WEAVING DIAGRAM の構成と同値類について

福田瑞季 (小谷元子氏と SONIA MAHMOUDI 氏との共同研究)

Abstract. Weaving diagram とは 2-周期な 4-正則グラフに対し、各頂点に上下の情報を与えたもののことを言う。Weave を含む編み物の数学的モデル化は既にいくつか研究されており、例えば Grishanov- Meshkov-Omelchenko によって基本領域を用いて作られるトーラス上の絡み目に対してライデマイスターの定理が成り立つことが知られている。本講演では平面充填を用いた weave の組み合わせ的構成法について説明した後、基本領域内の交点の情報を用いて同値関係について調べた結果を紹介する。

1. Introduction

Weave とは 3 次元空間に埋め込まれた二重周期を持つ無限個の曲線の集合であり，各成分は $\mathbb{R}$ と同相であるものをいう．Weave はその周期性から weaving motif と呼ばれる基本領域を与えることができる．Grishanof-Meshkov-Omelchenko や Mortin-Grishanov, 河内氏によって結び目理論を用いた weaving motif の研究が行われており，トーラス上のライデマイスター変形や多変数アレクサンダー多項式，Kauffman bracket を用いた分類 [1, 2, 3] が進められている．特にライデマイスター変形による同値類は実際の編み物の性質を変えることはなく，光沢のないプレーン織りや光沢のあるサテン織り (図 1) といった物性の違いを数学的モデル化を行うことで調べることができる．

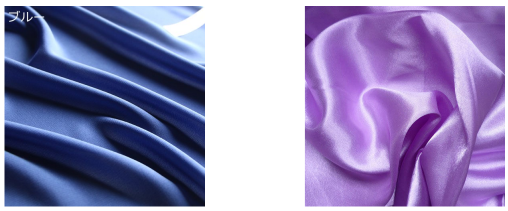


Figure 1. 平織り (左) とサテン織り (右)

本論文では geodesic weave と呼ばれる weave を定義し，性質を調べる．

定義 1.1. N を 2 以上の自然数とし，T_i $(1 \leq i \leq N)$ を $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ に埋め込まれた曲線の族とする．平面内のアイソトピーを除いて次を満たすある射影 $p : \{(x, y, z)\} \to \{(x, y, 0)\}$ が存在するとき，各 T_i を colored geodesics, $T = (T_1, \cdots, T_n)$ を geodesic weave と呼ぶ．

(0) $p(T)$ は平面上の二重周期を持つ 4 価正則グラフである．
(1) 全ての i, j に対し $p(t_i^j)$ は平面内の直線である．
(2) 全ての i, j, k に対し $p(t_i^j) \cap p(t_i^k) = \emptyset$ $(t_i^j, t_i^k \in T_i)$.

定義で用いた射影 p を用いて weaving diagram を定義する．

定義 1.2. T を geodesic weave とする．$p(T)$ の各交点に T 由来の上下の情報を与えたものを *weaving diagram* という．また，その基本領域を *weaving motif* と呼ぶ．

注意 1.3. Geodesic weave と weaving diagram は 1:1 対応である．

Weave の同値類を $\mathbb{R}^3$ 上のアンビエントアイソトピーで移り合うものとして定義すると，以下のことが知られている．

定理 1.4 (Mortin-Grishanov [3])**.** 2 つの weave T_1 と T_2 が同値であるための必要十分条件はそれぞれの weaving motif がトーラス上のライデマイスター変形 (図 1) とトーラスツイスト，及びトーラス上のアイソトピーを用いて移り合うことである．

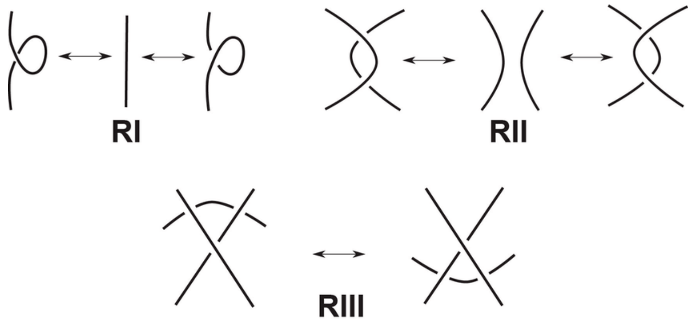


Figure 2. トーラス上のライデマイスター変形

2. Crossing matrix

前章で述べたように weaving diagram や weaving motif は geodesic weave と 1:1 対応がある．そこで平面内の 4 価グラフに対して交点に上下の情報を与えたときに復元される geodesic weave が一意に定まるかどうかを考えたい．その準備として以下の 2 つを定義する．

