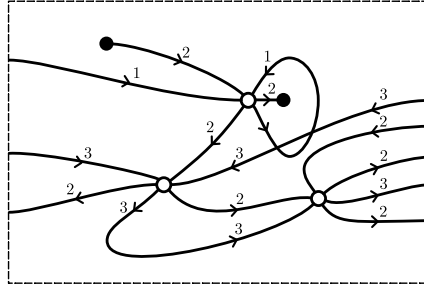


図7 D_2 上のチャートの例

次にチャートからブレイド状曲面を構成する方法を与える． $I_1 = I_2 = [0, 1]$, $D_2 = I_1 \times I_2$ とする．最初に， D_2 の同位変形によって Γ の端点は $I \times \{0, 1\}$ 上へ移動する．そして射影 $p : I_1 \times I_2 \rightarrow I_2$ の制限写像 $p|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow I_2$ に対して， Γ の頂点を除いて $p|_{\Gamma}$ の臨界点が非退化であるように同位変形を行う．このとき Γ の端点を除いた頂点及び臨界点は $I_1 \times \{t_i\}$ 上にあるとしてよい ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < 1$). $t \in I_2 \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$ のとき， $I_1 \times \{t\}$ は Γ の有限個の辺と横断的に交わっている．そこで各辺の交わりを (I_1 について) 上から順に読んでいき，辺の向きとラベル i に対してブレイドの生成元 $\sigma_i^{\pm 1}$ を対応させることにより， $\Gamma \cap I_1 \times \{t\}$ から次数 n のブレイド β_t を構成することができる (図8)．また $t = t_i$ ($i = 1, \dots, r$) のときは，図9のようなブレイドの変形に対応させる．黒頂点に対応して現れるブレイド内の交点は，構成しているブレイド状曲面の分岐点である．

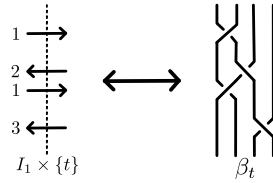


図8 $\Gamma \cap I_1 \times \{t\}$ とブレイド β_t の対応付け

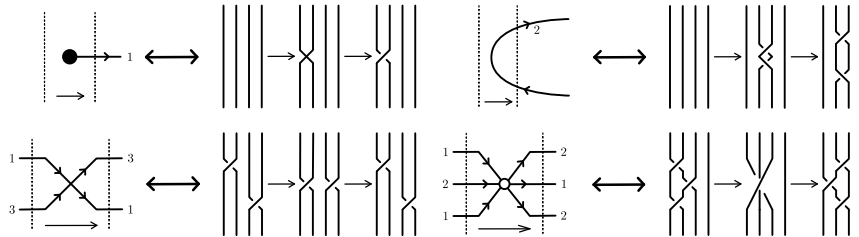


図9 チャートの頂点とブレイドの関係子の対応付け

以上によりチャート Γ からブレイドのモーションピクチャー $\{\beta_t\}_{t \in I_2}$ が構成され，このモーションピクチャーが与えるコンパクト曲面はブレイド状曲面となる．逆にブレイド状曲面が与えられたとき，ブレイド状曲面のモーションピクチャーから今の構成を辿ることにより，チャートを構成す

ることができる．よってブレイド状曲面はチャートを用いて表示することが可能となる．これをブレイド状曲面の**チャート表示**という．

次に，チャートの同値変形を導入する．2つの次数 n のチャート Γ, Γ' に対して， $\Gamma \setminus E = \Gamma' \setminus E$ かつ次の (C1) から (C4) のいずれかを満たすような D_2 上の円板 E が存在するとき， Γ と Γ' は**チャート変形 (C-move)** で移りあうという ([5, 12])：

