

On keen bridge splitting of links

(joint work with Ayako Ido and Yeonhee Jang)

Tsuyoshi Kobayashi (Nara Women's Univ.)

本報告の主結果を含む論文

Ayako Ido, Yeonhee Jang and Tsuyoshi Kobayashi, On keen bridge splittings of links,
in preparation.

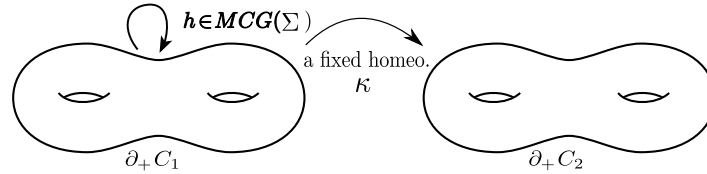
は現在作成中である。研究集会では、この論文の背景になる概念などについて歴史的なことも含めて紹介した後に、この論文の主結果の証明の骨格になる部分の紹介をする予定であったが、講演内で十分に説明することができなかった。本報告はこの内容について述べることにする。この報告を通してこの証明の魅力を感じていただければ幸いである。

1 (Strongly) keen Heegaard splitting

1.1 Heegaard splitting

M を compact, orientable 3-manifold とし $C_1 \cup_{\Sigma} C_2$ を M の *Heegaard splitting* とする。即ち、 C_1, C_2 は M に埋め込まれた genus g compression-body, で $C_1 \cup C_2 = M$, かつ $C_1 \cap C_2 = \partial_+ C_1 = \partial_+ C_2 = \Sigma$ という条件を満たすものとする。またこの M 内の surface Σ のことを M の *Heegaard surface* という。

ところここで、一旦、Heegaard surface Σ と同じ記号で単独の genus g (≥ 2) closed, orientable surface とする。ここで $MCG(\Sigma)$ を Σ の mapping class group, 即ち Σ の全ての自己同相写像のイソトピー類の集合に写像の合成で演算を入れて得られる群, とする。この段階で改めて Σ を $\partial_+ C_1$ と同一視する方法を一つ固定し、更に $\partial_+ C_1$ と $\partial_+ C_2$ を同一視するための同相写像 $\kappa: \partial_+ C_1 \rightarrow \partial_+ C_2$ を固定する。すると $MCG(\Sigma)(= MCG(\partial_+ C_1))$ の元 $[h]$ に対して C_1 と C_2 を $\kappa \circ h: \partial_+ C_1 \rightarrow \partial_+ C_2$ によって貼り合わせることで compact 3-manifold が得られるが、これを M_h と書くことにする。 M_h の C_1 と C_2 による分解は Heegaard splitting になっているが、これを $C_1 \cup_h C_2$ と書くことにする。



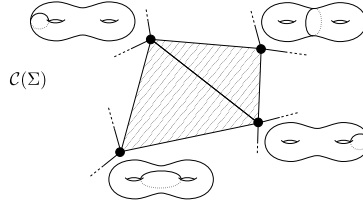
1.2 Curve complex

Σ を genus g (≥ 2) closed orientable surface とする。ここでは Harvey [Harv] によって導入された *curve complex* $\mathcal{C}(\Sigma)$ について紹介する。(以下では Σ 上の simple closed curve ℓ とそのイソトピー類 $[\ell]$ は区別しないことにする。)

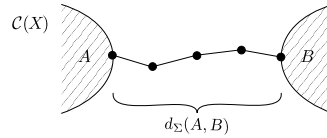
$\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ は Σ 上の全ての simple closed curves のイソトピー類に対応しているとする。相異なる頂点 $s_0, s_1, \dots, s_n$ が Σ 上の互いに交わらない simple closed curves で実現できる

とき, これらの頂点は n -simplex を張るとする. このような simplicies から構成される単体複体が curve complex $\mathcal{C}(\Sigma)$ である. $\mathcal{C}(\Sigma)$ は連結であることは初等的に証明できる [Lic]. $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ path を $[a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n = b]$ で表すことにする. $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ には単体的距離を導入することにより距離空間になる. 以下この距離を d_Σ と書くことにする. 即ち,

$d_\Sigma(a, b) :=$ the smallest number of 1-simplexes in a path connecting a and b in $\mathcal{C}(\Sigma)$.



