

Balanced spatial graph の Υ 不変量

久保田 肇

概要

Υ 不変量とは, Knot Floer Homology の理論から得られる結び目のコンコーダンス不変量である. Knot Floer Homology を組み合わせ的に求める Grid homology の理論を用いた, Υ 不変量の組み合わせ的な再構成が Földvári[1] によって考えられている. Grid Homology の balanced spatial graph への拡張を利用して, Υ 不変量の balanced spatial graph への拡張を与える.

1 イントロダクション

1.1 背景

結び目の不変量に, Ozsváth, Szabó[4] と Rasmussen[8] がそれぞれ独立に定義した Knot Floer Homology があり, これは 3 次元多様体とそれに含まれる結び目の組に関する不変量を構成する理論である. Knot Floer Homology より例えば, 結び目の種数やファイバー結び目かどうかを特定したり, アレクサンダー多項式が等しいコンウェイ結び目と木下-寺坂結び目を類別するなどの応用がある. Knot Floer Homology の理論から構成される不変量として, Ozsváth, Szabó[5],[6] によって導入された τ 不変量, Υ 不変量がある.

結び目の滑らかなコンコーダンス類 $\mathcal{C}$ は連結和に関してアーベル群をなす. いずれの不変量も $\mathcal{C}$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像を与え, スライス種数や解消数の下限を与える. 特に τ 不変量は Milnor 予想 $g_4(T_{p,q}) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ を示すことでも知られている. 一方 Υ 不変量は τ 不変量より真に強力な不変量である. この不変量によってトポロジカルなスライス結び目が生成する $\mathcal{C}$ の部分群は $\mathbb{Z}^\infty$ を直和因子に持つことが [6] により示されている. このようにこれら 2 つの不変量はともにコンコーダンス不変量であり, 結び目のコンコーダンスの研究において重要である.

Knot Floer Homology の Ozsváth, Szabó[4] らによる元の定義では擬正則曲線を用いるもので, 一般に定義から直接組み合わせ的に計算できない. 一方, 特に 3 次元多様体が 3 次元球面 S^3 であるとき, 不変量の計算が平面の図を用いて組み合わせ的に計算可能であることを Manolescu ら [3] が示し, このことをまとめた理論として Grid Homology が生まれた. Υ 不変量は Knot Floer Homology の理論で現れる鎖複体から, t-modified 鎖複体と呼ばれる新しい鎖複体を構成して得られる不変量である. この手法を Grid Homology 上で再現する試みが Földvári[1] によって行われた. これによれば $t \in [0, 2] \cap \mathbb{Q}$ に対して不変量 Υ^{Grid} が定義でき, これが Knot Floer Homology における Υ 不変量と同様ないくつかの性質を持つことが確かめられている. Ozsváth, Szabó による Knot Floer 鎖複体から得られる t-modified 鎖複体のホモロジー群が結び目の不変量になるのに対し, Grid Homology における t-modified 鎖複体のホモロジー群は厳密には結び目の不変量とはならない. 具体的には, grid number が 1 つ増える stabilization の操作をするとそのホモロジー群は, t-grading が $1-t$ だけずれたコピーを持つ 2 倍のサイズになる. この点で Grid Homology の t-modified 鎖複体およびホモロジー群は Knot Floer Homology のそれらと微妙に異なる. Grid Homology における Υ^{Grid}

不変量が本来の Υ 不変量と等価であるかは明らかになっていないが、そうであることが期待されている。

特異結び目を含む、向き付けられた結び目および絡み目の拡張にあたるものとして transverse spatial graph が存在する。(図 1 参照) これを対象に、Grid Homology を拡張して不変量を構成する試みが Harvey, O'Donnol[2] によって行われた。さらに transverse spatial graph が balanced という条件を満たす場合、それらに対し Vance[9] が τ^{Grid} を定義できることを明らかにした。これは Grid Homology を用いて与えられたもので、Knot Floer Homology で構成された τ 不変量の拡張となっている。これは Sarkar[?] による Grid Homology を用いた結び目の τ 不変量の再現を拡張したものとなっている。

