Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を復元する q 級数について

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
森　祥仁 (Akihito MORI)

概要

Gukov-Pei-Putrov-Vafa は homological block と呼ばれる q 級数を定義してその radial limit が WRT 不変量と一致することを予想した．今回の研究では H グラフで表される 3 次元ホモロジー球面に対して彼らの予想が正しいことを証明した．その結果としてそのような多様体の WRT 不変量が深さ 2, 重さ 1, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式であることがわかる．この発表は村上友哉氏（東北大学）との共同研究 [MM21] に基づく．

研究集会を開き講演の機会を下さった世話人の谷山公規氏, 安原晃氏, 村尾智氏, 丹下稜斗氏, 木村直記氏に感謝申し上げます。ありがとうございました。

1　序

1.1　WRT 不変量の先行研究

量子トポロジーは量子不変量を研究する分野である．特に Witten-Reshetikhin-Turaev (WRT) 不変量は注目に値する．WRT 不変量は向き付け可能な閉 3 次元多様体（すなわち Dehn 手術で得られる多様体）の位相不変量である．Witten [Wit89] は場の理論を用いて 3 次元多様体の位相不変量を構成した．しかし彼の構成は経路積分を用いるため, 数学者にとって扱いに困るものであった．Reshetikhin-Turaev [RT91] は Witten の仕事から着想を得て位相不変量を構成した．我々はこれを WRT 不変量と呼ぶ．Witten 及び Reshetikhin-Turaev の仕事が量子トポロジー誕生のきっかけになったのである．

WRT 不変量は向き付け可能な閉 3 次元多様体の不変量であるが, そのような多様体は Dehn 手術で得られることが知られている．

定義 1.1. $L=\{L_i\}_{i=1}^n$ を S^3 内の絡み目とする．L の管状近傍 $N(L)$ と書き $S^3 \setminus N(L)$ を $E(L)$ と書く．$V=\{V_i\}_{i=1}^n$ をソリッドトーラスの集合とする．このとき, 同相写像 $f\colon \partial V \to \partial E(L)$ による V と $E(L)$ の貼り合わせを Dehn 手術という．貼り合わせ写像は有理数で表されることが知られている．絡み目図式と有理数を合わせて手術図式という．

* 本研究は JSPS 科研費 JP 21J10271, JP 20J20308 の助成を受けたものである．
† akihito.mori.s5@dc.tohoku.ac.jp

各 L_i が自明な結び目の場合は各 L_i を頂点とし, L_i, L_j が絡まっていれば対応する頂点の間に辺を伸ばすことで手術図式をグラフで読み替えることができる.

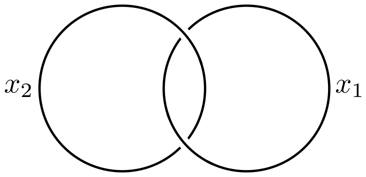

図 1: 手術図式の例 ($x_i \in \mathbb{Q}$)

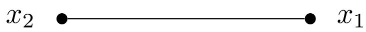

図 2: 手術図式に対応するグラフ

定義 1.2. 木 $G = (V, E)$ と重み $w\colon V \to \mathbb{Z}$ の組を plumbed グラフという. $w(v)$ を w_v と書く. 手術図式が plumbed グラフで与えられるような多様体を plumbed 多様体という.

plumbed 多様体の例として Brieskorn 多様体や Seifert 多様体が挙げられる. Brieskorn 多様体は三叉のグラフで表され, Seifert 多様体は中心から足が幾つか生えているグラフで表される.

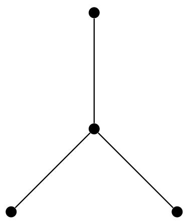

図 3: Brieskorn 多様体

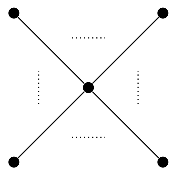

図 4: 手術図式に対応するグラフ

その重要性から, 現在に至るまで多くの研究者が WRT 不変量を研究対象に選んだ. 中でも本研究と目標を同じくする主だったものを以下に列挙する. Lawrence-Zagier [LZ99] は Poincaé ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ に対する WRT 不変量がある false theta 関数の radial limit で書けることを証明した. 樋上 [Hik06] は Seifert ホモロジー球面に対する WRT 不変量が Eichler 積分とその微分の極限値の和として書けることを証明している.

