

三次元多様体における Weber 問題

東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻

吉崎彪雅 (Hyuga YOSHIZAKI)

概要

Weber 問題とは、素数 p に対して、有理数体上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数を求める、数論における未解決問題である。一方で、代数体と三次元多様体には、興味深い類似が指摘されている。講演者は、代数体のイデアル類群と三次元多様体の整係数 1 次ホモロジー群の類似性をもとに、三次元多様体における Weber 問題を考察した。そして、数論側と同様の結果 (類数の収束性) を得たので、具体例と共に紹介する。

本講演は、植木潤氏 (東京電機大学) との共同研究に基づくものである。

1 類似研究

数論的位相幾何学とは、代数体と三次元多様体の類似性に焦点を当て、一方の理論の他方での類似を考察することによる相互発展を目指す分野である。特に、代数体の素イデアルと三次元多様体に埋め込まれた結び目の類似は、古くから指摘されている ([Mo])。この類似を軸として、両分野の諸概念の類似が考案され、「類似対応の辞書作り」が進んでいる。今回は、数論における類数問題のトポロジー側での類似を研究した結果を紹介するため、このセクションではイデアル類群と 1 次ホモロジー群の類似について言及しておく。代数体 F に対し、 J_F を分数イデアル全体、 P_F を単項生成イデアル全体とすると、 F のイデアル類群 Cl_F は、

$$\text{Cl}_F := J_F / P_F$$

で定義される。そして、これは有限群であることが知られており、その位数を F の類数という。代数体の類数決定問題は、Gauss を発端とする歴史ある課題であるにもかかわらず、未だに類数 1 の代数体がどのくらい存在するか (有限か無限かも) 分かっていない。一方で、三次元多様体 M に対し、その 1-サイクルを $Z_1(M)$ 、1-バウンダリーを $B_1(M)$ とするとき、 M の 1 次ホモロジー群は、

$$H_1(M) := Z_1(M) / B_1(M)$$

で定義されるのであった。代数体の整数環は Dedekind 環であるため、 J_F は素イデアルで生成される自由アーベル群である。また、 $Z_1(M)$ は、 M 内の結び目で生成される自由アーベル群である。素イデアルと結び目の類似に基づき、イデアル類群とホモロジー群の類似が見て取れる。本研究では、類数問題の中でも、次に紹介する Weber の類数問題の類似を考察した。

2 Weber 問題

p を素数として、有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大を $\mathbb{B}_p$ とする. $\mathbb{Z}_p$ 拡大とは、無限次 Galois 拡大で、その Galois 群が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ の加法群と同型なものである. 正の整数 n に対して、 $\mathbb{B}_p$ の p^n 次の中間体がただ一つあり、それを $\mathbb{B}_{p,n}$ とする. Weber 問題とは、全ての素数 p と、正の整数 n に対して、 $\mathbb{B}_{p,n}$ の類数 $h_{p,n}$ を求める問題である. また、様々な結果により、次のように予想されている.

予想 2.1. 全ての素数 p と正の整数 n に対して、 $h_{p,n} = 1$ だろう.

特に $p = 2$ の場合、Weber [We] 以来様々な研究者によって進展してきたが、現状 Miller [Mi] による、 $h_{2,6} = 1$ までしか分かっていない. 一方で、 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数には、岩澤理論における興味深い性質がある. 中でも今回注目するのは、類数を数列 $\{h_{p,n}\}_{n \geq 1}$ とみなしたとき、数列の p 進的振る舞いに関する特徴である.

定理 2.2. 全ての素数 p に対し、類数列 $\{h_{p,n}\}_{n \geq 1}$ は、 $\mathbb{Z}_p$ において単数に収束する.

後に紹介する類似結果の証明と比べられるように、証明の概略を記す.