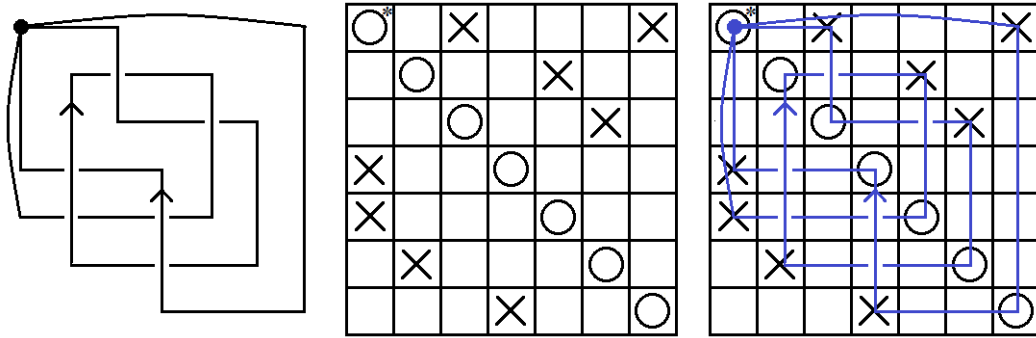


図 1 balanced spatial graph と graph grid diagram

この論文では上に述べた先行研究に基づいて、結び目の Υ 不変量について balanced spatial graph への拡張を、Grid Homology の理論を用いて与える。まず、balanced spatial graph $f: G \rightarrow S^3$ を表す graph grid diagram g から鎖複体 $CF^-(g)$ が [2] により組み合わせ的に定義されている。このホモロジー群は balanced spatial graph の不変量である。これを受けて筆者は $CF^-(g)$ から定まる t-modified 鎖複体 $tCF^-(g)$ を構成する。これは Grid Homology とは異なりホモロジー群が厳密には不変量とはならないが、ホモロジー群から Υ 不変量が定義できることを示した。

$tCF^-(g)$ は Maslov grading と Alexander grading から定まる t-grading による gradingd 鎖複体である。ここでの Alexander grading は本来の [2] による値を $H_1(S^3 - f(G))$ にとるものでなく、[9] で考えられた生成元を 1 に移す準同型 $H_1(S^3 - f(G)) \rightarrow \mathbb{Z}$ により $\mathbb{Z}$ へつぶしたものをを用いる。このとき、結び目を扱う本来の Grid Homology とは異なり、transverse spatial graph では一般に Alexander grading が g の選び方によって定数だけずれる問題がある。そのため同じ f を表す g, g' に対し、 $tCF^-(g)$ と $tCF^-(g')$ の間の対応が t-grading を保つとは限らず、 $tCHF^-(g)$ がただちに t-gradingd 加群としての不変量とはならない。この問題を解決するために、[9] による Alexander grading を固定する手法を導入する。鎖複体 $CF^-(g)$ の Alexander grading をある意味で対称になるように取り直した鎖複体 $CF^{-H}(g)$ を導入し、 $CF^{-H}(g)$ から得られる t-modified 鎖複体 $tCF^{-H}(g)$ を考える。するとそのホモロジー群 $tHF^{-H}(g)$ が t-graded 加群として不変量になることが確かめられ、問題の解決となった。

2 balanced spatial graph の Grid Homology

2.1 graph grid diagram

graph G とは、1 次元 CW 複体で、各辺が向き付けられているものとする。

spatial graph とは、滑らかなあるいは区分的線形な埋め込み $f: G \rightarrow S^3$ のことで、 S^3 内のイソトピーで移り変わるものは同じものとみなす。

定義 2.1. transverse spatial graph とは、spatial graph $f: G \rightarrow S^3$ で、各頂点 v において、 v から出る辺と入る辺とを分離する小さなディスク D がとれるものをいう。

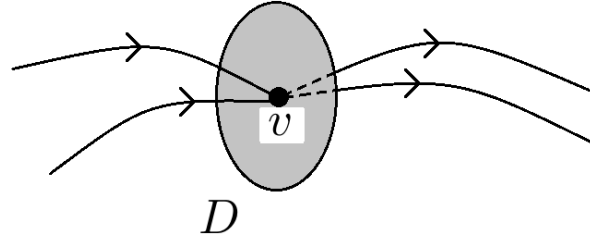


図2 頂点 v とディスク D

定義 2.2. transverse spatial graph が **balanced** であるとは、全ての頂点において入る辺と出る辺の数が等しいときをいう。

以下、 $f: G \rightarrow S^3$ は balanced spatial graph であると仮定する。

定義 2.3. planar graph grid diagram g とは $n \times n$ の平面のマス目で、 n 個の O マークと n 個以上の X マークが、次を満たすようにマス目内に配置されたものをいう；