(C1) $\Gamma \cap E$ と $\Gamma' \cap E$ は black vertex を含まない．

(C2) E 内の Γ と Γ' は図 10 のようになっている^{*1}．ここで $|i - j| > 1$ を満たす．

(C3) E 内の Γ と Γ' は図 11 のようになっている．ここで $|i - j| = 1$ を満たす．

(C4) E は D_2 の (y_0 を避けた) 境界を連結に含んでおり， E 内の Γ と Γ' は図 12 のようになっている．

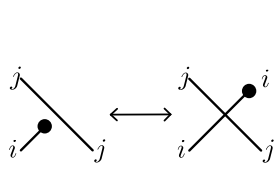


図 10 チャートの C2 変形

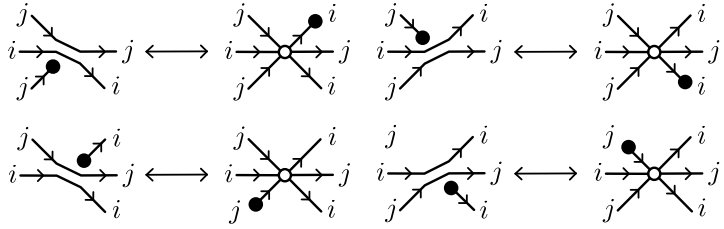


図 11 チャートの C3 変形

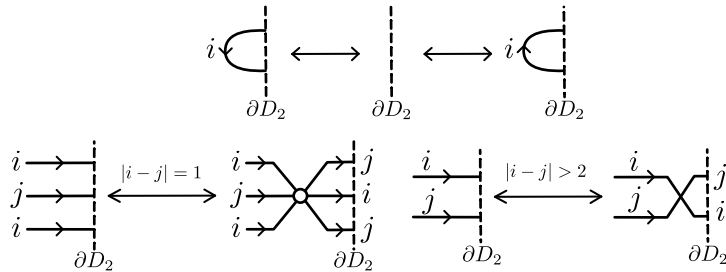


図 12 チャートの C4 変形

命題 3.2 ([9], cf. [12]). 2つのブレイド状曲面が同値である必要十分条件は，対応するチャート表示が (有限回の) チャート変形 C1 ~ C4 と y_0 を固定した D_2 の同位変形によって移りあうことである．

命題 3.3 ([5]). 2つの 2 次元ブレイドが同値である必要十分条件は，対応するチャート表示が (有限回の) チャート変形 C1 ~ C3 と D_2 の同位変形によって移りあうことである．

^{*1} 辺の向きに依らず定義しているため，辺の向きを省略している．

4 曲面絡み目の plat 表示

この章では曲面絡み目の plat 表示を導入する. D_1, D_2 は共に I^2 であるため, $I \subset \mathbb{R}$ によって $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ そして $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^4$ とする. 境界 ∂D_2 の $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Int } D_2$ 内における正則近傍を N とする. また N はアニュラス $I \times S^1$ と同相であるため, $\partial N = \{0\} \times S^1$ を満たすような自然な同一視 $N = I \times S^1$ を行う.

定義 4.1. 配置空間 $\mathcal{W}_m$ 内のループ $f: (I, \partial I) \rightarrow (\mathcal{W}_m, w_m)$ に対して, $D_1 \times N$ 内の曲面 A_f を

$$A_f = \bigcup_{t \in I} f(t) \times \{p(t)\} \subset D \times I \times S^1 = D_1 \times N,$$

によって定める. ここで $p: I \rightarrow S^1 = I/\partial I$ は商写像である. このようにして得られる曲面 A_f を **wicket 型**の曲面と呼ぶ.

m -wicket system は境界成分とその分割から一意的に復元できていた. よって wicket 型の曲面 A_f も境界 $\partial A_f = \bigcup_{t \in S^1} \partial[f(t)] \times \{t\}$ から一意的に定まる. また上の同一視によって $\partial D_2 = \{0\} \times S^1$ であったことに注意する.

次数 n のブレイド状曲面 S に対して次数 n のブレイド β_S を以下で定める:

$$\beta_S = \bigcup_{t \in I} \text{pr}_1(\pi_S^{-1}(t)) \times \{t\}.$$

定義 4.2. 幾何ブレイド β_S が適切なブレイドであるとき, S は**適切 (adequate)** であるという.

