

COMMENSURABILITY OF COCOMPACT COXETER GROUPS

HAN YOSHIDA

1. 序

$\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ が $[\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ and $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ をみたすとき Γ_1, Γ_2 は commensurable という. ある $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ が存在して $g\Gamma_1g^{-1}$ が Γ_2 と commensurable であるとき Γ_1 と Γ_2 は commensurable in the wide sense という. 以下 “in the wide sense” は省略する. commensurability は同値関係となる.

すぐにわかることとして, $M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ が commensurable ならば $\text{vol}(M_1)/\text{vol}(M_2) \in \mathbb{Q}$ となる.

また, $\Gamma < \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ に対して $k(\Gamma) = \mathbb{Q}(\text{tr } \Gamma^{(2)})$ とする. ここで $\Gamma^{(2)}$ は Γ の部分群で $\{\gamma^2 | \gamma \in \Gamma\}$ で生成されるものである. これを Γ の invariant trace field (ITF) という. $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ が commensurable ならば $k(\Gamma_1) = k(\Gamma_2)$ となることが知られている. ここでは定義しないが invariant quaternion algebra (IQA) というものも同じであることが知られている ([3]).

体積, ITF, IQA が同じ $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ で commensurable でない noncocompact な例については沢山知られている ([1], [5]).

$P \subset \mathbb{H}^3$ を面角が π/k ($k \in \mathbb{Z}$) の形である多面体とする. P の各面の鏡映変換で生成される群 $\Gamma(P)$ を P のコクセター群という.

C. Gyurek と R. Roeder が [2] で図のような多面体 AA5, AA5m について調べている. 以下 $\mathbb{H}^3$ として hyperboloid model を用いる. これらの多面体の各面の法線ベクトルを行ベクトルで表した行列は以下のようになる.

$$\begin{aligned} N_{AA5} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{20}\sqrt{90\sqrt{5}-130} & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{5}}{20} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{20}\sqrt{90\sqrt{5}-130} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} - \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{AA5m} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{30\sqrt{5}+55} & \frac{1}{10}\sqrt{10\sqrt{5}+50} & 0 & -1-\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}} & \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{30\sqrt{5}+55} & \frac{1}{10}\sqrt{10\sqrt{5}+50} & 0 & -1-\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

この論文で以下の問題を挙げている.

Problem 1. 図のようなコンパクト多面体 $AA5$, $AA5m$ のコクセター群を Γ_1 , Γ_2 とすると Γ_1^+ , Γ_2^+ の ITF , IQA は同じで $\text{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_1) = \text{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_2)$ となる. Γ_1 と Γ_2 は *commensurable* か? ここで $\Gamma_i^+ = \Gamma_i \cap \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ ($i = 1, 2$).

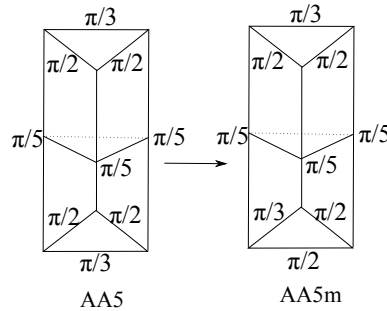


FIGURE 1. $AA5$, $AA5m$

この講演では以下のことを示す.

Main Theorem. Γ_1 , Γ_2 は *commensurable* でない.

2. 準備

G. Margulis が次のことを示している ([4]).

Theorem 1 (Margulis). Γ が非数論的ならば Γ の *commensurator* $C(\Gamma) = \{\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3) : |\gamma\Gamma\gamma^{-1} : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma| < \infty, |\Gamma : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma| < \infty\}$ は Γ と通約可能な群をすべて含み, 離散的となる.

Γ が非数論的ならば $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ について $C(M) = \mathbb{H}^3/C(\Gamma)$ は M と通約可能な双曲 3 次元多様体, 軌道体で体積が最小のもので, 完全通約可能性類不変量となることを意味している.

Main Theorem の Γ_1, Γ_2 が非数論的であることは C. Gyurek と R. Roeder が [2] で証明している. Σ_C を Γ_1 の commensurator の singular set, Σ_2 を Γ_2 の singular set とする. すなわち

$$\Sigma_C = \{x \in \mathbb{H}^3 | \gamma(x) = x \text{ for some } \gamma \in C(\Gamma_1) \setminus \{id\}\},$$

$$\Sigma_2 = \{x \in \mathbb{H}^3 | \gamma(x) = x \text{ for some } \gamma \in \Gamma_2 \setminus \{id\}\}$$

とする. Main Theorem を証明するために, 次のセクションで $\Sigma_2 \not\subset \Sigma_C$ を示す. そのために以下で 2 つの lemma を証明する.