- (i) 各行および列には O マークが 1 つずつ配置されている。
- (ii) 同じマス目内に O マークと X マークの両方が配置されていない。
- (iii) 各連結成分を構成する O マークには少なくとも 1 つ*がつけられた O^* マークが存在する。
- (iv) 同じ行（または列）に複数の X マークが存在するとき、その行（列）に存在する O マークは O^* マークである。

n を g の **grid number** という。

X マークが配置されたマスの集合を $\mathbb{X}$, O マスが配置されたマスの集合を $\mathbb{O}$ と書く。また、 n 個の O マークにラベル $\{O_i\}_{i=1}^n$ をつけ、 X マークも同様に $\{X_i\}_{i=1}^n$ とする。

g に対し、同じ列にある X マークから O マークへ、同じ行にある O マークから X マークへ有向線分を結び、垂直方向の線分が常に水平方向の線分より手前で交わるとみなすことで、 f の diagram を得る。このとき、 g は f を表す graph grid diagram であるという。

今、 f は balanced spatial graph を仮定しているので、どの O^* マークについてもそれを含む行と列にはそれぞれ同数の X マークが存在する。

定義 2.4. $i = 1, \dots, n$ に対して、 O_i の **重み** m_i を、 g において O_i と同じ列（または行）に存在する X マークの個数と定義する。

定理 2.5 (Proposition 3.3,[2]). 任意の transverse spatial graph $f: G \rightarrow S^3$ に対し、 f を表す graph grid diagram g が存在する。

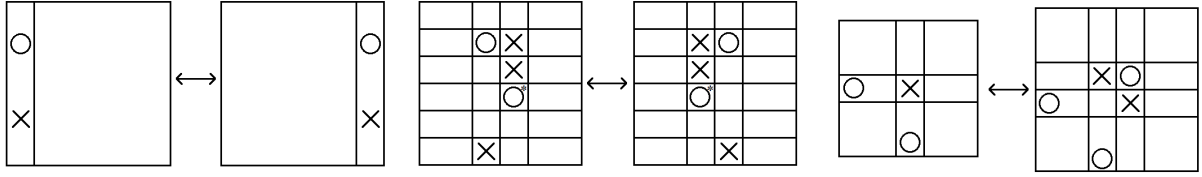


図3 3つの graph grid move

2.2 graph grid move

f を表す graph grid diagram は無数に存在する. 異なる g, g' は, 次で定義される操作で互いに移りあう.

定義 2.6 (Section 3.4,[2]). graph grid diagram g に対して, 次の3つの操作を定義する (図??参照);

1. **cyclic permutation**: g の列または行を巡回的に入れ替える操作.
2. **commutation'**: toroidal diagram g の隣接する2列が次を満たすとき, その2列を入れ替える操作; トーラスの注目している2列内にある垂直方向に伸びる2つの線分 L_1, L_2 が, (1) $L_1 \cup L_2$ が2列全てのOマーク, Xマークを含んでいる, (2) $L_1 \cup L_2$ を一つの β_i へ射影すると β_i が得られる, (3) $\partial(L_1) \cup \partial(L_2)$ の射影による像はちょうど2点からなる, すなわち L_1, L_2 それぞれの両端点の高さが等しい. ただし, ここではOマーク, Xマークはマス中央, 座標が整数の1/2倍にあたる点に存在すると思う. 隣接する2行に関しても, 列と行の役割を入れ替えて同様に定義する.
3. **(de-)stabilization'**: あるXマークが存在するマスについて, そのマークおよびそれと同じ行, 同じ列にある全てのマークを消す. 次にその行および列を2つに分け, (あるいは新しい行, 列を追加する) 図のようにマークを配置し直して $(n+1) \times (n+1)$ graph grid diagram を得る.

この3つの操作をまとめて graph grid move という.

これら3つの操作は本来の結び目の Grid Homology での grid move[7] とほぼ同一である. commutation' は本来の grid move における commutation と switch を1つにまとめたものに相当し, stabilization' は本来の grid move における stabilization の特別な場合である.

定理 2.7 (Theorem 3.6,[2]). g, g' を, 同じ transverse spatial graph を表す2つの graph grid diagram とするとき, これらは graph grid move の有限回の列で互いに移りあう.

