

# 同変特異インスタントン・フレアー理論による 結び目不変量

井森隼人 (京都大学大学院理学研究科)\*

Floer 理論は Morse 理論の無限次元版であり、低次元トポロジーの領域で強力な不変量を提供してきた。Floer 理論には構成方法により複数の理論が存在する。低次元多様体論において重要なものとして instanton Floer 理論 [10], Heegaard Floer 理論 [32], monopole Floer 理論 [22] が挙げられる。これらの各理論には結び目に対するバージョンが存在し、Heegaard Floer 理論においては Ozsváth-Szabó[31] および Rasumussen[36] による構成、monopole Floer 理論においては Kronheimer-Mrowka[23] による構成が挙げられる。instanton Floer 理論の文脈では knot surgery による Floer[11] および Braam-Donaldson[2] の構成、特異接続 (singular connection) を用いた Collin-Steer[4] および Kronheimer-Mrowka[24] の構成が挙げられる。特異接続は結び目の補空間で定義される微分幾何学的対象である。特異接続を用いて構成される結び目の instanton Floer ホモロジーは一般に特異 instanton Floer ホモロジーと呼ばれる。特異 instanton Floer ホモロジーには複数の変種が存在する。Daemi-Scaduto[6] は同変特異 instanton Floer 理論と呼ばれるバージョンを導入し、4次元 clasp numer の問題に対する応用 [7] を与えた。不変量の扱いやすさという観点では、Heegaard Floer 理論は instanton Floer 理論に勝る側面があるが、一方で instanton Floer 理論にも他の理論からアプローチできないタイプの問題に有効な場合があり、応用面での強みと言える。本記事では Daemi-Scaduto による同変特異 instanton Floer 理論をさらに発展させて得られる結び目不変量とそのトポロジーへの応用について解説する。発展の方向性は二つある。一つ目は同変特異 instanton Floer 理論の一般化 [19] であり、有理数でパラメータ付けされた結び目不変量の族が得られる。二つ目は理論の精密化であり、これは Aliakbar Daemi 氏、佐藤光樹氏、Christopher Scaduto 氏、谷口正樹氏との共同研究に基づく。理論の精密化によって、既存の理論では得られなかった情報を検出できる不変量が構成された。第 1 節では、講演では触れられなかった同変特異 instanton Floer 理論による不変量の構成の概要と基本的な性質について解説する。第 2 節ではトポロジーへの応用について解説する。

## 1 特異 instanton Floer 理論と不変量

### 1.1 特異 instanton Floer ホモロジーの概要

$Y$  を向きづけられたホモロジー 3 球面、 $K$  を  $Y$  内の向きづけられた結び目とする。 $P \rightarrow Y$  を  $SU(2)$ -束であって  $K$  上で複素直線束への分解  $P|_K = L \oplus L^*$  をもつものとする。特異  $SU(2)$  接

---

\*E-mail: imori.hayato.67m(at)st.kyoto-u.ac.jp

続とは、簡潔に述べれば  $Y \setminus K$  上で定義された  $SU(2)$  接続  $A$  であって、以下のホロノミー条件を満たすものである。

$$\lim_{r \rightarrow 0} \text{Hol}_{\mu(r)}(A) \sim_{\text{共役}} \exp 2\pi i \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

ここで、 $\mu(r)$  は結び目  $K$  の半径  $r > 0$  のメリディアン、 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Q}$  は固定されたパラメーターである。 $\alpha$  をホロノミー・パラメーターと呼ぶ。 $\mathcal{A}(Y, K, \alpha)$  をホロノミー・パラメーター  $\alpha$  をもつ特異  $SU(2)$  接続の空間とする。厳密には  $\mathcal{A}(Y, K, \alpha)$  の定義にはソボレフ空間など解析的設定が必要になるが、ここでは触れない。 $\mathcal{G}(Y, K) = \text{Map}((Y, K), (SU(2), U(1)))$  をゲージ変換群と呼ぶ。 $\pi_0(\mathcal{G}(Y, K))$  は  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  に同型である。この同型は射の組  $Y \rightarrow SU(2), K \rightarrow U(1)$  の写像度を対応させることで得られる。 $\mathcal{G}_{(0,0)} \subset \mathcal{G}(Y, K)$  を  $(0, 0) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  に対応する連結成分とする。Chern-Simons 汎関数  $CS$  を以下で定義する。