定義 2.1. ある geodesic $\gamma_i^k \in \Gamma_i$ に対し，Γ_j に対し交差列 $C_{i,j}^k$ を次のように定義する．

(i) γ_i^k が Γ_j の全ての成分より上を通るとき，$C_{i,j}^k = (1, 0)$,

(ii) γ_i^k 上で，ある交点 $c = \gamma_i^k \cap \gamma_j^l$ から隣接する p_n 個の交点全てで γ_i^k は Γ_j の成分の上を通り，次の p_{n+1} 個の交点では γ_i^k は Γ_j の成分の下を通り，更に次の p_{n+2} 個の交点では γ_i^k は Γ_j の成分の上を通る $\cdots$ とき，$C_{i,j}^k = (\cdots, p_n, -p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots)$.

G_i 上の交点がどの G_j $(1 \leq j \leq N)$ と交わっているかを調べるために次を定義する．

定義 2.2. ある geodesic $\gamma_i \in G_i$ に対し $v_{i,j} = \gamma_i \cap \gamma_j$ とする． 添字 i に対して空でない $v_{i,j}$ を並べたもの $V_{i,j} = (v_{i,j_1}, \cdots, v_{i,j_n})$ を *vertex sequence* という．更に $V_{i,j}$ 全ての集合を V と書くことにする．

V によって平面内の 4 価正則グラフを構成することができ，交点列の情報を C によって付加すること weaving diagram が構成できる．

例 2.3 (カゴメ格子)．$V_1 = (v_{1,2}, v_{1,3})$，$V_1 = (v_{2,3}, v_{2,1})$，$V_1 = (v_{3,1}, v_{3,2})$ とし，$V = (V_1, V_2, V_3)$ とする．また全ての k に対して $C^k_{1,2} = C^k_{2,3} = C^k_{3,1} = (1, -1)$ とする．このとき，V を用いて図 2 の上側のように交点を決定していくことによりカゴメ格子を得る．次に C を用いて図 2 の下側のように交点の情報を付与することで weaving diagram が構成できる．

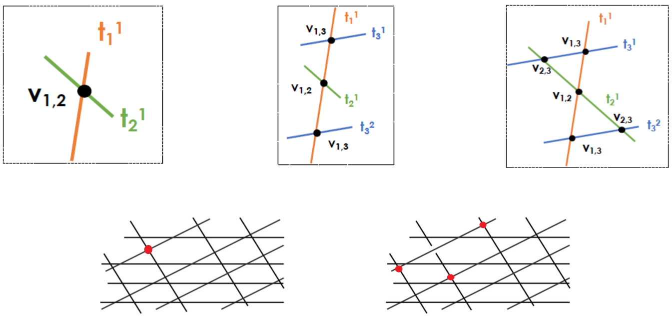
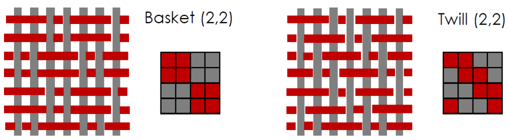


FIGURE 3. Vertex sequence から 4 価正則グラフを作る (上) と交点の情報を与える (下)

定理 2.4. $C = \{C^k_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq N\}$ とする．Weaving diagram は C と V によって構成できる．

注意 2.5. 定理 2.4 では weave は一意に決まるとは限らない．実際，Bascket(2,2) と Twill(2,2) は同じ V, C から構成できるが weave としては異なる．



定義 2.6. D_W を weaving motif とする．次で定まる行列 $M_{ij} = (m_{kl}) \in M(n_i, n_j; \{0, \pm 1\})$ を D_W の (i,j)-*crossing matrix* という．