定理 2.7 より, graph grid diagram g から定義される量が不変量であることを示すには, cyclic permutation, commutation, (de-)stabilization を1回施して不変であることをそれぞれ確かめればよい.

2.3 state

f を表す graph grid diagram g に対し, g の上端と下端, 右端と左端を同一視して得られるトーラス状の図を考える. これを toroidal diagram という. toroidal diagram の各マスを分ける水平方向の直線を $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$, 垂直方向の直線を $\beta = \{\beta_i\}_{i=1}^n$ と書く.

定義 2.8. g の state とは, g の toroidal diagram における n 個の α と β の交点からなる集合で, 各 α_i, β_j

上にちょうど 1 点だけ存在するものをいう．あるいは， α と β の間の全単射のことをいう．

g の grid state のからなる集合を $\mathbf{S}(g)$ と書く．

state が α_i と β_j を対応させているとき，その交点に点を打つことで表す．

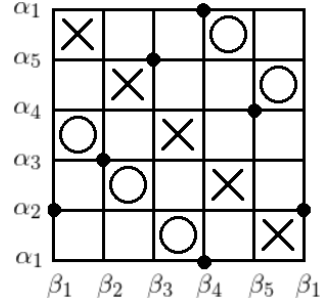


図 4 g と state の表記の一例

定義 2.9. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)$ を， $n-2$ 点が等しい 2 つの state とする． $\mathbf{x} \cup \mathbf{y} \setminus \mathbf{x} \cap \mathbf{y}$ の 4 点を角にもつようなトーラスに埋め込まれたディスク r で， ∂r が水平方向と垂直方向の直線全体の和集合上にあるようなものを考える． $\partial_\alpha r := \partial r \cap (\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n)$, $\partial_\beta r := \partial r \cap (\beta_1 \cup \dots \cup \beta_n)$ とする． r が $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ向かう空な長方形であるとは，

$$\partial(\partial_\alpha r) = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \partial(\partial_\beta r) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

かつ $\mathbf{x} \cap \text{Int}(r) = \mathbf{y} \cap \text{Int}(r) = \emptyset$ を満たすときをいう．

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)$ に対して $\text{Rect}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を， $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ向かう長方形からなる集合とする．ただし， $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の $n-2$ 点が等しくない場合は $\text{Rect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \emptyset$ とする．

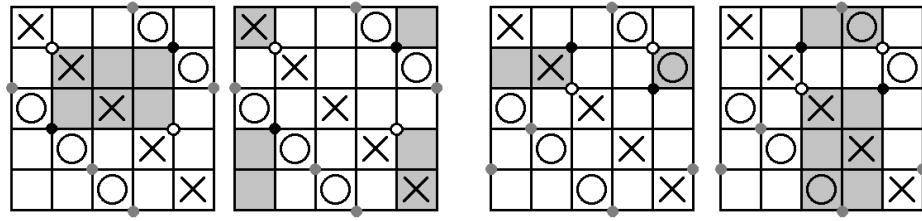


図 5 2 つの長方形が存在する例．黒と灰色の丸が $\mathbf{x}$ ，白と灰色が $\mathbf{y}$ を表す．

Grid Homology において，鎖複体の各元について境界準同型を考えることは，各 state に対し，空な長方形がいくつ存在するかを数えることに相当する．

2.4 $tCF^-(g)$ の定義

$t \in [0, 2] \cap \mathbb{Q}$ が $t = \frac{m}{n}$ (ただし m と n は互いに素な整数かつ $n > 0$) と表されているとする．このとき $\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．

空な長方形 $r \in \text{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対し, $O_i(r)$ を, r が O_i を内部に含むとき 1, そうでないとき 0 と定義し,

$$|\mathbb{O} \cap r| := \sum_{i=1}^n O_i(r)$$

とし, $|\mathbb{X} \cap p|$ も同様に定義する.

定義 2.10. $t \in [0, 2]$ とし, **t-modified graph grid complex** $tCF^-(g)$ を, $\mathbf{S}(g)$ が生成する自由 $\mathcal{R}_t$ 加群で, 自己準同型 ∂_t^- として,

$$\partial_t^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)} \left(\sum_{r \in \text{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})} U^{t|\mathbb{X} \cap r| + 2|\mathbb{O} \cap r| - t(\sum_{O_i \in \mathbb{O} \cap r} m_i)} \right) \mathbf{y}$$

を持つものをいう.