**定義 1.1.** (i)

$$\text{grad} CS_A = \frac{1}{4\pi^2} * F_A$$

( $F_A$  は  $A$  の曲率と呼ばれる 2 次微分形式)

(ii)  $CS$  には適当な初期条件を与える。

特異接続の空間にはゲージ変換群が共役で作用するが、この作用を  $\mathcal{G}_{(0,0)}$  に制限して商空間をとり、 $\tilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha) = \mathcal{A}(Y, K, \alpha) / \mathcal{G}_{(0,0)}$  と書く。これは無限次元多様体の構造をもつ。Chern-Simons 汎関数は  $\tilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha)$  上の  $\mathbb{R}$  値関数  $CS : \tilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  を定める。 $CS$  の臨界点集合は  $\pi_1(Y \setminus K)$  の  $SU(2)$  表現であって、 $K$  のメリディアンのホモトピー類を

$$\exp 2\pi i \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

に共役な元に写すものに対応する。横断正則性など技術的な問題をクリアすれば、無限次元多様体上の Chern-Simons 汎関数  $CS : \tilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、有限次元多様体における Morse ホモロジーの類似物が構成される。

**命題 1.2.**  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Q}$  を  $\Delta_{K \subset Y}(e^{4\pi i \alpha}) \neq 0$  であるように固定する。 $CS$  の臨界点集合  $\text{Crit}(CS)$  に  $\mathbb{Z}$  次数が定まる。 $n(\beta_1, \beta_2)$  を次数の差が 1 となる臨界点  $\beta_1, \beta_2$  を結ぶ  $CS$  の gradient flow の符号付数え上げとする。

$$C_*^\alpha(Y, K) = \bigoplus_{\beta \in \text{Crit}^*(CS)} \mathbb{Z}\beta$$

$$\langle d\beta_1, \beta_2 \rangle = n(\beta_1, \beta_2)$$

と定めると、 $(C_*^\alpha(Y, K), d)$  は chain 複体になる。 $(C_*^\alpha(Y, K), d)$  のホモロジー群を取ると、結び目不変量  $I_*^\alpha(Y, K)$  が得られる。

ここでは  $\mathcal{B}(Y, K, \alpha) := \mathcal{A}(Y, K, \alpha) / \mathcal{G}(Y, K)$  の普遍被覆空間である  $\tilde{\mathcal{B}}(Y, K, \alpha)$  上での Morse 理論の類似として特異 instanton Floer ホモロジーを紹介した。以上の構成は  $\mathcal{B}(Y, K, \alpha)$  上の局所系付きホモロジー理論と解釈することもできる。局所系を用いた解釈では chain 複体が有限生成になるが、係数は本質的に Novikov 環を用いる必要がある。Novikov 環を用いた構成は [8] で明示的に与えられた。[19] では、より一般の係数に構成を拡張している。

## 1.2 結び目不変量とその性質

**定義 1.3.**  $(C_*, d)$  を整域  $R$  を係数とする次数付き有限生成 *chain* 複体とする. このとき, *chain* 複体  $(\tilde{C}_*, \tilde{d})$  であって

$$\begin{aligned}\tilde{C}_* &= C_* \oplus C_{*-1} \oplus R, \\ \tilde{d} &= \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ v & -d & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

によって与えられるものを  $S$ -複体と呼ぶ.

