THE ONE-ROW COLORED $\mathfrak{sl}_3$ JONES POLYNOMIAL FOR PRETZEL LINKS

川添　浩太郎（明治大学大学院先端数理科学研究科）*

概 要

色付き Jones 多項式とは, 向き付きの絡み目の不変量である. 一般に $\mathfrak{sl}_3$ 色付き Jones 多項式を計算することは難しく, 具体的な絡み目に対しては, 一部のトーラス絡み目と二橋絡み目のみ知られている. 本講演では $\mathfrak{sl}_3$ 色付き Jones 多項式に制限を加えることにより Kuperberg によって導入された A_2 ブラケットを用いて得られてたプレッツェル絡み目に対する結果を紹介する.

1　背景

結び目, 絡み目に対して, 量子不変量は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその既約表現 V の組み合わせの数だけ存在する. 特に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ で $V = \mathbb{C}^2$ である量子不変量は, Jones 多項式 [Jon85] と呼ばれている. 1987 年に Kauffman[Kau87] は, この Jones 多項式を Kauffman ブラケットと絡み目の図式を用いて図形的に計算できる形で再定義した. 更に, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ でその $(N+1)$-次元既約表現に対応する量子不変量を色付き Jones 多項式という. 色付き Jones 多項式に関しても, Kauffman ブラケットと Jones-Wenzel 冪等元 [Wen87] を用いることで図形的手法で計算する事ができると知られている. この図形的手法で計算された色付き Jones 多項式の計算結果は多く存在しており, それらの結果は, 体積予想, Jones スロープ予想等を考える時に役に立つ. 一方で, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ でその (n_1, n_2)-既約表現についても色付き Jones 多項式を考えることができる. $\mathfrak{sl}_2$ の時と同様に, Jones-Wenzel 冪等元に相当する A_2 クラスプと Kauffman ブラケットに相当する Kuperberg によって導入された A_2 ブラケット [Kup96] を用いる事で絡み目の図式を変形して計算することができる. しかし, その計算は $\mathfrak{sl}_2$ の場合と比べて複雑であり, 自明でない結び目, 絡み目に対して計算された例は少ない. まず, Lawrence によって三葉結び目に対して $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式が与えられた. その後に, Garaoufalidis, Morton, Voung らによって表現論の手法を用いて $(2, 2m+1)$ 型トーラス結び目 [Law03][GMV13][GV17] に対して一般の $\mathfrak{sl}_3$Jones が求められいる. また, 湯浅氏によって $\mathfrak{sl}_3$ の既約表現を $(n, 0)$-既約表現と制限して図形的手法を用いて one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式として, 二橋結び目 [Yua17], $(2, 2m)$ 型トーラス絡み目 [Yua17][Yua18a][Yua21a] に対して結果が与えらている. 本研究において, 湯浅氏と同様に図形的手法を用いて one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式として計算を行っている.

本研究では, A_2 ブラケットに関する既存と計算公式と 2 つの新しい計算公式を導入することで得られたプレッツェル絡み目 $P(2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma)$ に対する one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式に関する結果

*〒 164-8525 東京都中野区中野４丁目２１－１ 明治大学大学院先端数理科学研究科先端メディアサイエンス専攻
E-mail adress:k_kotaro@meiji.ac.jp

を得られた. また, 4,5-パラメータのプレッツェル絡み目である $8_{10}, 8_{15}, 8_{20}, 8_{21}$ に関しても one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式も得ることができた.

2 準備

まず, Kupreberg[Kup96] によって導入された A_2 ブラケットと A_2 クラスプを紹介する. 今回, 量子整数の記号として次を用いる.