Lemma 1. $\alpha, \alpha' \in C(\Gamma_1)$ を超平面 S, S' に関する鏡映変換 ($i = 1, 2$), θ を S と S' のなす角とする. このとき $\theta \in \Theta = \{k\pi/n | n = 4, 6, 10, 1 \leq k \leq n\}$.

(Lemma 1 の証明) $\alpha\alpha'$ は 2θ -rotation なので $\alpha\alpha' \sim \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{C})$ となる. Γ_1 の invariant trace field

$$k(\Gamma_1^+) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right)$$

であり ([2]), invariant trace field は通約可能性類不変量なので

$$k(C((\Gamma_1)^+)) = k(\Gamma_1^+) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right).$$

よって

$$\text{tr}(\alpha\alpha')^2 = 2 \cos 2\theta + 2 \in \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right).$$

これを満たすのは $\theta \in \Theta = \{k\pi/n | n = 4, 6, 10, 1 \leq k \leq n\}$.

注意: P を図のような多面体とする. これは体積が AA5 の $1/4$ となり, Γ_1 はのkokセター群 $\Gamma(P)$ と commensurable となる. Γ_1 の commensurator は $\Gamma(P)$ を含む. (ここでは証明しないが実際には Γ_1 の commensurator は $\Gamma(P)$ と一致する.)

Lemma 2. ℓ を図のような P の edge を含む測地線, F_i を P の図のような面とする. S_k を ℓ を通り, F_2 と面角 $k\pi/10$ で交わる超平面 ($k = 0, \dots, 9$), γ_i を F_i に関する鏡映変換, $\mathbb{H}^3$ 内の超平面 $S \subset \Sigma_C$ が $S \cap \ell \neq \emptyset$ とする. このとき $S \in \{S_k : k = 0, \dots, 9\} \cup \{(\gamma_1\gamma_5)^n \overline{F_1}, (\gamma_1\gamma_5)^n \overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$. ここで $\overline{F_i}$ ($i = 1, 5$) は F_i を含む超平面.

Remark: S は ℓ を含んでいるか ℓ に直交している. $S, S' \in \{(\gamma_1\gamma_5)^n \overline{F_1}, (\gamma_1\gamma_5)^n \overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$ ならば $d(S, S') = n \cdot d(F_1, F_5) = n \cdot 0.20529 \dots$ for some $n \in \mathbb{N}$.

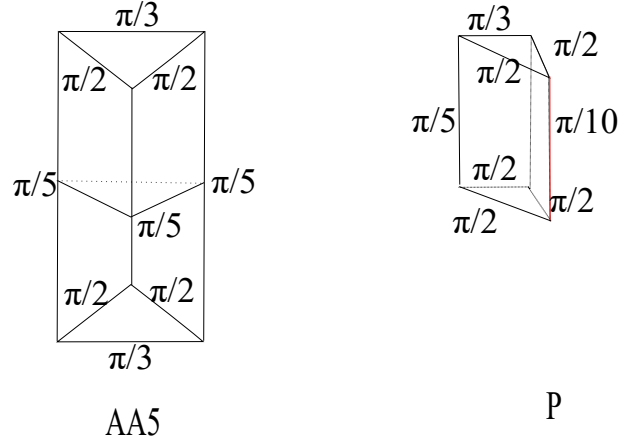


FIGURE 2. 多面体 P

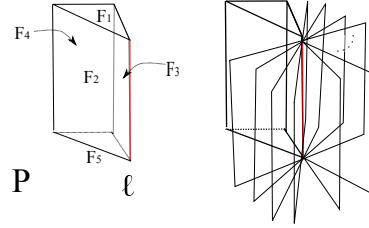


FIGURE 3. ℓ と F_i

(Lemma 2 の証明) P の法線ベクトルを行ベクトルとして並べた行列は以下のようになる.

$$N_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5}+11} & \frac{1}{4}\sqrt{22\sqrt{5}+50} & \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{6\sqrt{5}+10}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6\sqrt{5}+11}}{\sqrt{6\sqrt{5}+10}} \end{pmatrix}.$$

S_k (resp. S) の法線ベクトルを n_k (resp. S), θ_k を S と S_k のなす角とすると

$$\langle n, n_k \rangle = -\cos \theta_k \cdots (1)$$

となる.