$S$ -複体は  $C_* = C_*^\alpha(Y, K)$  に対して実現される. ホモロジー 3 球面と結び目の組をつなぐコボルディズム  $(W, S) : (Y, K) \rightarrow (Y', K')$  であって, ある技術的仮定を満たすものは  $S$ -複体に射

$$\tilde{C}(W, S) : \tilde{C}_*^\alpha(Y, K) \rightarrow \tilde{C}_*^\alpha(Y', K')$$

を誘導する. このような技術的仮定を満たすペアのコボルディズム  $(W, S)$  を負定値コボルディズムと呼ぶ. [6, 7] ではホロノミー・パラメーターが  $\alpha = 1/4$  の場合に  $S$ -複体と負定値コボルディズムが導入された. [19] ではより一般の有理ホロノミー・パラメーターへの拡張を行っている. Floer chain 複体  $C_*^\alpha(Y, K)$  は  $\mathbb{R}$  値次数をもち, フィルター付き複体  $C_*^\alpha(Y, K)^{[s, r]} \subset C_*^\alpha(Y, K)$  が定義される. フィルター付き複体の構成はホモロジー 3 球面の場合に [29] で導入された. フィルター版の構成から結び目に対する  $r_s$  不変量が定義される. (簡単のため,  $\alpha = \frac{1}{4}$  の場合のみ定義を与える.)

**定義 1.4.** (Daemi-井森-佐藤-Scaduto-谷口)  $(Y, K)$  を向きづけられたホモロジー 3 球面と結び目とする.  $s \in \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\}$  を固定し,  $(Y, K)$  に対する  $r_s$  不変量を以下で定義する.

$$r_s^\alpha(Y, K) := \inf\{r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid \gamma \in C_*^\alpha(Y, K)^{[s, r]} \otimes \mathbb{Q}, \delta_1^{[s, r]}(\gamma) \neq 0, d^{[s, r]}\gamma = 0\}.$$

$\delta_1^{[s, r]}$ ,  $d^{[s, r]}$  は定義 1.3 における  $\delta_1$ ,  $d$  をフィルター付き複体へ制限したものである.  $Y = S^3$  のときは単に  $r_s(K)$  と書くことにする.  $r_s$  不変量はコンコーダンス不変量になるが, コンコーダンス群上の準同型にはならず, 次の連結和公式を満たす.

**命題 1.5.**

$$r_0(K_1 \# K_2) \geq \min\{r_0(K_1), r_0(K_2)\}.$$

また  $r_s$  不変量は  $\infty$  に値を取るとき, 自明であると解釈する. 以下の命題はコンコーダンス群で一次独立な結び目の族を得る際に有効である.

**命題 1.6.**  $\{K_i\}$  を以下を満たす結び目の族とする.  $-K^*$  で  $K$  の向きを逆にした鏡像を表す.

$$\begin{aligned}\infty &> r_0(K_1) > r_0(K_2) > \cdots, \\ \infty &= r_0(-K_1^*) = r_0(-K_2^*) = \cdots.\end{aligned}$$

このとき,  $\{K_i\}$  はコンコーダンス群  $\mathcal{C}$  で一次独立.

証明はホモロジー 3 球面の場合 [29] と同様である.

## 2 トポロジーへの応用

### 2.1 基本群と $SU(2)$ 表現

自明な結び目  $U$  に対しては Papakyriakoupoulous[34] により,  $\pi_1(S^3 \setminus U)$  は無限巡回群であることが示されている. Kronheimer-Mrowka[26] は Yang-Mills ゲージ理論を用いてこれを精密化し, 非自明な結び目  $K$  に対して, 補空間の基本群  $\pi_1(S^3 \setminus K)$  はアーベル群  $U(1)$  を経由しない  $SU(2)$  表現をもつことを示した. 次のように, 結び目コンコードダンス  $S \subset [0, 1] \times S^3$  の補空間の基本群の表現に関する結果も知られている. Daemi-Scaduto[7] は,  $\sigma(K) \neq 0$  となる結び目  $K$  と任意の結び目コンコードダンス  $S: K \rightarrow K$  に対し,  $\pi_1([0, 1] \times S^3 \setminus S)$  は  $U(1)$  を経由しない  $SU(2)$  表現をもつことを示した. 特定のクラスの結び目に対しては, 表現の拡張性に関する次のような結果も知られている.  $T_{p,q}$  を  $(p, q)$ -torus knot とする.