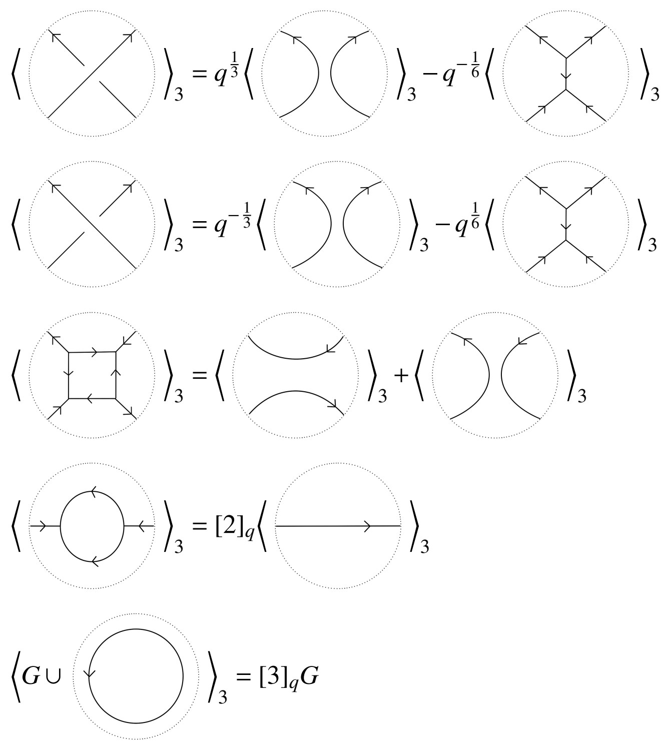
$$\{n\}_q = \{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}\}_q, \quad \{n\}_q! = \{n\}_q\{n-1\}_q \cdots \{1\}_q, \quad [n]_q = \frac{\{n\}}{\{1\}}, \quad [n]_q! = [n]_q[n]_q \cdots [1]_q$$

ここで, n は非負整数である. また, q-Pochhammer symbol を次で定義する.

$$(q)_k = \prod_{i=1}^{k}(1-q^i).$$

向付きの絡み目の図式に対して, A_2 ブラケットは次のように定められている.

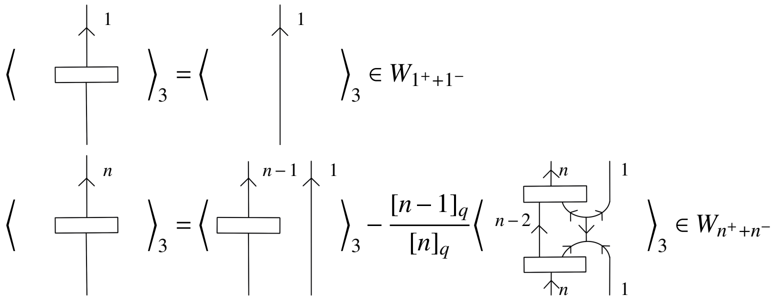
Definition 2.1 (A_2 ブラケット [Kup96])**.**



ここで G は bipartite uni-tri valent graphs である.

次の $(n,0)$ 型の A_2 クラスプは, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式において色付き $\mathfrak{sl}_2$Jones 多項式を図形的に求める際に使う Jones-Wenzel 冪等元と同様の役割を果たすものである.

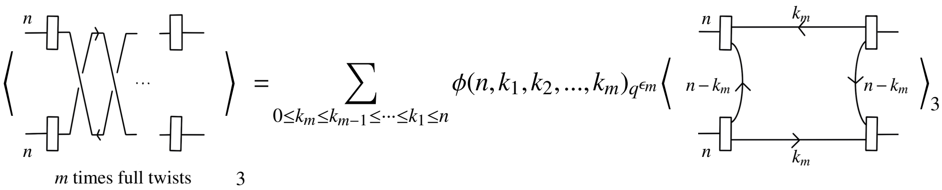
Definition 2.2 ($(n,0)$ 型の A_2 クラスプ [Kup96])**.** n を自然数とする.



3 A_2 ブラケットに関する公式

本節では, プレッツェル絡み目の one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式を求める際に主に必要となる 4 つの計算公式について紹介する. このうち向きが同調していない m 回のフルツイスト, A_2 バブルスケインの公式に関しては [Yua17] において与えられたものである.

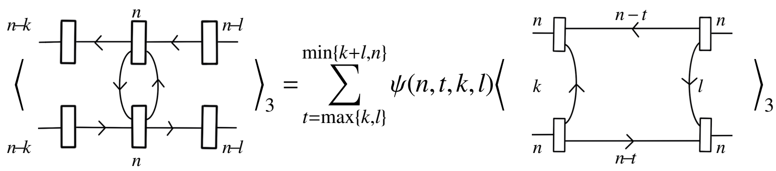
Theorem 3.1 ([Yua17])**.**



ここで

$$\phi(n,k_1,k_2,\ldots,k_m)_{q^{\epsilon_m}} = \frac{(q^{\epsilon_m})^{-\frac{2m}{3}(n^2+3n)}(q^{\epsilon_m})^{n-k_m}(q^{\epsilon_m})^{\sum_{i=1}^{m}(k_i^2+2k_i)}(q^{\epsilon_m})_n^2}{(q^{\epsilon_m})_{n-k_1}(q^{\epsilon_m})_{k_1-k_2}\cdots(q^{\epsilon_m})_{k_{m-1}-k_m}(q^{\epsilon_m})_{k_m}^2}$$

