

組紐指数3の結び目の影に関する研究

中村将士（岐阜大学大学院教育学研究科）
（花木良氏（岐阜大学教育学部）との共同研究）

概要

交点の上下の情報がない結び目のダイアグラムを結び目の影と呼ぶ. 本稿では, 組紐指数3の影の交点に上下をつけて得られる結び目の影の集合について考察する. 自明な結び目の出てくる確率などについて紹介する.

1 はじめに

1.1 定義

3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある有向な結び目 K を考える. ダイアグラムのすべての交点で上下情報がないもの（前交点 [precrossing]）を, 影 [shadow] という. 一部の交点で上下情報がないものを準射影図 [pseudo diagram] という ([2]). 準射影図は, ダイアグラムと影を含む. 準射影図 Q の前交点に上下情報を与えて得られるダイアグラムやそれが表す結び目は, Q から得られる [obtained from Q , resolution] という. 図1では, Q_4 は Q_1 から得られる. また, Q_4 は Q_2 から得られる. Q_3 も Q_1 と Q_2 から得られる.

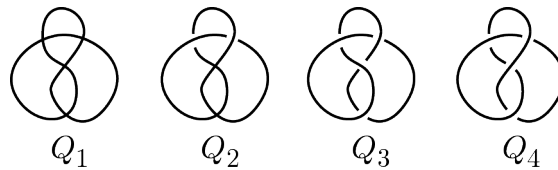


図 1: 準射影図, 準射影図から得られる

1.2 研究動機

前交点の数が n の 2-braid の影 B を閉包した影から得られる結び目を考えたい. このとき得られる結び目の射影図 D に対し, $N = |(D \text{ の 正 の 交 点 の 個 数 }) - (D \text{ の 負 の })|$

N	得られる結び目	確率
1	0_1	$n C_{\frac{n-1}{2}} / 2^{n-1}$
3	3_1	$n C_{\frac{n-3}{2}} / 2^{n-1}$
5	5_1	$n C_{\frac{n-5}{2}} / 2^{n-1}$

表 1: 得られる結び目

交点の個数) | とすると表 1 のような結果が得られる [3].

このように 2-braid の影は交点の上下の与え方によって, どのような確率でこれらの結び目が得られるかわかる. しかし, 3-braid の影では, これほど容易に判断できない. そこで本稿では 3-braid の影から得られる結び目の種類やそれが得られる確率を考察する.

1.3 影の研究に関する先行研究

先行研究を紹介する.

定義 1.1. $PROJ(L)$ を絡み目 L の影の集合とする.

L_1 は L_2 より小さい [minor] ($L_1 \leq L_2, L_2 \geq L_1$) $\Leftrightarrow PROJ(L_1) \supset PROJ(L_2)$

このとき, L_2 は L_1 より大きいという [7].

$\mathcal{L}^\mu$ を μ 成分の絡み目の集合としたとき, $(\mathcal{L}^\mu, \leq)$ は半順序 (対称律, 推移律) である. また, K を非自明な結び目としたとき, 次の 4 つ定理が成り立ち, 図 2 のハッセ図を得た [7].

定理 1.2. K は 3_1 より大きい

定理 1.3. K は 4_1 より大きい

$\Leftrightarrow K$ は $(2, p)$ トーラス結び目以外の素な結び目を含む

定理 1.4. K は 5_1 より大きい

$\Leftrightarrow K$ はプレッツェル結び目 (p_1, p_2, p_3) 以外の素な結び目を含む

定理 1.5. K は 5_2 より大きい

$\Leftrightarrow K$ は $(2, p)$ トーラス結び目と 4_1 以外の素な結び目を含む

また 6_2 に関しては次の定理が成り立つ [6].