**定理 2.1.** ([7]) 任意のコンコードダンス  $T_{p,q} \rightarrow K$  に対し,  $\pi_1(S^3 \setminus T_{p,q})$  の任意の *traceless*  $SU(2)$  表現はコンコードダンス補空間上に拡張する.

ここで *traceless*  $SU(2)$  表現とは  $K$  のメリディアンホモトピー類が  $SU(2)$  の  $\text{trace}=0$  となる元に移される  $SU(2)$  表現のことである. これはホロノミー・パラメーターが  $\alpha = \frac{1}{4}$  である特異平坦接続に対応する. この結果はスライス・リボン予想の変種に動機づけられている. コンコードダンス  $S: K \rightarrow K'$  は射影  $[0, 1] \times S^3 \rightarrow [0, 1]$  が極大点をもたない Morse 関数になるとき, リボン・コンコードダンスであると言う. スライス・リボン予想の主張は次で与えられる.

**予想 2.2.** ([12]) 任意のコンコードダンス  $S: U \rightarrow K$  に対し, リボン・コンコードダンス  $R: U \rightarrow K$  が存在する.

一方, リボン・コンコードダンスが存在するとき, 基本群の  $SU(2)$  表現に関する次の性質が成立する.

**命題 2.3.** ([14, 5]) リボン・コンコードダンス  $R: K \rightarrow K'$  が存在するとき,  $\pi_1(S^3 \setminus K)$  の任意の  $SU(2)$  表現はコンコードダンス補空間の基本群  $\pi_1([0, 1] \times S^3 \setminus R)$  に拡張する.

従って, 定理 2.1 は次の予想に対する evidence を与えている.

**予想 2.4.** ([7]) 任意のコンコードダンス  $S: T_{p,q} \rightarrow K$  に対し, リボン・コンコードダンス  $R: T_{p,q} \rightarrow K$  が存在する.

定理 2.1 の *traceless* 条件は技術的な理由から発生する. 実際には同変特異 instanton Floer 理論の構成を族に拡張することで *traceless* 条件を外すことができる. [19] における主結果は以下のとおりである.

**定理 2.5.** ([19]) 任意のコンコードダンス  $T_{p,q} \rightarrow K$  に対し,  $\pi_1(S^3 \setminus T_{p,q})$  の任意の  $SU(2)$  表現はコンコードダンス補空間上に拡張する.

定理 2.5 の証明において本質的な議論は torus knot に対する Floer chain 複体  $C_*^\alpha(T_{p,q})$  が偶数次数で自明になることである. 「torus knot 以外に同様の性質をもつ結び目がどれくらい存在する

か?』というのは興味深い問題である。[4]では一般に algebraic knot に対して同様の性質が成立することを予想している。より一般に iterated torus knot に対して成立する可能性も考えられる。

