Successively almost positive links

伊藤　哲也　(京都大学理学研究科)*

1. 導入：図式により定義される結び目のクラスとその性質

（本稿では、特に断らない限り、簡単のために結び目の場合に限って議論を書くことにする。全ての話は適切に設定・解釈したり、妥当な仮定（non-split など）をつけることで絡み目の場合に容易に拡張される。）

本稿では、筆者の導入した連続的概正結び目 [8] について、講演とは少し異なる立場および視点から、筆者の関連する結果等を含めてその背景の解説を与える。

1.1. 交代的な結び目と正的な結び目

結び目理論においては、結び目がある特別な図式で表示される場合、その図式の特別性から様々な特徴的な性質を持つことが頻繁に起こり、特定の図式や表示を経由して定義される結び目のクラスは数多い。これらの結び目の図式などで定義されるものは、大別すると交代的（Alternating）な性質か、正（Positive）の性質を持つもの（あるいはその両方の性質を持つもの）の二種類に分けられる。

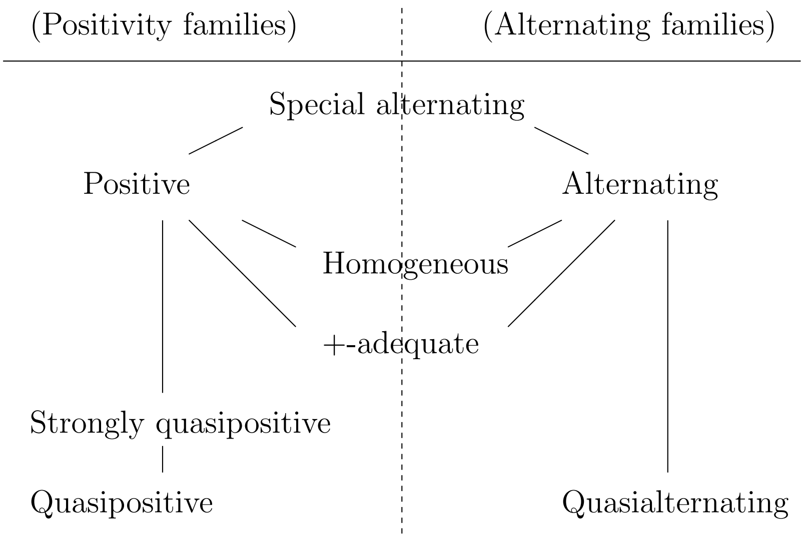

図 1: Diagrammatic class of links　（ごく一部）

この中で、(special) alternating/homogeneous knot たちは『alternating と positive 両方の側面を持つような図式』となるもののある意味で一番広いものと考えられる。弱い意味での positivity を持ち、かつ alternating(or, homogeneous) となるものは実際はすべて positive である（あろう）ということが証明あるいは予想されている;

- Strongly quasipositive かつ homogeneous な結び目は positive である。[1]

本研究は科研費 (課題番号:19K03490 の助成を受けたものである。
* 〒 606-8502　京都市左京区北白川追分町
e-mail: `tetitoh@math.kyoto-u.ac.jp`

- (予想) Quasipositive かつ alternating な結び目は positive である
  - K が Seifert circle の数$=K$ の braid index となるような交代図式を持つとき、予想は正しい (Orevkov [12])
  - より一般に、Murasugi-Przytycki の予想「交代図式 D から定まる K の braid index の下からの評価は常に実際の braid index を与えている [11]（交代図式から braid index が求められる）」が正しいならばこの予想は正しい [7]。
- (予想) Quasipositive かつ homogeneous な結び目は positive である
  - K が Seifert circle の数$=K$ の braid index となるような交代図式を持つとき、予想は正しい。より一般に、Murasugi-Przytycki による結び目図式から得られる maximum self-linking number の評価式が等式となるような場合にはこの予想は正しい。[7]

また、これらの概念の一般化として結び目の図式（のクラス）$\mathcal{D}$ について、k 個の交差交換を行うと $\mathcal{D}$ に属するような図式を k-almost $\mathcal{D}$ と呼ぶ。特に $k=1$ の時は almost$\mathcal{D}$ と呼ばれ、元の結び目のクラス $\mathcal{D}$ と近しい性質が成り立つことが多く、盛んに研究されている。

1.2. 内在的特徴づけ

これらの図式により定義された結び目のクラスの図式を用いない内在的な特徴づけを与える (あるいは、与えられた結び目がこのような特別なクラスに属しているか判別するアルゴリズムを与える) ということは基本的な問題である。これは、結び目の図式から得られる様々な性質や不変量についてのどれがその結び目を特徴づけているのか？ということを考察することでもあり、結び目の不変量の性質を理解するうえでも重要になる。