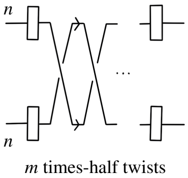
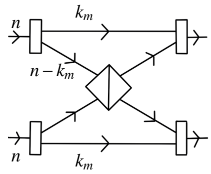
Theorem 3.2 ([Yua17])**.**



ここで

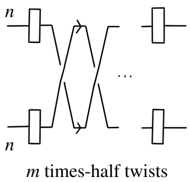
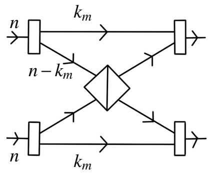
$$\psi(n,t,k,l) = \frac{q^{(t+1)(t-k-l)+kl}(q)_k(q)_l(q)_{n-k}^2(q)_{n-l}^2(q)_{2n-t+2}}{(q)_n^2(q)_{n-t}^2(q)_{t-k}(q)_{t-l}(q)_{2n-k-l+2}(q)_{-t+k+l}}$$

Proposition 3.3 (Kawasoe)**.**

$\Big\langle$  $\Big\rangle_3 = \displaystyle\sum_{0\le k_m\le k_{m-1}\le\cdots\le k_1\le n} \chi_+(n,k_1,k_2,...,k_m)\Big\langle$  $\Big\rangle_3$ (3.1)

ここで

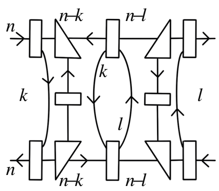
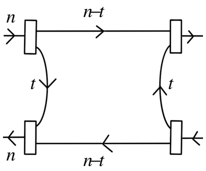
$$\chi_+(n,k_1,k_2,...,k_m) = (-1)^{nm}\frac{q^{-\frac{1}{6}(n^2+3n)m}q^{\frac{1}{2}(n-k_m)}(-1)^{\sum_{i=1}^m k_i}q^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(k_i^2+k_i)}(q)_n}{\prod_{i=1}^m (q)_{k_{i-1}-k_i}(q)_{k_m}}$$

$\Big\langle$  $\Big\rangle_3 = \displaystyle\sum_{0\le k_m\le k_{m-1}\le\cdots\le k_1\le n} \chi_-(n,k_1,k_2,...,k_m)\Big\langle$  $\Big\rangle_3$ (3.2)

ここで

$$\chi_-(n,k_1,k_2,...,k_m) = (-1)^{nm}\frac{q^{\frac{1}{6}(n^2+3n)m}q^{-\frac{1}{2}(n-k_m)}(-1)^{\sum_{i=1}^m k_i}q^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{2}(k_i^2-k_i)}q^{\sum_{i=1}^m k_{i-1}k_i}(q)_n}{\prod_{i=1}^m (q)_{k_{i-1}-k_i}(q)_{k_m}}$$

Proposition 3.4 (Kawasoe)**.**

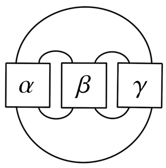
$\Big\langle$  $\Big\rangle_3 = \displaystyle\sum_{t=\max\{k,l\}}^{\min\{k+l,n\}}\sum_{a=t}^{n}\Omega(n,t,k,l)\Big\langle$  $\Big\rangle_3$

where

$$\Omega(n,k,l,t) = \frac{q^{-\frac{k+l}{2}+t}q^{(t+1)(t-k-l)+kl}(1-q^{n+1-k})(1-q^{n+1-l})(q)_k(q)_l(q)_{n-k}^2(q)_{n-l}^2(q)_{2n-t+2}}{(1-q^{n+1-t})^2(q)_n^2(q)_{n-t}^2(q)_{t-k}(q)_{t-l}(q)_{2n-k-l+2}(q)_{-t+k+l}}$$

4 プレッツェル絡み目の $\mathfrak{sl}_3$ 色付き Jones 多項式

主に 3-パラメータのプレッツェル絡み目を扱う.

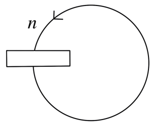
$P(\alpha,\beta,\gamma) =$ 

L を $(L_1, L_2, ..., L_r)$ の成分で構成される向き付き絡み目とする. この時, L に対して one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$ Jones 多項式は次で定義される.