定義 2.11. grid number n の toroidal grid diagram g に対し, g を水平方向と垂直方向の直線に沿って切ることによって平面 $\mathbb{R}^2$ 内の $[0, n) \times [0, n)$ に自然に配置する. これを **planar realization** という.

定義 2.12. $\mathbb{R}^2$ の点について, $p_1 < q_1$ かつ $p_2 < q_2$ のとき, $(p_1, p_2) < (q_1, q_2)$ と順序を入れる. P, Q を $\mathbb{R}^2$ 上の有限個の点の集合とし, $\mathcal{I}(P, Q)$ を, 点 $p \in P, q \in Q$ で $p < q$ を満たすペアの数とし,

$$\mathcal{J}(P, Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{I}(P, Q) + (\mathcal{I}(Q, P)))$$

と定義する.

$\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g)$ に対し,

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbb{O}, \mathbf{x} - \mathbb{O}) + 1 \quad (1)$$

$$A(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbb{X} - \sum_{i=1}^n m_i O_i) \quad (2)$$

とし, **t-grade** gr_t を,

$$\text{gr}_t(U^\alpha \mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - tA(\mathbf{x}) - \alpha \quad (3)$$

とする.

spatial graph の graph grid homology についてまとめられた [2] おける A の定義では, 値を $H_1(S^3 - f(G))$ にとるものであるが, [9] およびここでは, $H_1(S^3 - f(G))$ の生成元を 1 に移す準同型を考えることにより $\mathbb{Z}$ につづしたものを考える.

この定義において, M は toroidal diagram として well-defined であるが, A は well-defined でないことに注意する. また, 本来の結び目の Grid Homology では Alexander grading の定義に補正項が加わり, well-defined となっている.

命題 2.13. $\partial_t^- \circ \partial_t^- = 0$ であり, ∂_t^- は t-grading を 1 減らす. よって, $(tCF^t(g), \partial_t^-)$ は graded 鎖複体となる.

定義 2.14. $tCF_d^-(g) = \{U^\alpha \mathbf{x} \in tCF^-(g) | \text{gr}_t(U^\alpha \mathbf{x}) = d\}$ とするとき, g の **t-modified graph grid homology** を

$$tHF_d^-(g) = \frac{\text{Ker}(\partial_t^-) \cap tCF_d^-(g)}{\text{Im}(\partial_t^-) \cap tCF_d^-(g)}$$

$$tHF^-(g) = \bigoplus_d tHF_d^-(g)$$

とする.

2.5 Alexander filtration の修正

前述した通り, Alexander grade は toroidal diagram として well-defined でなく, Alexander grading は f を表す graph grid diagram の取り方によってしまう. Alexander grading の絶対化を行うために, [9] で定義されたホモロジー群を導入する.

定義 2.15 (Definition 3.2, Proposition 3.7, [9]). $CF^-(g)$ を, $\mathbf{S}(g)$ が生成する $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 加群とする. $\partial^-: CF^-(g) \rightarrow CF^-(g)$ を,

$$\partial^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)} \left(\sum_{r \in \text{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})} V_1^{O_1(r)} \dots V_n^{O_n(r)} \right) \mathbf{y}$$

とすると, $(CF^-(g), \partial^-)$ は鎖複体である. $\mathbf{S}(g)$ の元に対して式 1, 式 2 で Maslov, Alexander grading を考る. ここでの Alexander grading は [2] で定義した, 値を $H_1(S^3 \setminus f(G))$ にとる Alexander grading について, $H_1(S^3 \setminus f(G))$ の各生成元を 1 に送る準同型 $H_1(S^3 \setminus f(G)) \rightarrow \mathbb{Z}$ で移したものとなっている. 次に,

$$M(V_i) = -2, A(V_i) = -m_i \ (i = 1, \dots, n)$$

として $CF^-(g)$ の元に 2 つの grade を対応させる. ∂^- は Maslov grading を 1 つ減らし, Alexander grading を保つまたは減らすので $(CF^-(g), \partial^-)$ は $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 加群上の $\mathbb{Z}$ -graded, $\mathbb{Z}$ -filtered 鎖複体である. この Alexander filtration を $\{\mathcal{F}_m^-\}_{m \in \mathbb{Z}}$ と書く.