## 2.2 結び目コンコードダンス群とその構造

$\mathcal{C}$  を (smooth な) 結び目コンコードダンス群とする。コンコードダンス群  $\mathcal{C}$  の構造は古典的には代数的コンコードダンス群の観点から研究されてきた。Levine[27]により代数的コンコードダンス群は構造  $\mathcal{C}_{\text{alg}} \cong \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty \oplus \mathbb{Z}_4^\infty$  をもち、Seifert 形式を与える対応によって全射  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{alg}}$  が得られることが示された。全射  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{alg}}$  の核を  $\mathcal{C}_{AS} \subset \mathcal{C}$  と書く。部分群  $\mathcal{C}_{AS}$  に含まれる結び目は代数的スライス結び目と呼ばれる。さらに、 $\mathcal{C}_{AS}$  には位相的スライス結び目からなる部分群  $\mathcal{C}_{TS}$  が含まれる。 $\mathcal{C}_{TS}$  が  $\mathbb{Z}^\infty$  部分群をもつことは遠藤 [9] によってはじめて証明された。手法は double branched covering 上の Yang-Mills ゲージ理論に基づく。Hom[16] は Heegaard Floer 理論を用いて、部分群  $\mathbb{Z}^\infty \subset \mathcal{C}_{TS}$  を検出している。Heegaard Floer 理論はより強い結果を得るためにも有効である。 $\mathcal{C}_{TS}$  内の  $\mathbb{Z}^\infty$ -summand の存在が [17, 33] によって示されている。より深い構造として、 $\mathcal{C}_{TS}$  には自明な Alexander 多項をもつ結び目からなる部分群  $\mathcal{C}_\Delta$  が含まれる。 $\mathcal{C}_\Delta$  にも  $\mathbb{Z}^\infty$ -summand が存在することが [20] により示されている。このように、コンコードダンス群の構造に関する研究の進展においては Heegaard Floer 理論に由来するコンコードダンス不変量の応用が主流的な手法となっている。しかし、これまでに知られている Floer 理論的手法から得られるコンコードダンス不変量の多くは交代結び目に対して情報量が結び目の符号数程度に退化することが知られている。例えば、Heegaard Floer 理論における  $\tau$  不変量 [30]、 $\epsilon$  不変量 [16]、 $\nu^+$  不変量 [18]、 $\Upsilon$  不変量 [33]、Khovanov ホモロジーにおける  $s$  不変量 [35]、Seiberg-Witten 理論における  $\delta$  不変量 [28]、およびその族版 [1] が挙げられる。Seiberg-Witten Floer K 理論による  $\kappa$  不変量についても、少なくとも 2-bridge knot に対しては情報量が符号数に退化することが示されている [21]。一方  $r_s$  不変量は 2-bridge knot に対して符号数より真に強力な情報をとらえることができる。これは既存の Floer 理論的不変量とは異なる特徴である。具体的には、以下の定理が  $r_s$  不変量を用いて示される。

**定理 2.6.** (Daemi-井森-佐藤-Scaduto-谷口) 2-bridge knot の族

$$\{K_{m,n} := K(212mn - 68n + 53, -106m + 34)\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$$

は各  $m \geq 7$  に対し、代数的コンコードダンス群  $\mathcal{C}_{\text{alg}}$  の中で *torsion* かつコンコードダンス群  $\mathcal{C}$  で一次独立。

$K_{m,n}$  は図 1 で与えられる。条件  $m \geq 7$  は  $K_{m,n}$  の Tristram-Levine signature が恒等的に 0 となる条件である。したがって  $m \geq 7$  に対して  $K_{m,n}$  は  $\mathcal{C}_{\text{alg}} = \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z}_2^\infty \oplus \mathbb{Z}_4^\infty$  の torsion 元を定める。定理 2.6 の系として次が得られる。

**系 2.7.** 各  $m \geq 7$  に対し、整数列  $l_{m,n}$  が存在し、 $\{l_{m,n}K_{m,n}\}_{n>0}$  は代数的スライスかつ  $\mathcal{C}$  内で一次独立な交代結び目の族となる。

定理 2.6 の証明の概略を述べる。[7] による計算から、 $\Gamma$  不変量の評価  $\frac{1}{10} < \Gamma_{10_{28}}(0)$  を得る。これより  $K_{m,1} = -10_{28}^*$  に対する  $r_s$  不変量について  $r_0(K_{m,1}) < \infty$  が得られる。twist を増やす操