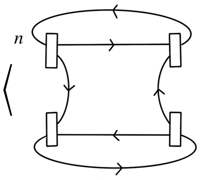
$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(L;q) = (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-w(L)}\langle L(n,0)\rangle_3/\Delta(n,0)$$

ここで $w(L)$ は L のねじれ数である. また,

$$\Delta(n,0) = \Big\langle \quad \Big\rangle_3$$



Lemma 4.1 ([Yua17])**.**



$$\Big\langle \quad \Big\rangle_3 = q^{-(n-k)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})}\Delta(n,0)$$

Theorem 4.2 (Kawasoe)**.** $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{Z}$ とする. プレッツェル絡み目 $P(\alpha,\beta,\gamma)$ に対して, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$ Jones 多項式は次で与えられる.

(1) プレッツェル絡み目 $P(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ は自明な結び目を成分として持つ 3 成分の絡み目である. また, プレッツェル絡み目のパラメータは巡回的に入れ替えるが可能である. そのうえで, 向きの付け方を考えると $P(2\alpha, 2\beta, 2\gamma)$ について, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$ Jones 多項式を次の二つの式で全て与える事が出来ている.

$$\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha \uparrow, \downarrow 2\beta \uparrow, \downarrow 2\gamma \uparrow);q)\\
&= \sum_{0\le k_{|\alpha|}\le k_{|\alpha|-1}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{|\beta|}\le l_{|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{|\alpha|},l_{|\beta|}\}}^{\min\{k_{|\alpha|}+l_{|\beta|},n\}}\ \sum_{t=\max\{s,m_{|\gamma|}\}}^{\min\{s+m_{|\gamma|},n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta+2\gamma)}\\
&\phi(n,k_1,k_2,...,k_{|\alpha|})_{q^{\epsilon_\alpha}}\phi(n,l_1,l_2,...,l_{|\beta|})_{q^{\epsilon_\beta}}\phi(n,m_1,m_2,...,m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\psi(n,s,k_{|\alpha|},l_{|\beta|})\psi(n,t,s,m_{|\gamma|})q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha \downarrow, \uparrow 2\beta \uparrow, \downarrow 2\gamma \uparrow);q)\\
&= \sum_{0\le k_{2|\alpha|}\le k_{2|\alpha|-1}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{2|\beta|}\le l_{2|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_{\gamma}\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{2|\alpha|},l_{2|\beta|}\}}^{\min\{k_{2|\alpha|}+l_{2|\beta|},n\}}\ \sum_{a=0}^{n-s}\ \sum_{t=\max\{a,m_{|\gamma|}\}}^{\min\{a+t+m_{|\gamma|},n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{2\alpha+2\beta-2\gamma}\\
&\chi_{sign(2\alpha)}(n,k_1,k_2,...,k_{|\alpha|})\chi_{sign(2\beta)}(n,l_1,l_2,...,l_{2|\beta|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\Omega(n,s,k_{2|\alpha|},l_{2|\beta|})\psi(n,t,a,m_{|\gamma|})\\
&q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(2) $P(2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma)$ の向きのつけ方は結び目なので一意である.

$$
\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta+1\uparrow, \downarrow 2\gamma\uparrow); q)\\
=&\sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|}, l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|}, n\}}\ \sum_{a=s}^{n}\ \sum_{t=\max\{a,s\}}^{\min\{a+s,n\}}\\
&(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)}\chi_{sign(2\alpha+1)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|2\alpha+1|})\chi_{sing(2\beta+1)}(n, l_1, l_2, ..., l_{|2\beta+1|})\phi(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\\
&\Omega(n, s, k_{|2\alpha+1|}, l_{|2\beta+1|})\psi(n, a, m_{|\gamma|}, t)q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

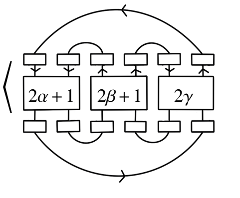
(3) $P(2\alpha+1, 2\beta, 2\gamma)$ は 2 成分の絡み目であり, 向きのつけ方まで考えると 2 パターン考えればよい.