証明の概略. 相対ノルム $N_{p,n/n-1} : \mathbb{B}_{p,n} \rightarrow \mathbb{B}_{p,n-1}$ からイデアル類群間の写像 $N_{p,n/n-1} : \text{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}}$ が定まり、これは全射になることが知られている. よって、完全系列

$$0 \rightarrow \ker N_{p,n/n-1} \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \rightarrow \text{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}} \rightarrow 0$$

があり、 $\#\ker N_{p,n/n-1} = h_{p,n}/h_{p,n-1}$ となる. $\ker N_{p,n/n-1}$ には Galois 群 $\text{Gal}(\mathbb{B}_{p,n}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が作用するため、 $\ker N_{p,n/n-1}$ の軌道分解の位数を考えることによって、

$$\frac{h_{p,n}}{h_{p,n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n} \quad (1)$$

が得られる. これは、数列 $\{h_{p,n}\}_{n \geq 1}$ が p 進 Cauchy 列であることを表し、 $\mathbb{Z}_p$ の完備性から、収束する. 実際には、(1) 式の証明は、各素数 l パートごとに考え、 $l \neq p$ の場合は軌道分解を、 $l = p$ の場合は次の岩澤の有名な結果から従う:

定理 2.3 (岩澤 [I]). 全ての素数 p と正の整数 n に対し、 $p \nmid h_{p,n}$.

□

Weber 問題 (予想) は未解決であり、 $h_{p,n}$ が決定されている (p, n) は有限個しかない. よってその収束先は見当もつかない. しかし、次のセクションで紹介する、類数のトポロジーにおける類似では、数論側より分かることが多く、全ての素数と正の整数に対する類数や、さらに収束先が決定できる場合がある.

3 Weber 問題の類似と結果

まず、トポロジー側における $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似を紹介する．代数体の拡大の類似は、三次元多様体の被覆空間である． K を三次元球面 S^3 に埋め込まれた結び目とすると、 K で分岐する S^3 の p^n 重巡回被覆空間 M_{K,p^n} が存在する（分岐被覆の定義は、たとえば [Rol]）．結び目 K で分岐するとは、その被覆写像の分岐集合が K となることである． p^n 重巡回被覆とは、被覆変換群 $\text{Deck}(M_{K,p^n}/S^3)$ が $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に同型となることである．Livingston [Li, Corollary 3.2] によって、 M_{K,p^n} は有理ホモロジー球面であることが示されており、よってその 1 次ホモロジー群は有限群である．その位数を $h_{K,p^n} = \#H_1(M_{K,p^n})$ とする．次の問いが、トポロジーにおける Weber 問題である．

■問題． 結び目 K と素数 p 、正の整数 n に対して、 h_{K,p^n} を決定せよ．また、全ての素数 p と正の整数 n に対して $h_{K,p^n} = 1$ となる結び目 K は存在するか、そして存在した場合はどのように特徴づけできるだろうか．

実は、Livingston [Li] によって、後者の問いは解決され、Alexander 多項式を用いた特徴づけが与えられている．

定理 3.1 (Livingston [Li, Theorem 1.2]). 全ての素数 p と正の整数 n に対して $h_{K,p^n} = 1$ となる K の必要十分条件は、Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ の全ての非自明な既約因子 $f(t)$ に対し、相異なる 3 つの素数で割られる整数 m があり、 $f(t) = \Phi_m(t)$ となることである．ここで、 $\Phi_m(t)$ は m 番目の円分多項式である．

そして、Kim [Ki] によって、上記の条件を満たす Alexander 多項式をもつ結び目の存在が証明されている．Livingston と Kim による結果は、Weber 問題の類似を意識したものではなく、結び目の concordance group の研究から得られたものである．たとえば、[Li, Theorem 1.1] によると、定理 3.1 の条件を満たすための十分条件として、結び目 K と Seifert 行列が一致するような non-concordant な結び目は有限個しかない、というものがある．

さて、Livingston によって、トポロジーにおける Weber 問題の後者、すなわち「類数 1 の Weber 問題」は解決されているが、前者についてはまだ考えるべきことがある．今回は、定理 2.2 のトポロジー側の類似として、講演者と植木による以下の結果を紹介する．

定理 3.2. 全ての結び目 K に対し、数列 $\{h_{K,p^n}\}_{n \geq 1}$ は、 $\mathbb{Z}_p$ において単数に収束する．

数論側と同様に、 $H_1(M_{K,p^n})$ の n に関する相対的な写像の $\ker$ に対し、被覆変換群による作用を考えることで証明できる．

4 証明

いくつか準備をする． S^3 における K の補空間を X_K とする． X_K の $\mathbb{Z}$ -被覆を $X_{K,\infty}$ とし、被覆変換群の位相的生成元を t とすると、次の同型がある（たとえば、[Mo, Proposition 11.1]）：

$$H_1(M_{K,p^n}) \cong X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n} - 1)H_1(X_{K,\infty}). \quad (2)$$

また、岩澤の結果 (定理 2.3) の類似として、次の植木の結果がある。

定理 4.1 (植木 [U]). 全ての結び目 K 、素数 p 、正の整数 n に対して、 $p \nmid h_{K,p^n}$.