適切なブレイド状曲面は, 次数が偶数であることに注意する. 命題 2.1 の証明より適切なブレイドは wicket system のループと対応していた. そこで次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して, 適切なブレイド β_S に対応する m -wicket system のループを f_S と記す.

すると $f = f_S$ のとき, S と A_f の境界は一致する. この A_f を A_S と記す. それ故に, 次に定める適切なブレイド状曲面の plat 閉包は well-defined に定まる.

定義 4.3. 適切なブレイド状曲面 S の **plat 閉包 (plat closure)** $\widetilde{S}$ を $\mathbb{R}^4$ 内の S と A_S の和集合として定める:

$$\widetilde{S} = S \cup A_S.$$

定義 4.4. 曲面絡み目 F がある適切なブレイド状曲面の plat 閉包であるとき, F を **plat form** という. さらに S が 2 次元ブレイドのとき, F を **genuine plat form** という.

定理 4.5. 全ての曲面絡み目は plat 表示を持つ.

定理 4.6. 全ての向き付け可能な曲面絡み目は genuine plat 表示を持つ.

5 plat 表示による曲面絡み目の結び目群の表示

曲面絡み目の plat 表示を用いて曲面絡み目の結び目群の表示を計算する．そのために、ブレイド状曲面の結び目群の表示について復習する．詳細に関しては [8] を参照されたい．

曲面絡み目 F の結び目群を $G(F) = \pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ と記す．次数 n のブレイド状曲面 S に対して S の結び目群 $G(S)$ を $\pi_1(D_1 \times D_2 \setminus S)$ によって定める．

ブレイド群 B_n は (D_1, Q_n) の写像類群 $\mathcal{M}(D_1, Q_n)$ と同型であるから、ブレイドは空間対 (D_1, Q_n) の同相写像 (のホモトピー類) と見做すことが出来るため、ブレイド β は基本群 $\pi_1(D_1, Q_n) = F_n$ の同型写像を誘導する．この同型写像を **Artin の自己同型写像** といい、 $\text{Artin}(\beta) : F_n \rightarrow F_n$ と記す．ここで $\pi_1(D_1, Q_n) = F_n$ は n 次の自由群である．

次数 n のブレイド状曲面のチャート表示 Γ を取り、 Γ の黒頂点全体からなる D_2 内の有限集合を $\Sigma = \{y_1, \dots, y_l\}$ とする．各黒頂点 y_i について y_i のラベルを k_i 、符号を ε_i と記す．

始点を y_i 、終点を D_2 の基点 y_0 とする単純曲線 $a_i : I \rightarrow D_2$ ($i = 1, \dots, n$) が次を満たすとき、その組 $(a_1, \dots, a_l)$ を Σ を始点集合とする D_2 上の **Hurwitz arc system** という：

- (1) a_i の像 $\text{Im } a_i$ は、 $\text{Im } a_i \cap \partial D_2 = \{a_i(1)\}$ かつ $\text{Im } a_i \cap \text{Im } a_j = \{y_0\}$ ($i \neq j$) を満たす．
- (2) y_0 の近傍において $a_1, \dots, a_n$ の像は $a_1, \dots, a_n$ の順に並んでいる．

そして y_0 を始点に a_i に沿って時計回りに一周して得られる $D_2 \setminus \Sigma$ 上の単純閉曲線を γ_i とする．このとき各 $t \in I$ に対して $\text{pr}_1(\pi_S^{-1}(\gamma_i(t)))$ は D_1 上の n 点集合であり、 $\text{pr}_1(\pi_S^{-1}(\gamma_i(0))) = \text{pr}_1(\pi_S^{-1}(\gamma_i(1))) = Q_n$ であるので、これによって γ_i は次数 n のブレイドを与える．特に γ_i は a_i に沿って時計回りに一周して得られる単純閉曲線より、得られるブレイドは $\sigma_{k_i}^{\varepsilon_i}$ の共役類 $\beta_i^{-1} \sigma_{k_i}^{\varepsilon_i} \beta_i$ である ($\beta_i \in B_n$)．以上によりブレイドの組 $(\beta_1^{-1} \sigma_{k_1}^{\varepsilon_1} \beta_1, \dots, \beta_l^{-1} \sigma_{k_l}^{\varepsilon_l} \beta_l)$ が得られる．このブレイドの組をブレイド状曲面の**ブレイドシステム (braid system)** という．