定理 1.6. $PROJ(6_2) =$ 結び目の影全体の集合から図 3 の 6 種類の連結和を引いたもの

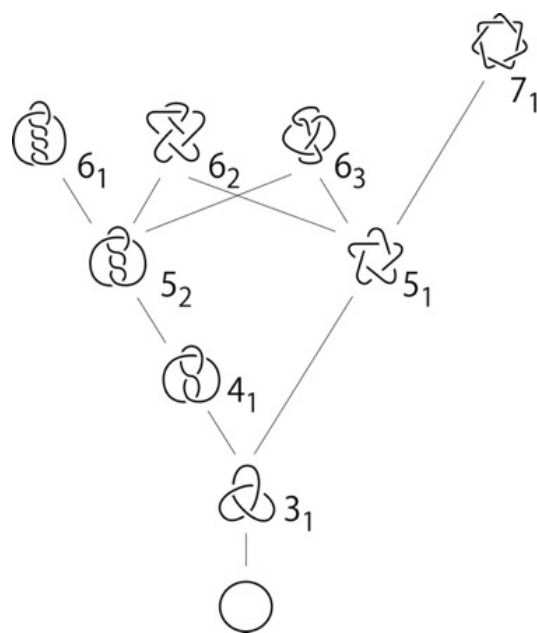


図 2: 結び目の半順序

準射影図に対して, ライデマイスター移動に加え, 図 4 を許したものを準結び目 [pseudoknot] という [3].

そして,

$$\text{WeRe-set}(Q) = \{(K, p_k) | K : Q \text{ から得られる結び目}, p_k \text{ は } K \text{ が得られる確率} \}$$

と定め, これを Q の重み付き集合 [Weighted Resolution set] という.

9 交点以下の影と準射影図から得られる結び目の集合はすべて調べられており, 9 前交点以下の結び目の影では, 自明な結び目は 3_1 より多く出てくる. しかし, 図 5 の影は 3_1 の方が自明な結び目より多く得られることが知られている.

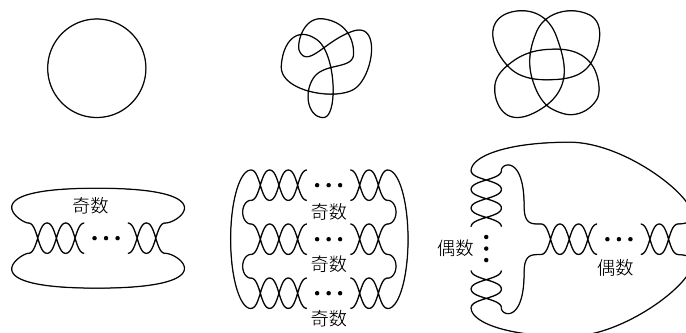


図 3: 6_2 を得られない影



図 4: 準射影図のライデマイスター移動

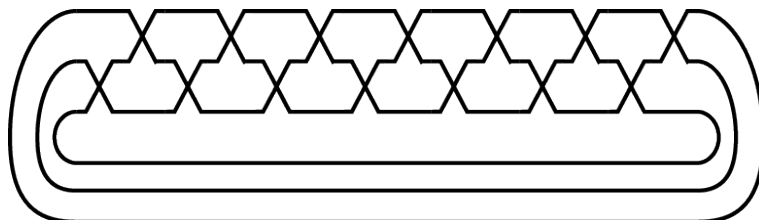


図 5: 3_1 の方が自明な結び目より多く得られる影

また, 図 6 の 9_{40} 影では 3_1 より 4_1 が得られる確率が高くなることが知られている [1].

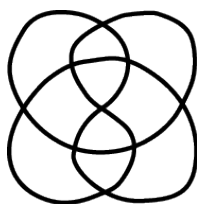


図 6: 9_{40} の影

n 個の前交点をもつ影から得られる自明な結び目の確率を $p(n)$ とすると, $n \rightarrow \infty$ のとき $p(n) \rightarrow 0$ であることが示されている [5]. n 個の前交点をもつ影から得られる影から得られる自明な結び目の個数は $2^{\frac{1}{3}n}$ 以上であることが示されている [4].

2 研究成果

2.1 3-braid の影の表記

まずは 3-braid の影の表記を導入する.