定義 2.16 (Definition 3.8, [9]). $f: G \rightarrow S^3$ を表す grid number n の g の O マークのうち, $O_1, \dots, O_k$ が f の辺の内部を表し, $O_{k+1}, \dots, O_n$ が f の頂点を表す O^* マークであるとする. $\mathcal{U}$ を $CF^-(g)$ の部分複体で, $V_{k+1}CF^-(g) \cup \dots \cup V_nCF^-(g)$ を含む最小のものとする. このとき $\widehat{CF}(g) := CF^-(g)/\mathcal{U}$ とし, $\hat{\partial}$ を ∂^- が誘導する写像とすると, $(\widehat{CF}(g), \hat{\partial})$ は $\mathbb{F}$ ベクトル空間の $\mathbb{Z}$ -graded, $\mathbb{Z}$ -filtered 鎖複体となる. $\widehat{CF}(g)$ における Alexander filtration を $\{\widehat{\mathcal{F}}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ と書く.

$\widehat{CF}(g)$ の associated graded object のホモロジー群を $\widehat{HFG}(g)$ を書く.

定義 2.17 (Definition 3.10, [9]). g に対し **symmetrized Alexander filtration** $\{\widehat{\mathcal{F}}_m^H\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ を, $m_{\max}(g) = -m_{\min}(g)$ となるように各生成元の Alexander grading の値を平行移動して固定し直すことで得られる Alexander filtration をいう. ただし,

$$m_{\max}(g) := \max \left\{ m | H_* \left(\widehat{\mathcal{F}}_m(g) / \widehat{\mathcal{F}}_{m-1}(g) \right) \neq 0 \right\}$$

$$m_{\min}(g) := \min \left\{ m | H_* \left(\widehat{\mathcal{F}}_m(g) / \widehat{\mathcal{F}}_{m-1}(g) \right) \neq 0 \right\}$$

である．また， $\mathbf{S}(g)$ の各元に対して $\{\widehat{\mathcal{F}}_m^H\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ が定める Alexander grading から決まる $CF^-(g)$ の修正した Alexander filtration を $\{\mathcal{F}_m^{-H}\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ と書く．

このように Alexander grade $\{\widehat{\mathcal{F}}_m^H\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ および $\{\mathcal{F}_m^{-H}\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ を取り直した鎖複体をそれぞれ $\widehat{CF}^H(g), CF^{-H}(g)$ ，それらの associated graded object のホモロジー群をそれぞれ $\widehat{HF}^H(g), HF^{-H}(g)$ と書く．

定理 2.18 (Theorem 3.15,[9]). g, g' を同じ balanced spatial graph を表す graph grid diagram とすると，bigraded 加群として

$$\begin{aligned}\widehat{HF}^H(g) &\cong \widehat{HF}^H(g') \\ HF^{-H}(g) &\cong HF^{-H}(g')\end{aligned}$$

証明の概要. g に対し graph grid move を 1 回施して g' を得たとすると，対応した次数 $(0, s)$ の homogeneous $\Phi: CF^-(g) \rightarrow CF^-(g')$ で，associated graded object のホモロジー群の間の同型 $H_*(\mathcal{F}_m^-(g)/\mathcal{F}_{m-1}^-(g)) \rightarrow H_*(\mathcal{F}_{m+s}^-(g')/\mathcal{F}_{m+s-1}^-(g'))$ を誘導するものが存在する．ただし $s = s(g, g')$ は g, g' による整数である．symmetrized Alexander filtration $\{\widehat{\mathcal{F}}_m^H\}_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ を取り直すことで Φ を改めて $\Phi^H: CF^{-H}(g) \rightarrow CF^{-H}(g')$ と書くことにすると，これは $\mathbb{Z}$ -graded, $\mathbb{Z}$ -filtered 鎖写像であることが分かり，filtered 擬同型である．

さらに， Φ^H から自然に $\widehat{\Phi}^H: \widehat{CF}^H(g) \rightarrow \widehat{CF}^H(g')$ が定まり，これも filtered 擬同型である． $\square$

2.6 形式的な t-modified 鎖複体の構成

ここでは， $\mathbb{F}[V]$ 加群上の $\mathbb{Z}$ -graded, $\mathbb{Z}$ -filtered 鎖複体 C から t-modified 鎖複体 C^t を形式的に構成する手法と，両者の関係について述べる．この節を通して， $t = \frac{m}{n} \in [0, 2] \cap \mathbb{Q}$ ， $\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．