- 交代結び目については Howie [5],Greene [3] により独立に (non-orientable) spanning surface を用いて特徴づけが与えられた。多少強引ではあるものの、筆者により概交代結び目の特徴づけも同様の方法で与えられた [6]。また、Kim [10] によりトーラス的交代結び目の特徴づけ及び、概交代結び目の筆者のものとは異なる特徴づけが与えられている。
- Strongly quasipositive については、Bennequin 不等式が等式となること:$SL(K)=2g(K)-1$ となることが同値だろうと予想されている。
- Quasipositive については slice Bennequin 不等式が等式となること：$SL(K)=2g_4(K)-1$ となることが同値だろうと予想されている。(これらの予想については [4] でいくつかの考察と特別な場合の証明等を与えた)

一方、最も基本的な正結び目については、様々な性質が知られてはいるが、それを特徴づける性質については予想すら建てられないのが現状である。実際に、後述するように、正結び目と概正結び目は非常に多くの性質を共有するため、正結び目のこれまで知られている様々な性質たちが逆に正結び目を特徴づける、といったことは到底期待できない。

そこで、今度は正結び目の特徴づけではなく、正結び目について成り立つ性質が一体どのくらいまで「図式が正」といった条件を緩めても成立するのかを考えてみることで、正結び目の性質がどれだけ図式の性質を強く反映しているかを考えてみる。このような問題意識から、概正結び目のさらなる（そして安直な）拡張である2-概正結び目を考えてみると、これは正結び目の良い拡張とは言えないことがすぐに分かる（例えば、8の字結び目は2-概正であるが、正結び目の性質の多くが成り立たない）。

本稿で導入・紹介する、（good）連続的概正結び目は、正結び目の持つ性質のほとんどを共有する結び目（の図式）のクラスである。連続的概正結び目は[9]において、Dehn surgeryによりgeneralized torsion元を構成する、という手法が適用できるような正結び目の一般化として現れた。その後、[9]で与えた正結び目の一般化について、実際に正結び目のほとんどの性質が一般化されることに気づき、「連続的概正結び目」としてその性質を調べまとめたのが[8]である。

2. 連続的概正結び目とその性質

Definition 1. 結び目の図Dの交点はk個を除きすべて正であり、k個の負の交点が1つのoverarcにそって連続して現れるとき、Dを**連続的k-概正結び目図式**であると呼ぶ。さらに、各負の交点cに対し、cでつながれているDのSeifert circleをs, s'とするとsとs'はc以外の交点でつながっていない、という条件を満たすとき、Dを**良い**連続的k-概正結び目図式と呼ぶ。

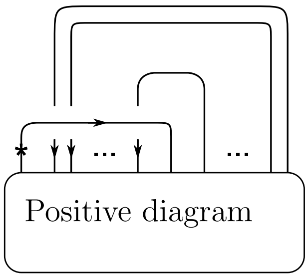

図 2: 連続的概正結び目図式

このように定義した連続的概正図式D及び良い連続的概正結び目については、正結び目についての手法、証明や結果を（適切な理解や設定の下で）比較的容易に拡張することができ、次のような性質を持つことがわかる。証明や詳細については[8]に簡潔にまとめているので、そちらを見てほしい。ここでは性質を列挙していくにとどめる。

- Conway多項式$\nabla_K(z)$の係数はすべて非負
- Levine-Tristram signature $\sigma_\omega(K)$は全て非正

さらに、良い連続的k-概正結び目については

- Dの標準的なSeifert曲面S_D（Seifertのアルゴリズムで得られるSeifert曲面）は最小種数；$g(S_D) = g(K)$.
- Kはstrongly quasipositive

- $\max \deg_z \nabla_K(z) = 2g(K)$
- K の HOMFLY 多項式 $P_K(v,z)$ について $\min \deg_v P_K(v,z) = \max \deg_z P_K(v,z) = 2g(K)$.

これらの考察の仮定や帰結として、正結び目あるいは概正結び目についても新しい結果や拡張を得ることができる。

- 概正結び目について $\min \deg_v P_K(v,z) = 2g(K)$ ([14, Question 2] の肯定的解答)
- good ではない概正結び目（より一般に good とは異なる適当な条件を満たす連続的概正結び目）について

  (HOMFLY 多項式の $v^{-2g(K)}z^a$ の係数) = (Kauffman 多項式の[1] $v^{-2g(K)}z^a$ の係数)

  (正結び目についての横田氏 [16] の結果の一般化:田神氏による概正結び目の Lagrangian fillability[15] の話と関連し、Legenrian 結び目の観点からみると簡潔に証明できる。)
- D を非自明な結び目 K の既約結び目図式とするとき、

$$\sigma(K) \leq -\frac{g(S_D)}{6} + \frac{4}{3}c_-(D) - \frac{1}{2}$$

  が成り立つ。ここで $c_-(D)$ は D の負の交点の数である。（正結び目について [2] の結果の拡張・改良）
- Topological knot concordance class $\mathcal{K}$、$k \leq dg_4^{top}(\mathcal{K})$, $d < \frac{1}{9}$ について、$\mathcal{K}$ に属する連続的 k-概正結び目の個数は有限個（$k=0$、正結び目の [2] の拡張)。ここで

$$g_4^{top}(\mathcal{K}) = \min\{g(K) \mid K \in \mathcal{K}\}$$

  は topological concordance genus。

さて、ここで見たように、（良い）連続的概正結び目は概正結び目と多くの共通した性質を持つため、与えられた連続的概正結び目が概正結び目あるいは正結び目ではないことを示すのは簡単ではない。（実際に、与えられた概正結び目が正結び目ではないことを示すのもそれほど容易ではない。）論文の最初の版を arXiv に上げたのち、Stoimenow 氏により実際に良い連続的 2-概正結び目であるが、概正結び目ではないような結び目の例が与えられた（現在具体例についてはその詳細を確認し、論文に追加中である)。