定義 2.1. 図 7 のような 3-braid の影 B を非負整数の組 $A_1 B_1 A_2 B_2 \cdots B_m$ で表す. 各 A_i, B_i を成分といい, $2m$ を成分の個数という.

以降本稿では B は 3-braid の影を表す.

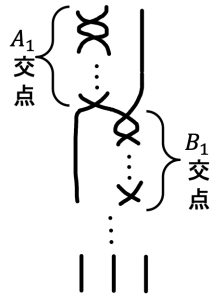


図 7: 3-braid の影

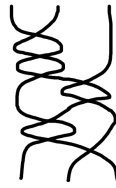


図 8: 3221 で表される影

B が合成とは, B を閉包したダイアグラムと 2 点で交わる円周で内側にも外側にも前交点を含むものが存在するときのことをいい, また合成でない場合を素という. 成分に 0 を含まないとき, 合成であるための必要十分条件は成分の個数が 2 である.

2.2 得られる結び目の確率の比較

10 交点以下の 3-braid の影は合成のものも含めて以下の 43 通りある.

前交点数	組紐表記
2	11
4	31, 1111
6	51, 33, 3111, 2211
8	71, 53, 5111, 4211, 3311, 3221, 3131, 221111, 212111, 11111111
10	91, 73, 7111, 6211, 55, 5311, 5221, 5131, 4411, 4312, 4231, 421111, 412111, 3331, 3322, 322111, 321211, 321112, 312211, 312121, 31111111, 222211, 221221, 21211111, 21121111, 1111111111

これらの影から出てくる結び目とその数を調べた. 自明な結び目が出てくる確率をまとめると以下のようなになる. * は素に限定した場合を示す.

前交点数	最大値	最小値
4	75% (31,1111)	75% (31,1111)
6	56.25% (33,2211)	62.5% (51) 59.38% (3111*)
8	34.38% (11111111)	54.69% (71) 50.78% (5111*)
10	29.10% (31111111)	49.21% (91) 45.12% (7111*)

$p(K, S)$ を S から得られる結び目 K の確率で表す.

命題 2.2. 10 交点以下の任意の 3-braid の影 S に対しては次が成り立つ.

- (1) $p(3_1, S) > p(4_1, S)$
- (2) $p(O, S) \geq p(3_1, S)$ (等号成立は $S = 55$)

合成な 3-braid の影に対して, 次の命題が成り立つ.

命題 2.3.

- (a) $m \geq 5, n \geq 5$ のとき, $p(O, mn) \leq p(3_1, mn)$ (等号成立は $m = n = 5$)
- (b) $k \geq 9, l = 3$ のとき, $p(O, kl) \leq p(3_1, kl)$ (等号成立は $k = 9$)

(a), (b) を当てはまらないような合成な 3-braid の影は 3_1 より自明な結び目が多く得られる. 一方, 素な影についても 3_1 の方が多く得られる影は存在する. 以下の命題が成り立つ.

命題 2.4.

- (ア) $m \geq 5, n \geq 5$ のとき, $p(O, mn22) < p(3_1, mn22)$
- (イ) $k \geq 7, l = 3$ のとき, $p(O, kl22) < p(3_1, kl22)$

2.3 得られた定理

$\mathcal{K}_B = \{B \text{ に上下を入れて閉包して得られるダイアグラムで表現される結び目}\}$ と定める. B の成分に 0 を含まないとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 2.5. $4_1 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow B$ の成分の個数が 4 以上である.

定理 2.6. $5_1 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow B$ が 33 ではなく, 前交点が 6 以上である.

定理 2.7. $5_2 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow B$ の成分の個数が 4 以上かつ前交点が 6 以上である.

定理 2.8. $6_2 \in \mathcal{K}_B \Leftrightarrow B$ の成分の個数が 4 以上かつ前交点が 6 以上である.

これら 4 つの定理が得られた. これらの定理を示すために包含を定義する.

定義 2.9. B が B' を包含している ($B \subset B'$) とは, 次の変形を使って, B から B' が得られるときをいう.