$[a_0, a_1, \dots, a_n]$ が a_0 と a_n を結ぶ最短の path であるとき $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ は *geodesic* であるという. また $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ の二つの部分集合 A, B に対して, A, B の距離 $\min\{d_\Sigma(a, b) | a \in A, b \in B\}$ を $d_\Sigma(A, B)$ で表すことにする.



[Harv] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In I. Kra and B. Maskit, ed., Riemann Surfaces and Related Topics: Proc. of the 1978 Stony Brook Conf., vol. 97, Ann. of Math. Stud. Princeton

[Lic] Lickorish, W.B.R., A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 769-778.

1.3 Distance of Heegaard splitting

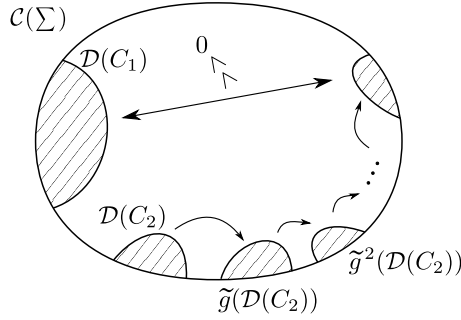
M を compact, orientable 3-manifold, $C_1 \cup_\Sigma C_2$ を M の Heegaard splitting とする. この Heegaard splitting の Heegaard surface Σ の curve complex $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ の部分集合 $\mathcal{D}(C_i)$ を次のように定める.

$$\mathcal{D}(C_i) = \{a \in \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) | a \text{ は } C_i \text{ 内の disk の boundary になっている} \}.$$

$\mathcal{D}(C_i)$ を C_i の *disk complex* と呼ぶ. このとき $\mathcal{C}(\Sigma)$ における $\mathcal{D}(C_1)$ と $\mathcal{D}(C_2)$ の距離 $d_\Sigma(\mathcal{D}(C_1), \mathcal{D}(C_2))$ を Heegaard splitting $C_1 \cup_\Sigma C_2$ の *distance* と言い $d(C_1 \cup_\Sigma C_2)$ と書くことにする. Heegaard splitting の distance は Hempel [He] によって導入され, その後多くの数学者によってその研究が進展している. Hempel は [He] の中で次の結果を示している.

Theorem A ([He, Proof of Theorem 2.7]) Σ を上記の通りとする. このときある (pseudo-Anosov と呼ばれるクラスに属する) $g \in \text{MCG}(\Sigma)$ で次の条件を満たすものが存在する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(C_1 \cup_{g^n} C_2)) = \infty.$$



Theorem A から直ちに $\mathcal{C}(\Sigma)$ の直径は無限大になることがわかる.

[He] J.Hempel, 3-manifolds as viewed from the curve complex, *Topology* 40 (2001) 631-657.

1.4 (Strongly) keen Heegaard splitting

この節では [I-J-K:2018] で導入された (strongly) keen Heegaard splitting について紹介する.

$C_1 \cup_{\Sigma} C_2$ を compact, orientable 3-manifold M の Heegaard splitting とする. $d(C_1 \cup_{\Sigma} C_2)$ を実現する $\mathcal{D}(C_1)$, $\mathcal{D}(C_2)$ の元の組が一意であるとき, 即ち次の条件をみたす時 Heegaard splitting $C_1 \cup_{\Sigma} C_2$ は *keen* であるという.

いま $d_{\Sigma}(a, b) = d_{\Sigma}(a', b') = d_{\Sigma}(\mathcal{D}(C_1), \mathcal{D}(C_2))$ (但し $a, a' \in \mathcal{D}(C_1), b, b' \in \mathcal{D}(C_2)$) が成り立つならば $a = a', b = b'$ となる.

また Heegaard splitting $C_1 \cup_{\Sigma} C_2$ が keen でありかつ $d(C_1 \cup_{\Sigma} C_2)$ を実現する $\mathcal{D}(C_1)$ と $\mathcal{D}(C_2)$ の 2 点を結ぶ geodesic が一意であるとき, $C_1 \cup_{\Sigma} C_2$ は *strongly keen* であるという. これに関して [I-J-K:2018] では次の結果が示されている.

Theorem 1.([I-J-K:2018, Theorem 1.1])

$g \geq 3, n \geq 2$ となる任意の integer の pair (g, n) に対して strongly keen な genus g Heegaard splitting で distance が n となるようなものが存在する.