S_k と F_1, F_5 は垂直で F_2 となす角が $k\pi/10$ であることから, S_k の法線ベクトルは $n_k = (0, -\sin k\pi/10, \cos k\pi/10, 0)$ となる. S の法線ベクトルを $n = (x, y, z, w)$ とすると

$$\langle n, n_k \rangle = -y \sin k\pi/10 + z \cos k\pi/10 \cdots (2).$$

よって (1), (2) より

$$-\cos \theta_k = -y \sin k\pi/10 + z \cos k\pi/10 \cdots (3).$$

とくに $k = 0, 5$ について考えると $-\cos \theta_0 = z$, $-\cos \theta_5 = -y$ が得られる. $S, S_k \subset \Sigma_C$ であるので Lemma 1 より, すべての k に対して $\theta_k \in \Theta$ となる.

Case 1. $(\theta_0, \theta_5) = (m\pi/10, \pi/2 + m\pi/10)$ ($m = 0, \dots, 9$) のとき. $z = -\cos m\pi/10$, $y = \cos(\pi/2 + m\pi/10) = -\sin m\pi/10$ なので $\langle n, n_{10-m} \rangle = -\sin m\pi/10 \cdot (-\sin(\pi - m\pi/10)) - \cos m\pi/10 \cdot \cos(\pi - m\pi/10) = 1$ となり $S = S_{10-m}$.

Case 2. $(\theta_0, \theta_5) = (m\pi/10, \pi/2 - m\pi/10)$ ($m = 0, \dots, 9$) のとき. $z = -\cos m\pi/10$, $y = \cos(\pi/2 - m\pi/10) = \sin m\pi/10$ なので $\langle n, n_m \rangle = \sin m\pi/10 \cdot (-\sin m\pi/10) - \cos m\pi/10 \cdot \cos m\pi/10 = -1$ となり $S = S_m$.

Case 3. $(\theta_0, \theta_5) = (\pi/2, \pi/2)$ のとき. $y = z = 0$ なので S の法線ベクトルは $n = (x, 0, 0, \pm\sqrt{1+x^2})$. S は F_2, F_3 に直交する.

$(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ または $\gamma_1(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ for some $n \in \mathbb{Z}$. この $(\gamma_1\gamma_5)^n(S)$ または $\gamma_1(\gamma_1\gamma_5)^n(S)$ を再び S とかく.

F_1 と F_4 のなす角が $\pi/3$, F_5 と F_4 のなす角が $\pi/2$ なので F_4 と S の面角を ϕ とすると $S \cap F_4 \neq \emptyset$ となるには $\pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$. $S, F_4 \subset \Sigma_C$ なので Lemma 1 より $\phi \in \Theta$. $\phi = \pi/2, 2\pi/5, \pi/3$ となる.

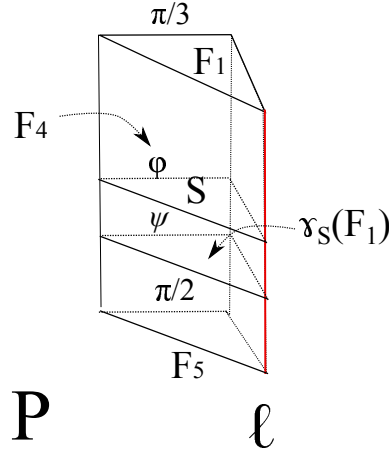


FIGURE 4. S と $\gamma_S(F_1)$

$\phi = 2\pi/5$ とする.

$$\langle n, n_4 \rangle = -\cos 2\pi/5 \cdots (4).$$

また S が P に含まれていて, F_1, F_5, S は ℓ に直交するので $d(F_1, S) + d(S, F_5) = d(F_1, F_5)$ となる. よって

$$\operatorname{arccosh}|\langle n_1, n \rangle| + \operatorname{arccosh}|\langle n, n_5 \rangle| = \operatorname{arccosh}|\langle n_1, n_5 \rangle|. \cdots (5)$$

(4)(5) より

$$n = (0.077 \cdots, 0, 0, 1.003 \cdots).$$

γ_S を S に関する鏡映変換とすると $d(S, F_1) = 0.077 \dots$, $d(S, F_5) = 0.127 \dots$ なので $\gamma_S(F_1)$ は ℓ に直交し, P に交わる. F_4 と $\gamma_S(F_1)$ のなす角を ψ とすると $4\pi/5 < \psi < \pi/2$. $\gamma_S(F_1)$, $F_4 \subset \Sigma_C$ であるが $\psi \notin \Theta$ なので Lemma 1 より矛盾.

$\phi = \pi/2, \pi/3$ なので $S = \overline{F_1}$ または $\overline{F_5}$.