これらの事実から WRT 不変量を復元する整数係数 q 級数の存在が示唆される. Gukov-Pei-Putrov-Vafa は plumbed 多様体に対して homological block と呼ばれる q 級数を定義し, その radial limit の線形和が WRT 不変量と一致することを予想した [GPPV20]. 藤-岩木-村上-寺嶋 [FIMT20] は Seifert ホモロジー球面に対して Seifert 関数と呼ばれる q 級数を定義してその radial limit が WRT 不変量と一致することを証明した. Andersen-Mistegård [AM20] は Seifert 関数が Seifert 多様体に対する homological block と同等であることを証明し, 藤-岩木-村上-寺嶋とは別の方法で Seifert 多様体に対する homological block の radial limit から Seifert 多様体 WRT 不変量を復元できることを証明した. 以下に homological block と radial limit の定義を述べる.

定義 1.3 ([GPPV20, Subsection 3.4]). $G = (V, E, w)$ を plumbed グラフとする. $\delta = (\delta_v)_{v \in V}$ を $\deg(v)$ が奇数なら $\delta_v = 1$, 偶数なら $\delta_v = 0$ で定める. このとき, plumbed 多様体 $M_3(G)$ と $b \in (H_1(M_3(G), \mathbb{Z}) + \delta)/\{\pm 1\} \cong (2\mathbb{Z}^N / 2W(\mathbb{Z}^N) + \delta)/\{\pm 1\}$ に対して homological block が以下の

式で定義される.

$$\widehat{Z}_{G,b}(q) = q^{-\sum_{v\in V}(w_v+3)/4}\text{v.p.}\int_{|z_v=1|, v\in V}\prod_{v\in V}\frac{dz_v}{2\pi\sqrt{-1}z_v}(z_v-1/z_v)^{2-\deg(v)}\Theta_{-W,b}(z)$$

ただし v.p. は Cauchy の主値で, W は plumbed グラフに対応する手術図式 $\mathcal{G}$ の絡み行列であり,

$$\Theta_{-W,b}(q;\{z_v\}_{v\in V}) := \sum_{\boldsymbol{l}={}^t(l_v)_{v\in V}\in 2W(\mathbb{Z}^{|V|})+b} q^{-{}^t\boldsymbol{l}W^{-1}\boldsymbol{l}/4}\prod_{v\in V} z_v^{l_v}$$

とする.

定義 1.4. 開円盤 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|<1\}$ 上で定義された関数 f を考える. 円盤の境界上の点 x_0 をとる. このとき極限 $\lim_{t\to 1} f(tx_0+(1-t)x)$ を radial limit という.

1.2 量子モジュラー形式の先行研究

モジュラー形式とは高い対称性を持つ正則関数のことで, 数論の分野でよく研究されているが, 他にも Langlands 予想やムーンシャインなど様々な数学に姿を現す興味深い対象である. モジュラー形式には多様な変種が存在するが, 中でも量子モジュラー形式は量子トポロジーとの関連から最近盛んに研究されている. 以下に Zagier [Zag10] による量子モジュラー形式の定義を述べる.

定義 1.5 ([Zag10])**.** k を整数, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群, $\mathcal{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とする. 写像 $f\colon \mathcal{Q}\to\mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という:

任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して $f - f|_k\,\gamma$ が $\mathbb{R}$ の開集合上の解析関数に拡張できる.

ただし $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ に対して slash operator を $(f|_k\,\gamma)(x) = (c\tau+d)^{-k}f(\gamma x)$ で定義する.

この定義は Bringmann-Kaszian-Milas [BKM19] によって一般化されている.

定義 1.6 ([BKM19])**.** k を整数, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群, $\mathcal{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とする. $\mathcal{Q}_l(\Gamma)$ を重さ l, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式全体の集合とし, $\mathcal{O}(R)$ を $\mathbb{R}$ の開集合 R 上の解析関数全体の集合とする. 写像 $f\colon \mathcal{Q}\to\mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を深さ 2, 重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という: 任意の $\gamma\in\Gamma$ に対してある開集合 $R\subset\mathbb{R}$, $k_1,\dots,k_r\in 1/2\mathbb{Z}$ が存在して

$$f - f|_k\,\gamma \in \mathcal{O}(R)\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}\mathcal{Q}_{k_i}(\Gamma)\mathcal{O}(R)$$

が成り立つ.

深さ 2 の量子モジュラー形式と homological block に関して以下の定理が知られている.

定理 1.7 ([BMM20])**.** H グラフから定まるホモロジー球面の homological block は深さ 2, 重さ 1, 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式である.