- ① B の成分を -2 する
- ② 111111 を取り除く
- ③ 0 を取り除き, 0 の前後の成分はそれらの和に置き換える
 - ・ $A_1 = 0$ のときは, B_1 と B_n の和を新たに A_1 とし, A_1 と B_1 と B_n を消去
 - ・ $B_n = 0$ のときは, A_1 と A_n の和を新たに A_1 とし, A_1 と A_n と B_n を消去
- ④ $A_i \rightarrow B_i, B_i \rightarrow A_{i+1}, B_m \rightarrow A_1$ と置き換える
- ⑤ $A_1 \rightarrow A_1, B_i \rightarrow B_{m-i+1}, A_i \rightarrow A_{m-i+2}$ と置き換える

組紐の包含に関して, 次の命題が成り立つ.

命題 2.10. B が B' を包含しているとき, $\mathcal{K}_{B'} \subset \mathcal{K}_B$

(証明) B に①～⑤の各変形をしたときに得られた B' に対し, $\forall K \in \mathcal{K}_{B'}$ とする.

①, ②は次のように部分的に上下をつけることに等しい. ③は組紐の影上では以下のような変形を表す. ④, ⑤については閉包すると同一の影を表す. よっていずれの変形においても $K \in \mathcal{K}_B$ である. $\square$

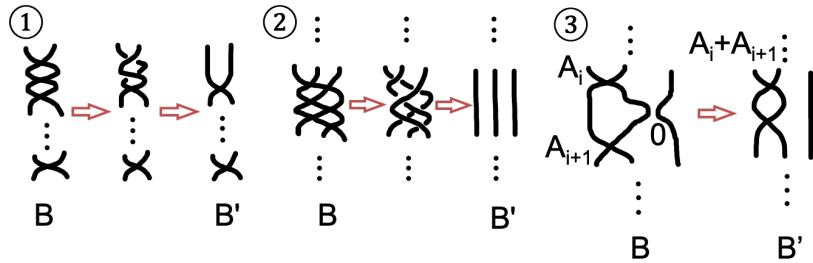


図 9: 前交点の一部に上下を付けて変形

定理 2.5～2.8 を証明するために次の補題を示す.

補題 2.11. 任意の B に対して, $11 \subset B$ または $1111 \subset B$ が成り立つ.

(証明) B に 1 以外の成分が含まれているとき, ①または, ③を適用できる. そのため B に①, ③を繰り返し用いると成分が 1 のみの影 B' ができる. この B' に対して②を繰り返し用いると 11 または 1111 が得られる. $\square$