その証明では、与えられた $g>0$ について $g(S_D)=g$ となるような既約な結び目図式は有限の結び目図式について $\bar{t}_N$-move (図 3) により得られる、ということを利用している : 正の交点を増やしていくような $\bar{t}_N$-move は Conway 多項式の係数 $a_2(K)$ といった有限型不変量を単調に増加させていくことが知られているので、与えられた結び目 K について、$g(K)=g(S_D)$, $a_2(K)=a_2(D)$ となるような（良い連続的）概正結び目図式の数は有限個である。従って、原理的には有限の可能性をすべてチェックすることで K が概正結び目かを判定できる、というわけである（もちろん、実際に計算するのは大変であり、種数が低くないと計算量が爆発的に増えてしまう)。

[1] 正確には Dubrovnik 多項式と呼ばれる Kauffman 多項式の別の正規化について

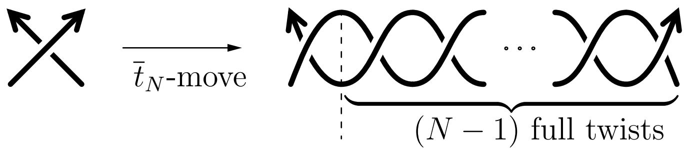

図 3: $\bar{t}_N$-move: 交点を $(2N-1)$ 個の連続した正（あるいは負）の交点に置き換える

3. 今後の問題

（良い）連続的概正結び目は正結び目の拡張として、面白い意味のあるクラスであることが分かったので、その性質をさらに調べていくことは今後の課題となるだろう（し、実際に手を動かすことも可能だろう）。いくつか明らかな問題を挙げて本稿を終える。

- 良い連続的概正結び目について示された性質はどのくらいまで一般の連続的概正結び目に成り立つだろうか？
- 正結び目の性質で、（良い）連続的 k 概正結び目には拡張できないような性質は何か？このような性質は、正結び目の特徴づけを考える際に有用になるだろう。
- （Stoimenow 氏のような全部の可能性を確認する、という方法ではなく）連続的 k 概正結び目と連続的 $(k-1)$ 概正結び目を判別するもっと良い方法はないか？
- 交点数が低い結び目（結び目の表）や特定の結び目のクラス（pretzel 結び目など）についてどれが連続的概正結び目か調べてリストアップせよ。

参考文献

[1] S. Baader, *Quasipositivity and homogeneity,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 139 (2005), no. 2, 287–290.

[2] S. Baader, P. Dehornoy, and L. Liechti, *Signature and concordance of positive knots.* Bull. Lond. Math. Soc. 50 (2018), no. 1, 166–173.

[3] J. Greene, *Alternating links and definite surfaces.* With an appendix by András Juhász and Marc Lackenby. Duke Math. J. 166 (2017), no. 11, 2133–2151.

[4] J. Hamer, T. Ito, and K. Kawamuro, *Positivities of knots and links and the defect of Bennequin inequality,* Experiment. Math. to appear.

[5] J. Howie, *A characterisation of alternating knot exteriors.* Geom. Topol. 21 (2017), no. 4, 2353–2371.

[6] T. Ito, *A characterization of almost alternating knots.* J. Knot Theory Ramifications 27 (2018), no. 1, 1850009, 13 pp.

[7] T. Ito, *On homogeneous quasipositive links,* arXiv:2007.03962

[8] T. Ito, *Successively almost positive links* arXiv:2111.14361.

[9] T. Ito, K. Motegi, and M. Teragaito, *Generalized torsion and Dehn filling,* Topol. Appl. 301 (2021) 107515.

[10] S. Kim, *A topological characterization of toroidally alternating knots.* Comm. Anal. Geom. 27 (2019), no. 8, 1825–1850.

[11] K. Murasugi and J. Przytycki, *An index of a graph with applications to knot theory,* Mem. Amer. Math. Soc. 106 (1993), no. 508, x+101 pp

[12] S. Yu. Orevkov, *On alternating quasipositive links,* Doklady Math. 102 (2020), no.2, 404–405.

[13] J. Przytycki and K. Taniyama, *Almost positive links have negative signature.* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 2, 187–289.

[14] A. Stoimenow, *On polynomials and surfaces of variously positive links,* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 7 (2005), no. 4, 477–509.

[15] K. Tagami, *On the Lagrangian fillability of almost positive links.* J. Korean Math. Soc. 56 (2019), no. 3, 789–804.

[16] Y. Yokota, *Polynomial invariants of positive links,* Topology 31 (1992), no. 4, 805–811.