$\mathbb{F}[V]$ 加群上の Maslov graded, Alexander filtered 鎖複体 C の生成元 $\mathbf{x}$ をとる． V の積は Maslov grading を -2 ずらすため，Maslov grading が $M(\mathbf{x}) - 1$ である元は一般に $V^{\frac{M(\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}) + 1}{2}} \cdot \mathbf{y}$ の線形和として表される．ただし $\mathbf{y}$ は C の生成元で， $M(\mathbf{y}) \geq M(\mathbf{x}) - 1$ を満たすものとする．このことから C の境界準同型 ∂ は

$$\partial(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in C: \text{生成元}} c_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \cdot V^{\frac{M(\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}) + 1}{2}} \cdot \mathbf{y} \quad (c_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \in \mathbb{F}) \quad (4)$$

と表すことができる．

定義 2.19 (Definition 4.1,[6]). $\mathbb{F}[V]$ 加群上の Maslov graded, Alexander filtered 鎖複体 (C, ∂) に対し， $V = U^2$ とする． $\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ 加群上の **t-modified 鎖複体** $(C, \partial)^t = (C^t, \partial^t)$ とは，次のようにして得られるものをいう；

- $\mathcal{R}_t$ 加群として， $C^t \cong C \otimes_{\mathbb{F}[V]} \mathcal{R}_t$ である．
- C の生成元 $\mathbf{x}$ に対し t-grading を $\text{gr}_t(U^\alpha \mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - tA(\mathbf{x}) - \alpha$ と定め， C^t を t-graded 加群とみなす．
- C^t の境界準同型 ∂^t を，

$$\partial^t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in C^t: \text{生成元}} c_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \cdot U^{M(\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}) + 1} \cdot \mathbf{y}$$

とする．ただし $c_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ は式 (4) が定める値．

注意：この定義 2.19 において，Alexander grading が各生成元に対して定義されてさえいれば， C^t の全ての元に対し t -grading が定義可能であるから，Alexander filtrated 鎖複体でなくても $\mathcal{R}_t$ 加群 C^t は定義可能である．このことはのちに命題 2.20 で用いる．

g を graph grid diagram とする． $\mathbb{F}[V_1, \dots, V_n]$ 加群上の鎖複体 $(CF^-(g), \partial)$ (定義 2.15 参照) に対し， $\mathbb{F}[V]$ 加群 $CF_V^-(g)$ を次のように定める； $CF_V^-(g) = \frac{CF^-(g)}{V_1=V_2=\dots=V_n}$ とし， V の作用として V_i から導かれるものを考え， $\mathbb{F}[V]$ 加群とみなす．さらに ∂ が導く $\mathbb{F}[V]$ 加群の準同型を ∂_V と書くことにすると， $(CF_V^-(g), \partial_V)$ は $\mathbb{F}[V]$ 加群上の鎖複体である．ここで，各 V_i による $CF^-(g)$ への作用について，Maslov grading の変化は -2 で等しいが，Alexander grading の変化は $-m_i$ となり等しいとは限らない．よって $CF_V^-(g)$ は $M(V^\alpha \mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - 2\alpha$ とすることで全ての元に対し Maslov grading を定義でき Maslov graded 鎖複体とみなせるが，Alexander grading は生成元以外の元に対して定義されるとは限らず，Alexander filtered 鎖複体と見なせるとは限らない．

命題 2.20. graded $\mathcal{R}_t$ 加群上の鎖複体として，

$$(CF_V^-(g), \partial_V)^t \cong (tCF^-(g), \partial_t^-)$$

である．

2.7 t -grading の修正

$tCF^-(g)$ に対し，2.5 節で定義した symmetrized Alexander filtration により $\mathbf{S}(g)$ の各元の Alexander grading の値を取り直してできる鎖複体を考えると，そのホモロジー群が graded 加群として不変量となる．このことを 2.6 節の内容を用いて示す．

定義 2.21. symmetrized Alexander filtration が定める $\mathbf{S}(g)$ の各元 $\mathbf{x}$ の Alexander grading の値を $A^H(\mathbf{x}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ と書く．改めて $\text{gr}_t^{-H}(U^\alpha \mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - tA^H(\mathbf{x}) - \alpha$ として修正した t -grading をとり， $tCF^-(g)$ を gr_t^{-H} -graded 鎖複体として見たものを $tCF^{-H}(g)$ と書く．