尚, keen であるが strongly keen ではない Heegaard splitting が存在する ([I-J-K:2018, Remark 4.15]). また 井口-古宇田 ([I-K, Proposition 2.1]) では (strongly/weakly) keen Heegaard surface の Goeritz group は制限された形をしていることが示されている.

[I-J-K:2018] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, On keen Heegaard splittings. Singularities in generic geometry, *Adv. Stud. Pure Math.*, 78(2018), 293-311.

[I-K] D.Iguchi and Y.Koda, Twisted book decompositions and the Goeritz groups, *Topology Appl.*, 272 (2020), 107064.

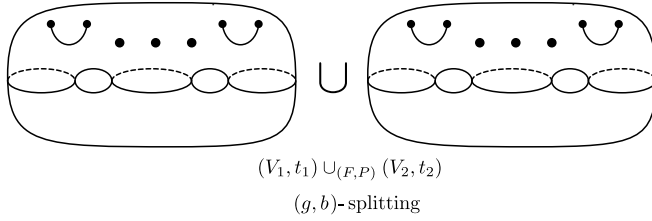
2 (Strongly) keen bridge splitting

この節では closed 3-manifolds M 内の link L の bridge splitting $((g, b)$ -splitting) とその distance および, (strongly) keen bridge splitting について紹介する.

2.1 Bridge splitting

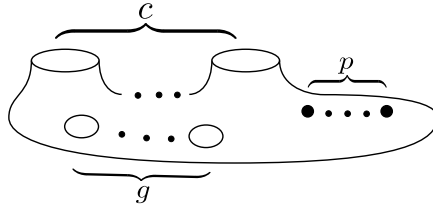
$(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ (又は (L, F)) が (M, L) (又は L) の (g, b) -splitting であるとは次の条件をみたすこととする.

- $V_1 \cup_F V_2$ は genus g Heegaard splitting of M ,
- L は F と transverse に交わる (このとき $P = L \cap F$ とする),
- $t_i = L \cap V_i$ は simultaneous に ∂V_i に parallel な b 本の arcs ($i = 1, 2$).



2.2 Curve complex of punctures surface

一般に genus g , orientable surface S with c boundary components, and p punctures を考える.



いま “ $g = 0, c + p \leq 4$ ” 又は “ $g = 1, c + p \leq 1$ ” が成り立つとき S は *sporadic* であるという. また S 内の simple closed curve α について “ α は高々一点の puncture を含む S 内の disk を bound する” 又は “ α は ∂S のある component に parallel” であるとき α は *inessential* であるという. また α が *inessential* でないとき α は *essential* であると言う. ここでは S が non-sporadic なときの S の curve complex について紹介する. 尚, S が sporadic である時も S の curve complex は定義できるがこれについては本報告では略することにする. 以下では S 上の simple closed curve とそのイソトピー類は区別しないこととする.

$\mathcal{C}(S)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ は S 上の全ての essential simple closed curves のイソトピー類に対応しているとする. 相異なる頂点 $s_0, s_1, \dots, s_n$ が S 上の互いに交わらない simple closed curves で実現できるとき, これらの頂点は n -simplex を張るとする. このような simplices から構成される単体複体が curve complex $\mathcal{C}(S)$ である. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ path を $[a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b]$ と表すことにする. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ には単体的距離を導入することにより距離空間になる. 以下この距離を d_S と書くことにする. $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ が a_0 と a_n を結ぶ最短の path であるとき $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ は *geodesic* であるという. また $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の二つの部分集合 A, B に対して, A, B の距離 $\min\{d_S(a, b) | a \in A, b \in B\}$ を $d_S(A, B)$ で表すことにする.

2.3 Distance of bridge splitting

$(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ を L の (g, b) -splitting とする. この bridge splitting の punctured surface $F \setminus P$ の curve complex $\mathcal{C}(F \setminus P)$ の頂点集合 $\mathcal{C}^{(0)}(F \setminus P)$ の部分集合 $\mathcal{D}(V_i \setminus t_i)$ ($i = 1, 2$) を次のように定める.

$$\mathcal{D}(V_i \setminus t_i) = \{a \in \mathcal{C}^{(0)}(F \setminus P) \mid a \text{ は } V_i \setminus t_i \text{ 内の disk の boundary になっている} \}.$$

$\mathcal{D}(V_i \setminus t_i)$ を (V_i, t_i) の *disk complex* と呼ぶ. このとき $\mathcal{C}(F \setminus P)$ における $\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1)$ と $\mathcal{D}(V_2 \setminus t_2)$ の距離 $d_{F \setminus P}(\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1), \mathcal{D}(V_2 \setminus t_2))$ を bridge splitting $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ の *distance* と言い $d((V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2))$ (又は $d(L, F)$) とかくことにする. 以下に bridge splitting の distance に関する研究をアランダムに紹介する.