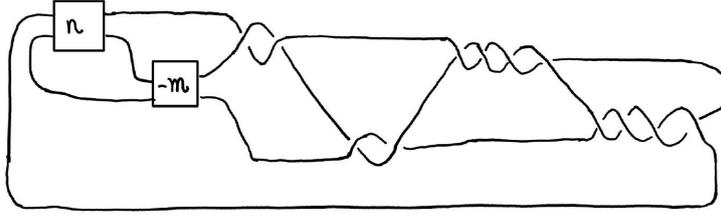


図 1: 2-bridge knot  $K_{m,n}$

作により, ペアの負定値コボルディズム

$$(W_n, S_n) : (S^3, K_{m,n}) \rightarrow (S^3, K_{m,n+1})$$

で  $\pi_1(W_n \setminus S_n) = 1$  かつ  $g(S_n) = 0$  を満たすものが構成できる. これより不等式

$$\infty > r_0(K_{m,1}) > r_0(K_{m,2}) > \dots$$

が得られる. 一方  $K_{m,n}$  の図 2 において,  $n$ -full twist の部分を解消する操作によって, null homol-  
ogous な円板の境界となる結び目  $K'$  と, 負定値コボルディズム  $K' \rightarrow -K_{m,n}^*$  が得られる. よっ  
て  $r_0(-K_{m,n}^*) \geq r_0(K') = \infty$ . 命題 1.6 を適用して主張を得る. このように,  $r_s$  不変量は交代結  
び目からなる  $\mathcal{C}_{AS}$  の  $\mathbb{Z}^\infty$  部分群を検出できる点において, 既存の Floer 理論によるコンコーダ  
ンス不変量とは異なった特徴をもつ. 一方で  $\mathcal{C}_{AS}$  内の  $\mathbb{Z}^\infty$  部分群そのものは, Casson-Gordon 不変  
量 [3] を用いて検出することもできる. 従って次の問いが生じる.

**問 2.8.** 2-bridge knot の族  $\{K_{m,n} = K(212mn - 68n + 53, -106m + 34)\}_{m \geq 7, n > 0}$  に自明な Casson-  
Gordon 不変量をもつ一次独立な族は存在するか?

問 2.8 が正しければ,  $r_s$  不変量は交代結び目の一次独立性に関して, Casson-Gordon 不変量よ  
り精密な情報を検出できることになる.

### 2.3 サテライト作用素に関する応用

$P \subset S^1 \times D^2$  を solid torus 内の結び目とする. 任意の結び目  $K \subset S^3$  に対して, その管状近傍  
 $N(K)$  を solid torus と同一視して得られる  $P$  の像を  $P(K)$  と表し,  $K \subset S^3$  のパターン  $P$  に関す  
るサテライト結び目 (satellite knot) と呼ぶ. パターン  $P$  に関してサテライト結び目を取る操作は  
コンコーダンス群上にサテライト作用素 (satellite operator)  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  を誘導する. 一般にサテラ  
イト作用素は準同型でないことが知られている. サテライト作用素に関して Hedden-Caicedo[15]  
は次の予想を提示した.

**予想 2.9.** ([15]) 定値でない任意のサテライト作用素の像は無限 rank をもつ.

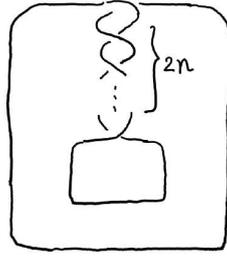


図 2:  $n$ -twisted knot  $K_n$

ここで、サテライト作用素の像が無限 rank をもつ、とはサテライト作用素の像が生成する  $\mathcal{C}$  の部分群が無限 rank をもつことを意味する。予想 2.9 はパターン  $P$  が winding number 0 をもつか否かによって状況が異なる。実際、パターン  $P$  の winding number  $\neq 0$  の場合は、予想 2.9 は比較的容易に証明を与えることができる。

**命題 2.10.** ([15])  $P$  を winding number  $\neq 0$  のパターンとする。このとき、サテライト作用素  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  は無限 rank をもつ。

証明は signature function など古典的な手法の範囲内で与えられる。一方、winding number  $\neq 0$  の状況では、double branched cover 上のゲージ理論を用いて、次の部分解が与えられた。

**定理 2.11.** ([15]).  $P$  を winding number 0 のパターンとし、 $\Sigma_2(P(U))$  を結び目  $P(U) \subset S^3$  に沿う double branched cover とする。  $\partial D^2$  が  $\Sigma_2(P(U))$  に  $\mathbb{Q}$ -linking number  $\neq 0$  となるリフトをもつとき、  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  は無限 rank をもつ。

一方、 $r_s$  不変量を用いて予想 2.9 にアプローチできる。  $P_{(p,q)}$  を  $(p,q)$ -cabling knot をとる操作とし、  $Wh_m$  を  $m$ -twisted Whitehead double をとる操作とする。