次に定理 3.2 の証明を紹介する。

定理 3.2 の証明. 自然な全射

$$\phi_n : X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n} - 1)H_1(X_{K,\infty}) \rightarrow X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^{n-1}} - 1)H_1(X_{K,\infty}) \quad (3)$$

によって、完全系列

$$0 \rightarrow \ker \phi_n \rightarrow X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n} - 1)H_1(X_{K,\infty}) \rightarrow X_1(X_{K,\infty})/(t^{p^{n-1}} - 1)H_1(X_{K,\infty}) \rightarrow 0 \quad (4)$$

がある。よって

$$\# \ker \phi_n = \frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} \quad (5)$$

となる。定理 2.2 と同様、

$$\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} \equiv 1 \pmod{p^n} \quad (6)$$

が証明できれば十分である。素数 l に対し、 $\ker \phi_n$ の l -Sylow 部分群を $(\ker \phi_n)_l$ とする。 $l = p$ のときは、定理 4.1 より $\# \ker(\phi_n)_p = 1$ である。以降 $l \neq p$ とする。 $\alpha \in (\ker \phi_n)_l$ に対し、 $O(\alpha) := \{t^i \alpha : i \in \mathbb{Z}\}$ とする。このとき、 $\alpha \neq 0$ に対して $\#O(\alpha) = p^n$ であることが言えれば十分である。実際、 $O(0) = \{0\}$ であるから、 $\#(\ker \phi_n)_l \equiv 1 \pmod{p^n}$ となる。

$(\ker \phi_n)_l$ には $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ と同型な群が作用するため、各元の軌道の位数は p べきである。 $\#O(\alpha) = p^m$ ($0 \leq m \leq n-1$) となる任意の元 $\alpha \in (\ker \phi_n)_l$ に対して、 $t^{p^{n-1}} \alpha = \alpha$ であるから、

$$(1 + t^{p^{n-1}} + t^{2p^{n-1}} + \cdots + t^{(p-1)p^{n-1}}) \alpha = p \alpha \quad (7)$$

である。一方で、 $\alpha \in \ker \phi_n$ であったから、

$$\alpha \in (t^{p^{n-1}} - 1)H_1(X_{K,\infty}). \quad (8)$$

よって、

$$\begin{aligned} p \alpha &\in (1 + t^{p^{n-1}} + t^{2p^{n-1}} + \cdots + t^{(p-1)p^{n-1}})(t^{p^{n-1}} - 1)H_1(X_{K,\infty}) \\ &= (t^{p^n} - 1)H_1(X_{K,\infty}) \end{aligned} \quad (9)$$

となり、 $\alpha \in (\ker \phi_n)_p$ である。ここで、 $(\ker \phi_n)_p \cap (\ker \phi_n)_l = \{0\}$ より、 $\alpha = 0$ となる。対偶を考えると、 $\alpha \neq 0$ に対しては $\#O(\alpha) = p^n$ となる。 $\square$

5 例

ここでは、Livingston によって与えられた Alexander 多項式に関する条件を満たさないいくつかの結び目に対して、 h_{K,p^n} を全て決定し、また定理 3.2 でその存在が保証される極限の例を紹介する。

結び目 K の Alexander 多項式を $\Delta_K(t)$ とする。Fox により、 h_{K,p^n} は $\Delta_K(t)$ を用いて計算できることが知られている。

定理 5.1 (Fox [Fo]). 全ての結び目 K , 素数 p , 正の整数 m に対して,

$$h_{K,m} = |\text{Res}(t^m - 1, \Delta_K(t))| \quad (10)$$

が成立. ここで, $\text{Res}(t^m - 1, \Delta_K(t))$ は, $t^m - 1$ と $\Delta_K(t)$ の終結式である.

■注意. Fox は, 素べきに限らない全ての正の整数 r に対して, K で分岐する S^3 の r 重巡回被覆空間に対して定理 5.1 を示しているが, ここでは素べきの場合に限定して記載している.