(Existence of high distance bridge splitting)

- T.Saito, Genus one 1-bridge knots as viewed from the curve complex, Osaka J. Math. 41(2004), 427-454
- Campsi-Rathbun, High distance knots in closed 3-manifolds, JKTR, 21(2002)
- Blair-Tomova-Yoshizawa, High distance bridge surfaces, AGT 13(2013), 2925-2946.
- Ichihara-Saito, Knots with arbitrarily high distance bridge splittings, Bull.Korean Math Soc., 50(2013), 1989-2000

(Upper bound of distance of bridge splitting)

- Bachman-Schleimer, Distance and bridge position, Pacific J.Math. 219(2005), 221-235
($\exists S$: ess. surface in the exterior of $L \Rightarrow d(L, F) \leq -\chi(S) + 2$)
- M.Tomova, Multiple bridge surfaces restrict knot distance, AGT 7(2007), 957-1006
(F, F' : distinct bridge surfaces of $L \Rightarrow d(L, F) \leq -\chi(F' \setminus L) + 2$)
- Y.Jang, Distance of bridge surfaces for links with essential meridional spheres, Pacific J.Math. 267(2014), 121-130
($\exists S$: ess. $n(\geq 4)$ punctured sphere in the exterior of $L \Rightarrow d(L, F) \leq n - 2 (= -\chi(S))$)
- A.Ido, An estimate of Hempel distance for bridge spheres, Bull.Korean Math Soc., 52(2015), 735-740
(S, S' : distinct bridge spheres of $L \Rightarrow d(L, F) \leq -\chi(S' \setminus L)$)

2.4 (Strongly) keen bridge splitting

この節では [I-J-K: in prep.] の結果について紹介する. $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ を L の (g, b) -splitting とする. $d(L, F)$ を実現する $\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1), \mathcal{D}(V_2 \setminus t_2)$ の元の組が一意であるとき, $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ は *keen* であるという. また bridge splitting $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ が *keen* であり $d(L, F)$ を実現する $\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1), \mathcal{D}(V_2 \setminus t_2)$ の二点を結ぶ geodesic が一意であるとき $(V_1, t_1) \cup_{(F,P)} (V_2, t_2)$ は *strongly keen* であるという. 尚, *keen* であるが *strongly keen* でない bridge splitting が存在する ([I-J-K: in prep., Remark 4.1]). これらに関して以下の結果が得られた.

Theorem 1.([I-J-K: in prep., Theorem 1.1]) $g \geq 0, b \geq 1, n \geq 1$ をみたす任意の integers (g, b, n) に対して次が成り立つ.

(g, b, n) が “ $(g, b) = (0, 1)$ ” 又は “ $(g, b, n) = (0, 3, 1)$ ” をみたさないならば distance n を持つ *strongly keen* (g, b) -splitting が存在する.

$(g, b) = (0, 1)$ (S^3 内の trivial knot の $(0, 1)$ -splitting) については $\mathcal{C}(F \setminus P)$ は空集合になる. また $(g, b, n) = (0, 3, 1)$ の場合は次が成り立つ.

Theorem 2. ([I-J-K: in prep., Theorem 1.2]) 任意の distance 1 の $(0, 3)$ -splitting は keen ではない.

Remark. Theorem 2 に関して次の事実が成り立つ.

Link L が distance 1 の $(0, 3)$ -splitting をもつ (従ってこの場合 ambient な manifold は S^3 である) 必要十分条件は, L が non-trivial 2-bridge link の connected sum でありかつ non-separable であることである.

Remark. 我々は [I-J-K: 2015] の中で次の結果を与えている.

$g \geq 0, b \geq 1, n \geq 2$ をみたす任意の integers (g, b, n) に対して次が成り立つ.