x_i を $D_1 \setminus Q_n$ 上の $q_i \in Q_n$ を中心とするメリディアンループとして取り、 $(D_1 \times D_2) \setminus S = D_1 \setminus Q_n$ によって $x_i \in G(S)$ と見做す ($i = 1, \dots, n$)．すると次が知られている．

命題 5.1 ([8]). 次数 n のブレイド状曲面 S のブレイドシステムを $(\beta_1^{-1} \sigma_{k_1} \beta_1, \dots, \beta_l^{-1} \sigma_{k_l} \beta_l)$ とする．このとき結び目群 $G(S)$ は次の群表示を持つ：

$$G(S) = \langle x_1, \dots, x_n \mid \text{Artin}(\beta_i)(x_{k_i}) = \text{Artin}(\beta_i)(x_{k_i+1}) \ (i = 1, \dots, l) \rangle.$$

関係子 $\text{Artin}(\beta_i)(x_{k_i}) = \text{Artin}(\beta_i)(x_{k_i+1})$ を単に r_i と記す．すると次の定理が得られる．

定理 5.2. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して、結び目群 $G(\widetilde{S})$ は次のような群表示をもつ：

$$G(\widetilde{S}) = \langle x_1, \dots, x_{2m} \mid r_1, \dots, r_l, x_{2i-1} = x_{2i}^{-1} \ (i = 1, \dots, m) \rangle.$$

定理 5.2 は、 $G(S)$ と $G(A_S) = \pi_1((\mathbb{R}^4 \setminus D_1 \times D_2) \setminus A_S)$ に関する Van Kampen の定理、または曲面絡み目の図式を用いて証明することが可能である．特に、曲面絡み目 $\widetilde{S}$ の図式上にメリディアン

ループの生成元を記述することによって定理 5.2 の証明は与えられるが、これは次に導入する結び目対称カンドルに対しても全く同様な議論が可能である ([7]).

5.1 カンドルと結び目対称カンドル

曲面絡み目の plat 表示を用いて、結び目対称カンドルの表示を計算する.

集合 X と二項演算 $*: X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ が**カンドル (quandle)** であるとは、次の 3 つを満たすことをいう ([13, 4]):

- (Q1) 任意の元 $x \in X$ に対して $x * x = x$ が成り立つ.
- (Q2) 任意の元 $x, y \in X$ に対して $(x * y) \bar{*} y = (x \bar{*} y) * y = y$ が成り立つ二項演算 $\bar{*}: X \times X \rightarrow X$ が存在する.
- (Q3) 任意の元 $x, y, z \in X$ に対して 右分配律 $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ が成り立つ.

カンドル $(X, *)$ の演算が明らかな場合には、単に X と記すことにする.

またカンドル X の対合写像 $\rho: X \rightarrow X$ に対して、組 (X, ρ) が**対称カンドル (symmetric quandle)** であるとは次を満たすことをいう ([10]):

- (SQ1) 任意の元 $x, y \in X$ に対して $\rho(x * y) = \rho(x) * y$ が成り立つ.
- (SQ2) 任意の元 $x, y \in X$ に対して $x * \rho(y) = x \bar{*} y$ が成り立つ.