**定理 2.12.** (Daemi-井森-佐藤-Scaduto-谷口)  $K_n$  を図 2 で与えられる結び目の族とする。任意の整数  $p, m > 0$  に対し、  $\{P_{p,1} \circ Wh_m(K_n)\}_{n>0}$  はコンコーダンス群  $\mathcal{C}$  内で線型独立。

定理 2.12 の応用として、次の系が得られる。

**系 2.13.** サテライト作用素  $P_{p,1} \circ Wh_m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  の像は無限 rank をもつ。

系 2.13 に関して注意を述べておく。

**注意 2.14.** (i)  $P_{p,1} \circ Wh_m$  は winding number = 0 のサテライト作用素である。

(ii)  $\Sigma_2(P_{p,1} \circ Wh_m(U)) = \Sigma_2(U) = S^3$  より、特に  $\mathbb{Q}$ -linking number は自明である。

(iii)  $P_{p,1} \circ Wh_m$  の像として得られる結び目は位相的スライスになる。

(iv) コンコーダンス種数  $g_{\mathcal{C}}(P_{p,1} \circ Wh_m(K))$  は  $p$  によって上から評価される。

(i) および (ii) により, 系 2.13 が定理 2.11 と独立した予想 2.9 の部分解を与えていることが分かる. (iv) の性質により, 今回検出した一次独立な族は Heegaard Floer 理論から検出するのは困難と考えられる. 定理 2.12 の証明の概略について述べる. Kronheimer-Mrowka[25] による, Rasmussen 型不変量  $s^\#$  を用いる.  $\sigma(K) = 0$  かつ  $r_{-\infty}(-K^*) = \infty$  のとき,  $s^\#(K) \leq 0$  であることが示される. 一方, Gong[13] により quasi-positive knot に対して  $s^\#(K) \geq 0$  が成立する. 特に  $P_{(p,q)}Wh(K_n)$  は strongly quasi-positive であり,  $s^\#(P_{(p,q)}Wh(K_n)) > 0$  が成立する.  $\sigma(-P_{(p,1)}Wh(K_n)) = 0$  であるから,  $r_0(-P_{(p,1)}Wh(K_n)^*) < 0$  が導かれる. 負定値コボルディズム

$$(W_n, S_n) : -P_{(p,1)}Wh(K_n)^* \rightarrow -P_{(p,1)}Wh(K_{n+1})^*$$

で  $\pi_1(W_n \setminus S_n) = 1$  かつ  $g(S_n) = 0$  となるものが構成でき, 以下の不等式を得る.

$$r_0(-P_{(p,1)}Wh(K_1^*)) > r_0(-P_{(p,1)}Wh(K_2^*)) > \dots$$

また  $r_0(P_{(p,1)}Wh_m(K_n)) = \infty$  も得られる. 命題 1.6 を適用することで主張を得る.

## 参考文献

- [1] David Baraglia and Pedram Hekmati. Equivariant Seiberg-Witten-Floer cohomology. *arXiv preprint arXiv:2108.06855*, 2021.
- [2] Peter J Braam and Simon K Donaldson. Floer’s work on instanton homology, knots and surgery. In *The Floer memorial volume*, pages 195–256. Springer, 1995.
- [3] Andrew Casson and Cameron Gordon. On slice knots in dimension three. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part*, volume 2, pages 39–53, 1978.
- [4] Olivier Collin and Brian Steer. Instanton Floer homology for knots via 3-orbifolds. *Journal of Differential Geometry*, 51(1):149–202, 1999.
- [5] Aliakbar Daemi, Tye Lidman, David Shea Vela-Vick, and C-M Michael Wong. Ribbon homology cobordisms. *arXiv preprint arXiv:1904.09721*, 2019.
- [6] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto. Equivariant aspects of singular instanton Floer homology. *arXiv preprint arXiv:1912.08982*, 2019.
- [7] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto. Chern-Simons functional, singular instantons, and the four-dimensional clasp number. *arXiv preprint arXiv:2007.13160*, 2020.
- [8] Mariano Echeverria. A Generalization of the Tristram-Levine Knot Signatures as a Singular Furuta-Ohta Invariant for Tori. *arXiv preprint arXiv:1908.11359*, 2019.
- [9] Hisaaki Endo. Linear independence of topologically slice knots in the smooth cobordism group. *Topology and its Applications*, 63(3):257–262, 1995.