“(g, b) = $(0, 1)$ ” 又は “(g, b) = $(0, 2)$ ” をみたさないならば distance n を持つ (g, b) -splitting が存在する.

実は最近この証明の中に誤りのあることが発見された. しかしながら Theorem 1 は上記の結果の別証明になっていることを注意しておく.

[I-J-K: 2015] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, Bridge splittings of distance exactly n , Top. and App. 196(2015), 1395-1411.

[I-J-K: in prep.] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, On keen bridge splitting of links, in preparation

3 Ingredient and recipe of the proof

この節では [I-J-K: in prep.] の Theorem 1.1 の証明のコアとなるアイデアについて紹介する. なお, ここで “コアとなる” と言っているのは $g + b, n$ が大きいときは, 以下で紹介する議論で証明できる, という意味である. $g + b$ が小さいときや $n = 1$ のときは ad.hoc な議論が必要となる.

[I-J-K: in prep.] A.Ido, Y.Jang, and T.Kobayashi, On keen bridge splitting of links, in preparation

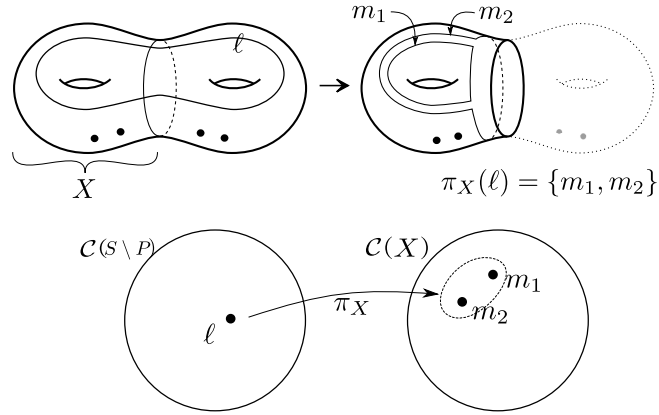
3.1 Ingredient: Subsurface projection

S を genus g , orientable surface S with c boundary components, and p punctures とし X を S の essential な (即ち ∂X の各 component は S で essential であるような) subsurface で non-sporadic なものとする. このとき $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ から $\mathcal{C}^{(0)}(X)$ の power set $2^{\mathcal{C}^{(0)}(X)}$ への写像 $\pi_X : \mathcal{C}^{(0)}(S) \rightarrow 2^{\mathcal{C}^{(0)}(X)}$ を次のように定義する.

$\ell \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ とする. いま ℓ と ∂X の交点の数は ℓ の S における isotopy 類の中で最小であるとする. このとき

α_i ($i = 1, \dots, n$) を $\ell \cap X$ の component とする. いま $\partial X \cup \alpha_i$ の X における regular neighborhood の boundary component のうち “ ∂X に含まれないもので X で essential であるもの” の union を $\pi_0(\alpha_i)$ とかくことにする. このとき:

$$\pi_X(\ell) := \bigcup_{i=1}^n \pi_0(\alpha_i).$$



π_X に関して以下のような結果が知られている.

Lemma 1 ([Masur-Minsky:2000, Lemma 2.2]) π_X は 2-Lipschitz である. 従って, 次が成り立つ.

$\mathcal{C}(S)$ 内の path $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ に対して $a_i \cap X \neq \emptyset$ ($i = 0, 1, \dots, m$), とする. このとき, $\pi_X(a_0) \cup \pi_X(a_1) \cup \dots \cup \pi_X(a_m)$ の $\mathcal{C}(X)$ における直径は $2m$ 以下である.

Lemma 2 ([Masur-Minsky:1999, Prop. 4.6]) S は non-sporadic とする. このとき次の条件を満たす定数 $c > 0$ が存在する:

$$\forall \text{ pseudo-Anosov } h \in \text{MCG}(\mathcal{C}(S)), \forall \gamma \in \mathcal{C}^{(0)}(S), \forall n \in \mathbf{Z},$$

$$d_S(h^n(\gamma), \gamma) \geq c|n|.$$

[Masur-Minsky:1999] H.Masur, and Y.Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, Invent. Math., 138(1999), 103-149.

[Masur-Minsky:2000] H.Masur, and Y.Minsky, Geometry of the complex of curves. II. Hyperbolicity, Hierarchical structure, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), 902-974.