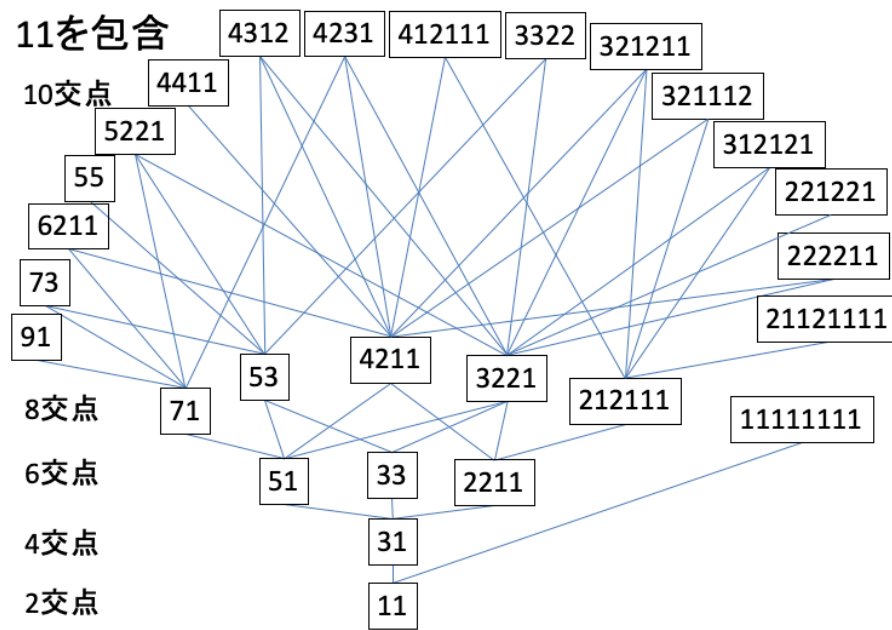


図 10: 11 を包含するもの

図 10 と 11 はそれぞれ 11, 1111 を包含するときの包含関係を図示したものである.

(定理 2.5 の証明)

($\Rightarrow$) B の成分の個数が 2 のときは, トーラス結び目の合成のみが得られるので, $4_1 \notin \mathcal{K}_B$ である.

($\Leftarrow$)

・ 11 を包含するとき

B の成分が 4 以上だから 2211 または 11111111 を包含する. $4_1 \in \mathcal{K}_{2211}, 4_1 \in \mathcal{K}_{11111111}$ である. よって $4_1 \in \mathcal{K}_B$.

・ 1111 を包含するとき

$4_1 \in \mathcal{K}_{1111}$ であるから $4_1 \in \mathcal{K}_B$. $\square$

定理 2.6, 2.7 と 2.8 の証明も, 包含を使い, 示すことができる.

参考文献

- [1] A.Ducharme and E.Peters (2020) Combinatorial random knots : Involve 13, 633-654.

1111を包含

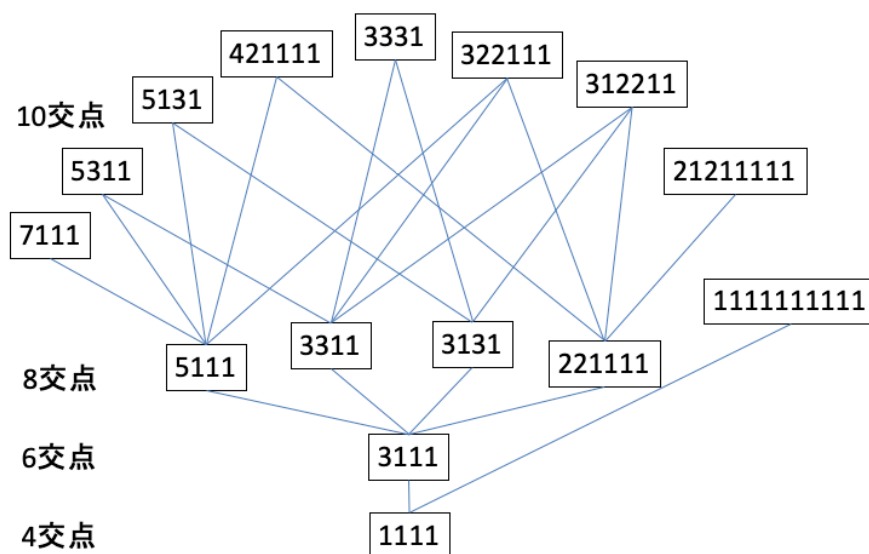


図 11: 1111 を包含するもの

- [2] R.Hanaki (2010) Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs, Osaka Journal of Mathematics 47, 863-883.
- [3] A.Henrich, R.Hoberg, L.Johnson, E.Minten and L.Radovic (2013) The theory of pseudoknots : Journal of Knot Theory and its Ramification 22, 1350032.
- [4] C.Medina, J.R.Alfonsin and G.Salazar (2019) On the number of unknot diagrams : SIAM J. Discrete Math, 33, 306-326.
- [5] N.Pippenger (1989) Knots in random walks : Discrete Applied Mathematics 25, 273-278.
- [6] Y.Takimura (2018) Regular projections of the knot 6_2 : Journal of Knot Theory and its Ramification 27, 18500815.
- [7] K.Taniyama (1989) A Partial Order of Knots : Tokyo J. Math. 12, 205-229.