- [10] Andreas Floer. An instanton-invariant for 3-manifolds. *Communications in mathematical physics*, 118(2):215–240, 1988.
- [11] Andreas Floer. Instanton homology, surgery, and knots. *Geometry of low-dimensional manifolds*, 1:97–114, 1990.
- [12] Ralph H Fox. Some problems in knot theory. *Topology of 3-manifolds and related topics*, 1962.
- [13] Sherry Gong. On the Kronheimer–Mrowka concordance invariant. *Journal of Topology*, 14(1):1–28, 2021.
- [14] C McA Gordon. Ribbon concordance of knots in the 3-sphere. *Mathematische Annalen*, 257(2):157–170, 1981.
- [15] Matthew Hedden and Juanita Pinzón-Caicedo. Satellites of infinite rank in the smooth concordance group. *Inventiones mathematicae*, 225(1):131–157, 2021.
- [16] Jennifer Hom. The knot Floer complex and the smooth concordance group. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 89(3):537–570, 2014.
- [17] Jennifer Hom. An infinite-rank summand of topologically slice knots. *Geometry & Topology*, 19(2):1063–1110, 2015.
- [18] Jennifer Hom and Zhongtao Wu. Four-ball genus bounds and a refinement of the Ozsváth–Szabó tau invariant. *Journal of Symplectic Geometry*, 14(1):305–323, 2016.
- [19] Hayato Imori. Instanton knot invariants with rational holonomy parameters and an application for torus knot groups. *arXiv preprint arXiv:2108.13998*, 2021.
- [20] Min Hoon Kim and Kyungbae Park. An infinite-rank summand of knots with trivial Alexander polynomial. *Journal of Symplectic Geometry*, 16(6):1749–1771, 2018.
- [21] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and Floer K-theory. *arXiv preprint arXiv:2110.09258*, 2021.
- [22] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. *Monopoles and three-manifolds*. Cambridge, 2007.
- [23] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. Knots, sutures, and excision. *Journal of Differential Geometry*, 84(2):301–364, 2010.
- [24] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. Knot homology groups from instantons. *Journal of Topology*, 4(4):835–918, 2011.
- [25] Peter B Kronheimer and Tomasz S Mrowka. Gauge theory and Rasmussen’s invariant. *Journal of Topology*, 6(3):659–674, 2013.

- [26] Peter B Kronheimer and Tomaz S Mrowka. Dehn surgery, the fundamental group and  $SU(2)$ . *Mathematical Research Letters*, 11(6):741–754, 2004.
- [27] Jerome Levine. Knot cobordism groups in codimension two. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 44(1):229–244, 1969.
- [28] Ciprian Manolescu and Brendan Owens. A concordance invariant from the Floer homology of double branched covers. *International Mathematics Research Notices*, 2007(9):rnm077, 2007.
- [29] Yuta Nozaki, Kouki Sato, and Masaki Taniguchi. Filtered instanton Floer homology and the homology cobordism group. *arXiv preprint arXiv:1905.04001*, 2019.
- [30] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Knot Floer homology and the four-ball genus. *Geometry & Topology*, 7(2):615–639, 2003.
- [31] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Holomorphic disks and knot invariants. *Advances in Mathematics*, 186(1):58–116, 2004.
- [32] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 1027–1158, 2004.
- [33] Peter S Ozsváth, András I Stipsicz, and Zoltán Szabó. Concordance homomorphisms from knot Floer homology. *Advances in Mathematics*, 315:366–426, 2017.
- [34] Christos D Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43(1):169, 1957.
- [35] Jacob Rasmussen. Khovanov homology and the slice genus. *Inventiones mathematicae*, 182(2):419–447, 2010.
- [36] Jacob A Rasmussen. *Floer homology and knot complements*. Harvard University, 2003.