3.2 Recipe: Unique geodesic

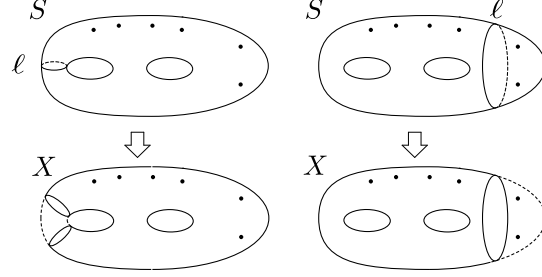
ここでは端点を結ぶ geodesic が unique になるような geodesic を構成するための手法を紹介する. いま ℓ を S 内の essential simple closed curve で次の条件を満たすようなものとする.

- (A) ℓ は S で non-separating, 又は
- (B) ℓ は S で disk with two punctures を bound する.

この時, “ ℓ に associate した subsurface” X を次のように定義する.

条件 (A) をみたす時は, $X := (S$ を ℓ で cut して得られる surface).

条件 (B) をみたす時は, $X := (S$ から ℓ が bound する disk with two punctures を取り除いて得られる surface).



Remark (Forcing simple closed curve)

上記の設定のもと、次の事実が成り立つのは直ちにわかることを注意しておく (Lemma 1 の赤字で書かれた条件と見比べていただきたい).

$m \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ が X と交わらないならば, $m = \ell$ である.

このとき次の proposition が成り立つ.

Proposition. (Extending geodesic with uniqueness)

$[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}, \ell_n]$ を $\mathcal{C}(S)$ で以下の条件 (1), (2), (3) を満たす path とする.

- (1) ℓ_0 と ℓ_{n-1} を結ぶ geodesic は $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}]$ に限る,
- (2) ℓ_{n-1} は上記の条件 (A) 又は (B) を満たす,
- (3) $\text{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) > 2n$, ただし X は ℓ_{n-1} に associate した subsurface とする.

このとき, ℓ_0 と ℓ_n を結ぶ geodesic は $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}, \ell_n]$ に限る.

Remark

今 $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}]$ は Proposition の条件 (2) をみたすとする. この時 Lemma 2 を利用することにより, 条件 (3) をみたすような ℓ_n を構成することができる.

Outline of the proof of Proposition

$[m_0 = \ell_0, m_1, \dots, m_{n-1}, m_n = \ell_n]$ を ℓ_0 と ℓ_n をつなぐ path とする. まず次の Claim が成り立つことを示す.

Claim. $\exists i$ s.t. $m_i = \ell_{n-1}$

Proof. このような m_i が存在しなかったとする. このとき条件 (2) より全ての m_j は X と交わることがわかる. この事実と, Lemma 1 より, 次の不等式が成り立つことがわかる.

$$\text{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) \leq 2n.$$

しかし, これは条件 (3) に矛盾する.

(証明終)

以上の準備のもと, 次のように Proposition の証明を complete することができる.

$[m_0 = \ell_0, m_1, \dots, m_{n-1}, m_n = \ell_n]$ を ℓ_0 と ℓ_n をつなぐ geodesic とする. Claim より $m_i = \ell_{n-1}$ となるような i が存在するが Proposition の条件 (1) より $i = n - 1$ で $[m_0 = \ell_0, m_1, \dots, m_{n-1}] = [\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}]$ となることがわかり, このことと $m_n = \ell_n$ より直ちに Proposition の結論が成り立つことがわかる. (証明終)

端点を結ぶ geodesic が unique になるような geodesic の構成：

$[\ell_0, \ell_1]$ から出発して Proposition とその直後の Remark を繰り返し適用することにより, 任意の $n (\geq 1)$ に対して geodesic $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n]$ で ℓ_0 と ℓ_n を結ぶ geodesic は $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n]$ に限るようなものが存在することがわかる.