対称カンドルの例として次に挙げる結び目対称カンドルがある. 曲面絡み目 F とその正則近傍 $N(F)$ に対して、 F の外部空間の基点 $q \in \mathbb{R}^4 \setminus N(F)$ を 1 つ取り固定する. そして集合 $X(F, q)$ を

$$X(F, q) = \{(D, \alpha) \mid D: F \text{ のメリディアン円板}, \alpha: \partial D \text{ から } q \text{ への単純曲線}\} / \text{homotopy}$$

として定める. また $X(F, q)$ の二項演算 $*$ を

$$[(D_1, \alpha_1)] * [(D_2, \alpha_2)] = [(D_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \partial D_2 \alpha_2)]$$

によって定めると、 $X(F, q) = (X(F, q), *)$ はカンドルの公理を満たす. $X(F, q)$ を曲面絡み目 F の **full knot quandle** という. full knot quandle $X(F, q)$ は基点 q の取り方に依らないため、簡単のために $X(F)$ と記すことにする.

さらに $X(F)$ の対合写像 $\rho: X(F) \rightarrow X(F)$ を $\rho([(D, \alpha)]) := [(-D, \alpha)]$ によって定義すれば、組 $(X(F), \rho)$ は対称カンドルの公理を満たす. この対称カンドル $(X(F), \rho)$ を曲面絡み目 F の**結び目対称カンドル (knot symmetric quandle)** と呼ぶ ([10]). これは曲面絡み目の結び目群を (対称) カンドルへ拡張した曲面絡み目の不変量である.

ここで n 次の**自由対称カンドル (free symmetric quandle) FSQ(n)** を、 D_1 内における Q_n の結び目対称カンドルとして定義する ([11]). すると自由群の場合と同様の議論によって、次数 n のブレイド β からカンドル自己同型写像 $\text{Artin}(\beta): \text{FSQ}(n) \rightarrow \text{FSQ}(n)$ が定まる. 自由対称カンドルの詳細や対称カンドル表示に関しては [11] を参照されたい.

このとき次の定理が得られる.

定理 5.3. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して, 結び目対称カンドル $(X(\widetilde{S}), \rho)$ は次のような対称カンドル表示をもつ:

$$X(\widetilde{S}) = \langle x_1, \dots, x_{2m} \mid r_1, \dots, r_k, x_{2i-1} = \rho(x_{2i}) \ (i = 1, \dots, m) \rangle_{\text{sq}}.$$

ここで関係子 r_i は $\text{Artin}(\beta_i)(x_{k_i}) = \text{Artin}(\beta_i)(x_{k_i+1})$ である.

参考文献

- [1] Joan S. Birman. On the stable equivalence of plat representations of knots and links. *Canadian J. Math.*, 28(2):264–290, 1976.
- [2] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.
- [3] Hugh M. Hilden. Generations for two subgroups of the braid group. *Pacific J. Math.*, 59(2), 1975.
- [4] D. Joyce. A classifying invariants of knots. *J. Pure. Appl. Alg.*, 23:37–65, 1982.
- [5] Seiichi Kamada. Surfaces in $\mathbf{R}^4$ of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.
- [6] Seiichi Kamada. Alexander’s and Markov’s theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.
- [7] Seiichi Kamada. Wirtinger presentations for higher dimensional manifold knots obtained from diagrams. *Fundamenta Mathematicae - FUND MATH*, 168:105–112, 01 2001.
- [8] Seiichi Kamada. *Braid and knot theory in dimension four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [9] Seiichi Kamada. Graphic descriptions of monodromy representations. *Topology and its Applications*, 154(7):1430–1446, 2007. Special Issue: The Third Joint Meeting Japan-Mexico in Topology and its Applications.
- [10] Seiichi Kamada. Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants. *Intelligence of Low Dimensional Topology 2006*, pages 101–108, 01 2007.
- [11] Seiichi Kamada. Quandles and symmetric quandles for higher dimensional knots. 103:145–158, 2014.
- [12] Seiichi Kamada and Takao Matumoto. Chart descriptions of regular braided surfaces. *Topology and its Applications*, 230:218–232, 2017.
- [13] S. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, 119(161):78–88, 1982.
- [14] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.