2.8 主要な結果

$t \in [0, 2] \cap \mathbb{Q}, t = \frac{m}{n}$ とし， $\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．ただし $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ． W_t を 2 次元 graded ベクトル空間 $W_t \cong \mathbb{F}_0 \oplus \mathbb{F}_{-1+t}$ とする．ここで添え字の $0, -1+t$ は t -grading の値を表す．graded $\mathcal{R}_t$ -加群 X に対し， $X[a]$ で grade の shift $X[a]_d = X_{d+a}$ を表すとき，

$$X \otimes W_t \cong X \oplus X[1-t]$$

である．

定理 2.22. balanced spatial graph $f: G \rightarrow S^3$ を表す 2 つの graph grid diagram g, g' の grid number をそれぞれ n, m ($n > m$) とするとき，graded $\mathcal{R}_t$ -加群として

$$tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g') \otimes W_t^{\otimes (n-m)}$$

が成り立つ．

証明の概要. 証明は次の 3 つからなる ;

- g' と g が 1 回の cyclic permutation で移りあうとき, $tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g')$
- g' と g が 1 回の commutation' で移りあうとき, $tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g')$
- g' が g に 1 回の stabilization' をすると得られるとき, $tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g') \otimes W_t$

それぞれで symmetrized 前の t-modified 鎖複体 $tCF^{-}(g), tCF^{-}(g')$ の間で t-grading を $t\mathbb{Z}$ だけずらす擬同型写像を構成する. それらが symmetrized した $tHF^{-H}(g), tHF^{-H}(g')$ の間で t-grading を保つことを確かめる. そのためには命題 2.20 を用いて, 構成した t-modified 鎖複体の間の擬同型写像に対応する $CF^{-}(g)$ の間の擬同型写像を調べることで $CF^{-}(g)$ 上での議論に落とし込むことで間接的に示した. $\square$

定義 2.23. balanced spatial graph $f: G \rightarrow S^3$ を表す graph grid diagram g について, $t \in [0, 1]$ に対し

$$\Upsilon_g(t) := \max\{\text{gr}_t(x) | x \in tGH^{-H}(g), x \text{ は homogeneous, non-torsion}\}$$

とし, $t \in [1, 2]$ に対し $\Upsilon_g(t) = \Upsilon_g(2-t)$ とする.

定理 2.24. $\Upsilon_g(t)$ は f を表す graph grid diagram g の取り方によらない, balanced spatial graph の不変量である. これを $\Upsilon_f(t)$ と書く.

証明. 定理 2.22 より従う. 特に, $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ならば $[1-t]$ の grading shift の影響を受けない. $\square$

参考文献

- [1] Földvári, Viktória. The knot invariant Υ using grid homologies. J. Knot Theory Ramifications 30 (2021), no. 7, Paper No. 2150051, 26 pp.
- [2] Harvey, Shelly. O'Donnol, Danielle. Heegaard Floer homology of spatial graphs. Algebr. Geom. Topol. 17 (2017), no. 3, 1445–1525.
- [3] Manolescu, Ciprian. Ozsváth, Peter. Szabó, Zoltán. Thurston, Dylan. On combinatorial link Floer homology. Geom. Topol. 11 (2007), 2339–2412.
- [4] Ozsváth, Peter. Szabó, Zoltán. Holomorphic disks and knot invariants. Adv. Math. 186 (2004), no. 1, 58–116.
- [5] Ozsváth, Peter. Szabó, Zoltán. Knot Floer homology and the four-ball genus. Geom. Topol. 7 (2003), 615–639.
- [6] Ozsváth, Peter. Stipsicz, András. Szabó, Zoltán. Concordance homomorphisms from knot Floer homology. Adv. Math. 315 (2017), 366–426.
- [7] Ozsváth, Peter. Stipsicz, András. Szabó, Zoltán. Grid homology for knots and links, Mathematical Surveys and Monographs, 208. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. x+410 pp. ISBN: 978-1-4704-1737-6
- [8] Rasmussen, Jacob Andrew. Floer homology and knot complements. Thesis (Ph.D.)—Harvard University. 2003. 126 pp.
- [9] Vance, Katherine. Tau invariants for balanced spatial graphs. J. Knot Theory Ramifications 29 (2020), no. 9, 2050066, 29 pp.