3.3 Construction of strongly keen bridge splitting

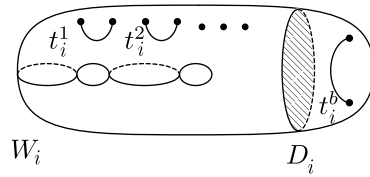
Σ : genus- g , closed, orientable surface

P : the set consisting of $2b$ points in Σ

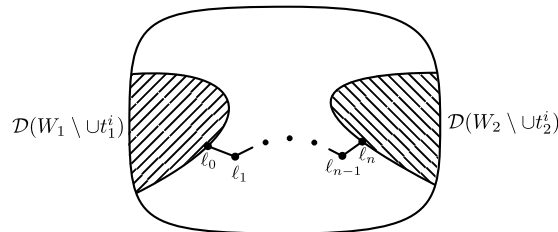
とし $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n]$ を前節で構成した $\mathcal{C}(\Sigma \setminus P)$ の geodesic とする. このとき

$(W_i, \cup_j t_i^j)$: genus- g handlebody with b trivial arcs ($i = 1, 2$)

とし D_i を次の図のように W_i に埋め込まれた disk とする.

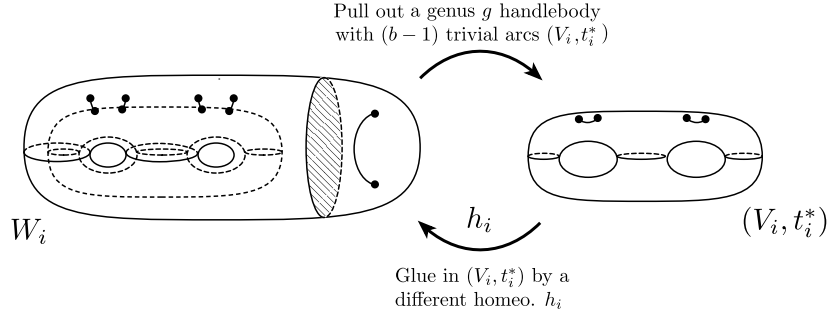


次に $\partial W_1 \setminus (\cup t_1^j)$ と $\Sigma \setminus P$ を ∂D_1 が ℓ_0 が対応するように同一視する. また $\partial W_1 \setminus (\cup t_1^j)$ と $\partial W_2 \setminus (\cup t_2^j)$ の同一視 κ で ℓ_n が ∂D_2 に対応するようなものを固定する. この帰結としてある閉三次元多様体 M 内の link L が得られる. 特に $(W_1, \cup_j t_1^j) \cup_\kappa (W_2, \cup_j t_2^j)$ は L の (g, b) -splitting になっている. このとき, この分解に現れる disk complexes は $\mathcal{C}(\Sigma \setminus P)$ の中で一般には次のように見えるだろう.



この図では $[\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n]$ は $d((W_1, \cup_j t_1^j) \cup_\kappa (W_2, \cup_j t_2^j))$ を実現していないことに注意する. そこで $(W_1, \cup_j t_1^j) \cup_\kappa (W_2, \cup_j t_2^j)$ を次のように deform してやる.

$(W_i, \cup_j t_i^j)$ の内部から次の図のような genus $(g-1)$ handlebody with $(b-1)$ trivial arcs (V_i, t_i^*) を抜き出して, 別の homeomorphism h_i を使って埋め直してやることを考える.

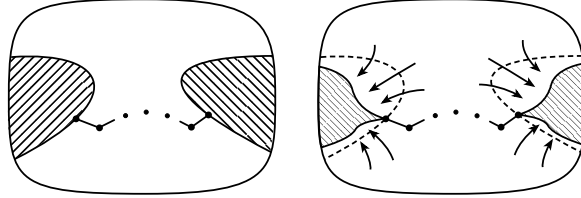


ところで 市原-斎藤 [Ichihara-Saito:2013] は 1.3 節で紹介した Theorem A の証明において Hempel が行った議論と同様の事実が bridge splitting に対して成り立つことを示している. この結果を使うと h_i は次の不等式を満たすようにとれることがわかる.

$$d_{\partial V_1 \setminus t_1^*}(\ell_1, h_1(\mathcal{D}(V_1 \setminus t_1^*))) > 2$$

$$d_{\partial V_2 \setminus t_2^*}(\kappa(\ell_{n-1}), h_2(\mathcal{D}(V_2 \setminus t_2^*))) > 2$$

この条件を使うと $\mathcal{C}(\Sigma \setminus P)$ 内の disk complexes は次のように変形されることがわかる.



これは対応する (g, b) splitting は strongly keen であることを意味している.

[Ichihara-Saito:2013] Ichihara-Saito, Knots with arbitrarily high distance bridge splittings, Bull.Korean Math Soc., 50(2013), 1989-2000.