Case 4. $(\theta_0, \theta_5) \neq (\pi/2, \pi/2)$, $(m\pi/10, \pi/2 \pm m\pi/10)$ ($m = 0, \dots, 9$) のとき. $\theta_0 = \pi/10$, $\theta_5 = \pi/10$ とする. (3) より $z = -\cos \pi/10$, $y = -\cos \pi/10$. このとき (3) より $-\cos \theta_1 = \sin \pi/10 \cos \pi/10 - \cos^2 \pi/10 = -0.610 \dots$ で $\{\cos \theta | \theta \in \Theta\} = \{\pm 0.951 \dots, \pm 0.809 \dots, \pm 0.587 \dots, \pm 0.309 \dots, 0, \pm 0.5, \pm 0.866 \dots, \pm 0.707 \dots\}$ なので $\theta_1 \notin \Theta$. 他の場合も同様に計算すると $\theta_1 \notin \Theta$ であると言える.

よって, $S \in \{S_k : k = 0, \dots, 9\} \cup \{(\gamma_1 \gamma_5)^n \overline{F_1}, (\gamma_1 \gamma_5)^n \overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$.

3. MAIN THEOREM の証明

$\Gamma_2 \not\subset C(\Gamma_1) = C(P)$ を示す. $\Gamma_2 \subset C(P)$ とすると $\Sigma_2 \subset \Sigma_C$ である. Lemma 2 の ℓ について考える. ある $\gamma \in \Gamma_2$ が存在して ℓ と $\gamma(AA5m)$ の2つの面と transversal に交わる. Lemma 2 よりこの二つの面は平行になる. ℓ は F'_1 と F'_5 に直交する.

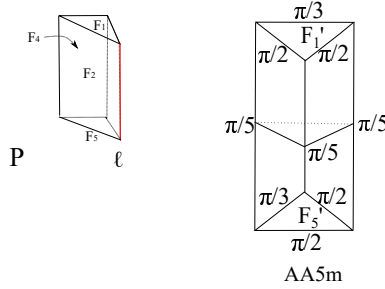


FIGURE 5. $AA5m$ の F'_1 と F'_5

$$\overline{F'_1}, \overline{F'_5} \in \{(\gamma_1 \gamma_5)^n \overline{F_1}, (\gamma_1 \gamma_5)^n \overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} d(F_1, F_5) &= \ln \left(\frac{1}{20} \left(3\sqrt{5} + \sqrt{(-3\sqrt{5} - 15)^2 - 400 + 15} \right) \right) / 2 \\ &= 0.205 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(F'_1, F'_5) &= \ln \left(\frac{1}{10} \left(\sqrt{5} + \sqrt{(-\sqrt{5} - 10)^2 - 100 + 10} \right) \right) \\ &= 0.656 \dots \end{aligned}$$

なので $d(F'_1, F'_5) \neq n \cdot d(F_1, F_5)$ for $n \in \mathbb{N}$.

よって $\overline{F'_1}, \overline{F'_5}$ は Σ_C に含まれない. $\Sigma_2 \not\subset \Sigma_C$ なので $\Gamma_2 \not\subset C(\Gamma_1)$ となり Γ_2 と Γ_1 は commensurable でない.

4. APPENDIX

主定理と同様にして以下のことも証明できる.

Theorem 2 (Y). $BB5$ と $BB5m$ は通約可能でない

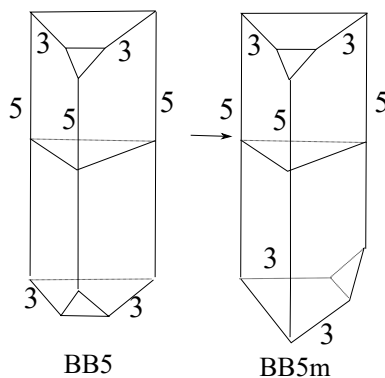


FIGURE 6. $BB5$ と $BB5m$

REFERENCES

- [1] E. Chesebro, J. DeBlois, Algebraic invariants, mutation, and commensurability of link complements, 2012 Mathematics Pacific Journal of Mathematics
- [2] C. Gyurek, R. Roeder, Problem on Mutant Pairs of Hyperbolic Polyhedra, <https://arxiv.org/pdf/1906.08723.pdf>
- [3] C. Maclachlan, A. Reid, The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds. Graduate Texts in Mathematics 219, Springer (2003).
- [4] G. Margulis, Discrete Subgroups of Semi-simple Lie Groups, Ergeb. der Math. 17, Springer-Verlag (1989).
- [5] H. Yoshida, Commensurability of link complements Osaka J. Math. 54(4): 635-645 (2017).

NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, GUNMA COLLEGE 580 TORIBAMACHI,
MAEBASHI, GUNMA, JAPAN 371-8530
E-mail address: han@gunma-ct.ac.jp