K としてトーラス結び目を考える. 互いに素な正の整数 a, b に対して, (a, b) -型トーラス結び目を $K_{(a,b)}$ とする. $K_{(a,b)}$ の Alexander 多項式は

$$\begin{aligned} \Delta_{K_{(a,b)}}(t) &= \frac{(1-t)(1-t^{ab})}{(1-t^a)(1-t^b)} \\ &= \prod_{\substack{N|ab \\ N \nmid a, b}} \Phi_N(t) \end{aligned} \quad (11)$$

である. ここで, $\Phi_N(t)$ は N 番目の円分多項式である. $K_{(a,b)}$ に対し Fox の定理を適用すると,

$$\begin{aligned} h_{K_{(a,b)}, p^n} &= |\text{Res}(t^{p^n} - 1, \Delta_{K_{(a,b)}}(t))| \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{\substack{N|ab \\ N \nmid a, b}} |\text{Res}(\Phi_{p^i}(t), \Phi_N(t))| \end{aligned} \quad (12)$$

となり, 円分多項式の終結式に帰着される. 円分多項式の終結式については, Apostol [A] が次の公式を与えている.

定理 5.2 (Apostol [A, Theorem 4]). 互いに素な整数 $r > s > 1$ に対して,

$$\text{Res}(\Phi_r, \Phi_s) = \begin{cases} p^{\phi(s)} & r/s \text{ が素数 } p \text{ べき} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

となる. ここで, $\phi(s)$ は s と互いに素な s 以下の正の整数の個数を表す.

これを適用して計算すると, $p \nmid b$ となる素数に対して,

$$h_{K_{(a,b)}, p^n} = b^{p^{\min\{\text{ord}_p(a), n\}} - 1} \quad (13)$$

となる. ここで, 正の整数 m に対して, $\text{ord}_p(m) := \max\{i \in \mathbb{Z} : p^i \mid m\}$ とする. また, $p \mid b$ の場合は, $K_{(a,b)} = K_{(b,a)}$ より, a と b を入れ替えればよい.

K として 8 の字結び目を考える. 以下, $p = 2, 3$ に対する h_{K,p^n} の計算結果である.

$n \setminus p$	2	3
1	5	16
2	45	5776
3	2205	192900153616
4	4870845	34 桁

急速に増大しているが, $h_{K,p^n} \pmod{p^n}$ を計算すると,

$$h_{K,2^n} \equiv \begin{cases} -3 & \pmod{2^1} \\ -3 & \pmod{2^2} \\ -3 & \pmod{2^3} \\ -3 & \pmod{2^4} \end{cases} \quad (14)$$

$$h_{K,3^n} \equiv \begin{cases} -2 & \pmod{3^1} \\ -2 & \pmod{3^2} \\ -2 & \pmod{3^3} \\ -2 & \pmod{3^4} \end{cases} \quad (15)$$

が確認でき, それぞれ $-3, -2$ に, p 進的に収束しているように見て取れる. 実際, $\Delta_K(t)$ の根に関する p 進解析的な議論により証明できるが, やや込み入っているので, ここでは結果のみ紹介する.

定理 5.3. 8 の字結び目 K に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{K,p^n} = \begin{cases} -3 & p = 2 \\ -2 & p = 3 \\ -4 & p = 5 \\ \sqrt{2} - 2 & p = 7. \end{cases}$$

参考文献

- [A] T. M. Apostol, Resultants of cyclotomic polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 457-462
- [Co] H. Cohn, A numerical study of Weber's real class number calculation I, Numer. Mathe. 2 (1960) 347-362.
- [Fo] R. H. Fox, Free differential calculus III. Subgroups, Ann. of Math. 64 (1956) 407-419.
- [I] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1956) 257-258
- [Ki] T. Kim, Filtration of the classical knot concordance group and Casson-Gordon invariants, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004) 293-306.
- [Li] C. Livingston, Seifert forms and concordance, Geom. Topol. 6 (2002) 403-408.
- [Mi] J. C. Miller, Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem, Acta Arith. 164 (2014) no.4 381-398.
- [Mo] M. Morishita, Knots and Primes: an introduction to arithmetic topology, Springer Universitext 2012
- [Rol] D. Rolfsen. Knots and Links (Mathematics Lecture Series, 7), Publish or Perish Berkeley CA 1976.
- [U] J. Ueki, On The Homology of Branched Coverings of 3-Manifolds, Nagoya Math. J. 213 (2014) 21-39.
- [We] H. Weber, Theorie der Abel'schen Zahlkörper, Acta Math. 8 (1886) 193-263.