2　主定理

我々は Seifert 多様体でない場合に homological block と WRT 不変量を研究する．特に H グラフで表される多様体を考える．

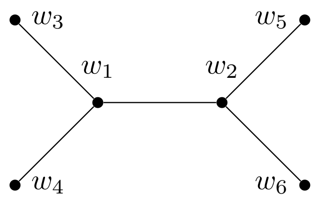

図 5: H グラフ Γ

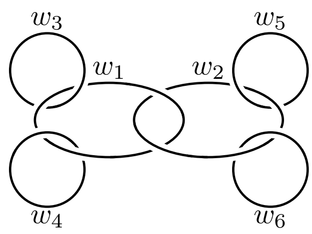

図 6: 手術図式 $\mathcal{L}(\Gamma)$

定理 2.1. WRT_k を WRT 不変量, Γ を H グラフ, $M(\Gamma)$ を手術図式 $\mathcal{L}(\Gamma)$ で表される 3 次元多様体, $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ を H グラフに対する homological block, ζ_k を 1 の原始 k 乗根とする．$w_i \in \mathbb{Z}_{<0}$, Γ の隣接行列 W は負定値で行列式は 1 とする．このとき以下の等式が成り立つ．

$$\mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma)) = -\frac{1}{2\left(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}\right)} \lim_{\substack{q \to \zeta_k^{-1} \\ |q|<1}} \widehat{Z}_\Gamma\left(q\right). \tag{1}$$

Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20] は $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ が深さ 2 の量子モジュラー形式になることを証明している．彼女らの結果と我々の結果を合わせると WRT 不変量が量子モジュラー形式であることがわかる．

定理 2.2. $f_\Gamma \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ を以下の式で定める．

$$f_\Gamma\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{1}{k^2} \sum_{\gamma = {}^t(\alpha,\beta) \in (2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2) \cap [0,\, k)^2} \varepsilon(\gamma) \boldsymbol{e}\left(\frac{h}{k} Q(\gamma)\right) \alpha\beta$$

ただし $h/k \in \mathbb{Q}$ は既約分数であって, Q は W^{-1} の左上の 2×2 行列が定める 2 次形式とする．このとき f_Γ は深さ 2, 重さ 1, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式であって, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$f_\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right) = -\frac{2\left(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}\right)}{\zeta_k^{-(18 + \sum_{i=1}^{6} w_i + \sum_{i=3}^{6} 1/w_i)/4}} \mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma))$$

が成り立つ．

3　証明の概略

まず記号を準備する．

- h/k は既約分数,

- $M, N, a, c \in \mathbb{Z}_{>0}, b \in \mathbb{Z}$ で $ac - MNb^2 = 1$ を満たす,
- $Q(x, y) := Max^2 + 2MNbxy + Ncy^2$,
- 写像 $\chi\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,
- 写像 $\psi\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,
- 写像 $C\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

証明する際に重要なのが以下の命題である.

命題 3.1 ([MM21])**.** χ は以下の条件を満たすとする.

- $\sum_{\alpha \in \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} \chi(\alpha) = 0$
- $\chi(\alpha) \neq 0$ なる α の既約分数表示の分母は $2M$
- $M\alpha, M\alpha^2 \bmod \mathbb{Z}$ は $\chi(\alpha) \neq 0$ なる α の取り方に依らない.

ψ も同様の条件を満たすとする. このとき

$$\sum_{(\alpha,\beta) \in (\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \times (\frac{1}{2N}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})} \chi(\alpha)\psi(\beta)C(\alpha)e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{h}{k}Q(\alpha,\beta)} = 0$$

が成り立つ.

直接計算と命題 3.1 を使うことで WRT 不変量を重み付き Gauss 和で表示できる. 一方で Euler-Maclaurin の和公式と命題 3.1 を使うことで homological block の radial limit を重み付き Gauss 和で表示できる. 両者の表示が一致することから定理 2.1 が証明できる. 定理 2.1 と Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20] の主結果を合わせることで定理 2.2 が証明できる. 以上が主結果の証明の概略である.

参考文献

[AM20] J. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. September 2020. arXiv:1811.05376v3.

[BKM19] Kathrin Bringmann, Jonas Kaszian, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(2):Paper No. 20, 41, 2019.

[BMM20] Kathrin Bringmann, Karl Mahlburg, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.

[FIMT20] Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Hitoshi Murakami, and Yuji Terashima. Witten–Reshetikhin–Turaev function for a knot in Seifert manifolds. 2020. arXiv:2007.15872.

[GPPV20] Sergei Gukov, Du Pei, Pavel Putrov, and Cumrun Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.

[Hik06] Kazuhiro Hikami. Quantum invariants, modular forms, and lattice points. II. *J. Math. Phys.*, 47(10):102301, 32, 2006.

[LZ99] Ruth Lawrence and Don Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. volume 3, pages 93–107. 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.

[MM21] Akihito Mori and Yuya Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev, homological blocks, and quantum modular forms. 2021. arXiv:2110.10958v2.

[RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.

[Wit89] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.

[Zag10] Don Zagier. Quantum modular forms. In *Quanta of maths*, volume 11 of *Clay Math. Proc.*, pages 659–675. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.