(i) 各成分 m_{kl} は $t^k_i \in T_i$ と $^l_j \in T_j$ の交差の情報で決まる．
(ii) $t^k_i \in T_i$ が $^l_j \in T_j$ の上 (もしくは下) を通るなら $m_{kl} = 1$ (もしくは -1)．
(iii) $t^k_i \in T_i$ が $^l_j \in T_j$ 交差しないなら $m_{kl} = 0$．

注意 2.7. Weaving motif の鏡映に対する crossing matrix は $-{}^tM_{ji}$ である．

定理 2.8. 同じ交差列から定まる geodesic weave T と T' が同値であるための必要十分条件は　それぞれの crossing matrix の集合が次の操作を除き集合として一致することである．

(i) 行または列の一斉巡回置換.
(ii) 行列の一斉シフト.
(iii) 行列の一斉転置.
(iv) 全ての行列の成分の符号の入替.

Proof. Geodesic weave では ライデマイスター変形の RI と RII は起こらない．また，crossing matrix が 2 つの colored geodesics によって定義されるため， RIII を行っても crossing matrix は変化しない．よって motif の取り替え操作とトーラスツイストによる変化を見れば良いが，操作 (i) が weaving motif の平行移動，操作 (ii) がトーラスツイストに対応した操作であるため主張が成り立つ．最後の操作 (iii) と (iv) はそれぞれ weaving motif の回転と鏡映に関するものである． □

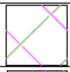
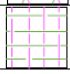
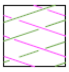
References

[1] S.A. Grishanov, V.R. Meshkov, A.V. Omel'Chenko, *Kauffman-type polynomial invariants for doubly periodic structures*, J. Knot Theory Ramifications. **16** (2007) 779–788.

[2] A. Kawauchi, *Complexities of a knitting pattern*, Reactive and Functional Polymers, **131** (2018) 230–236.

[3] H.R. Morton, S.A. Grishanov, *Doubly periodic textile structures*, J. Knot Theory Ramifications. 18 (2009) 1597–1622.

CLASSIFICATION SQUARE WEAVING DIAGRAMS: |T| = 2

Set of Crossing Sequences	Crossing number (Writhe)	Minimal Diagram	Set of Crossing Matrices	Matrices	Number of Crossings by S.C.C.	Number of S.C.C. for Each Set on the Minimal Diagram	Name
{(1,1)}	2 (0)		$\left\{\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}\right\}$	Rank = 1	2	1 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (1,1)
{(2,1)}	3 (1)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 3 "Diagonal configuration"	3	1 *Ex: (2,1) and (-1,1)*	Twill Square Weaving (1,1)
{(2,2)}	4 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 2 "Diagonal configuration"	4	1 *Ex: (2,1) and (-2,1)*	Twill Square Weaving (2,2)
{(2,2)}	8 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 1	4	2 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (2,2)
{(3,1)}	4 (2)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 4 "Diagonal configuration"	4	1 *Ex: (2,1) and (-2,1)*	Twill Square Weaving (3,1)
{(3,1)}	16 (8)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 4	4	4 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Satin Square Weaving (3,1)
{(3,2)}	5 (1)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (1,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (3,2)
{(3,3)}	6 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 3 "Diagonal configuration"	6	1 *Ex: (3,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (3,3)
{(3,3)}	18 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 1	6	3 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (3,3)

CLASSIFICATION SQUARE WEAVING DIAGRAMS: |T| = 2

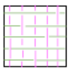
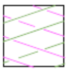
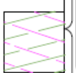
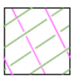
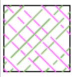
Set of Crossing Sequences	Crossing number (Writhe)	Minimal Diagram	Set of Crossing Matrices	Matrices	Number of Crossings by S.C.C.	Number of S.C.C. for Each Set on the Minimal Diagram	Name
{(4,1)}	5 (3)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (1,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (4,1)
{(4,1)}	25 (15)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5	5	5 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Satin Square Weaving (4,1)
{(4,2)}	6 (2)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	6	1 *Ex: (3,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (4,2)
{(4,3)}	7 (1)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 7 "Diagonal configuration"	7	1 *Ex: (4,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (4,3)
{(4,4)}	8 (0)		$\left\{\begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$	Rank = 4 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (2,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (4,4)
{(4,4)}	32 (0)		$\left\{\begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}\right\}$	Rank = 1	5	4 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (4,4)

FIGURE 4. 正方格子から作れられる weave の交点数テーブル