$$
\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta\uparrow, \downarrow 2\gamma\uparrow); q)\\
=&\sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{2|\beta|}\le l_{2|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|}, l_{2|\beta|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{2|\beta|}\}}\ \sum_{a=0}^{n-s}\ \sum_{t=\{a,s\}}^{\min\{a+s,n\}}(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(-2\alpha-2\beta+2\gamma-1)}\\
&\chi_{sign(2\alpha+1)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta)}(n, l_1, l_2, ..., l_{2|\beta|})\phi(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_{|\gamma|}}}\Omega(n, k_{|2\alpha+1|}, l_{2|\beta|}, t)\\
&\psi(n, t, a, m_{|\gamma|})q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

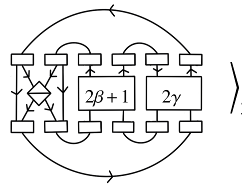
$$
\begin{aligned}
&J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta\downarrow, \uparrow 2\gamma\uparrow); q)\\
=&\sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_{|\beta|}\le l_{|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n}\ \sum_{0\le m_{|\gamma|}\le m_{|\gamma|-1}\le\cdots\le m_1\le n}\ \sum_{s=\max\{k_{2|\alpha|}, l_{|\beta|}\}}^{\min\{k_{2|\alpha|}+l_{|\beta|}\}}\ \sum_{a=0}^{n-s}\ \sum_{t=\{a,s\}}^{\min\{a+s,n\}}(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(-2\alpha-2\beta+2\gamma-1)}\\
&\chi_{sign(2\alpha+1)}(n, k_1, k_2, ..., k_{|2\alpha+1|})\phi(n, l_1, l_2, ..., l_{|\beta|})_{q^{\epsilon_\beta}}\chi_{sing(2\gamma)}(n, m_1, m_2, ..., m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_{|\gamma|}}}\Omega(n, k_{2|\alpha|}, l_{|\beta|}, t)\\
&\psi(n, t, a, m_{|\gamma|})q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Proof. (4.2) について証明する.

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(\downarrow 2\alpha+1\downarrow, \uparrow 2\beta+1\uparrow, \downarrow 2\gamma\uparrow); q)$$

$= (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)}\Big\langle$  $\Big\rangle_3/\Delta(n,0)$

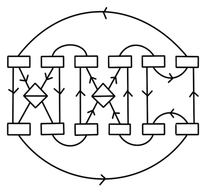
$$\underset{(\text{Proposition3.3})}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,\ldots,k_{|2\alpha+1|})\Big\langle$$



$$\Big\rangle_3 / \Delta(n,0)$$

$$\underset{(\text{Proposition3.3,Theorem3.1})}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,\ldots,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,\ldots,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,\ldots,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}\Big\langle$$

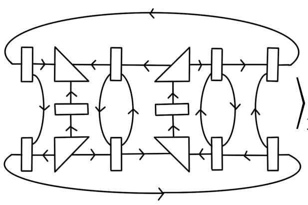


$$\Big\rangle_3 / \Delta(n,0)$$

$$= (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,\ldots,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,\ldots,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,\ldots,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}$$

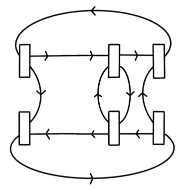
$$\times\Big\langle$$



$$\Big\rangle_3 / \Delta(n,0)$$

$$\underset{(\text{Propositon3.4})}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|},n\}} \sum_{a=s}^{n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,\ldots,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,\ldots,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,\ldots,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}\Big\langle$$

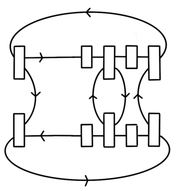


$$\Big\rangle_3 / \Delta(n,0)$$

$$= (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|},n\}} \sum_{a=s}^{n}$$

$$\times\chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,\ldots,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,\ldots,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,\ldots,m_\gamma)_{q^{\epsilon\gamma}}$$

$$\times\Omega(n,s,k_{|2\alpha+1},l_{|2\beta+1|})\Big\langle$$

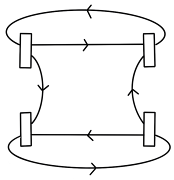


$$\Big\rangle_3 / \Delta(n,0)$$

$$
\underset{(\text{Theorem3.2})}{=} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-(2\alpha+2\beta-2\gamma+2)} \sum_{0\le k_{|2\alpha+1|}\le k_{|2\alpha|}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{|2\beta+1|}\le l_{|2\beta|}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|}\}}^{\min\{k_{|2\alpha+1|}+l_{|2\beta+1|},n\}}
$$

$$
\sum_{a=s}^{n} \sum_{t=\max\{s,m_\gamma\}}^{\min\{s+m_\gamma,n\}} \chi_{sign(2\alpha+1)}(n,k_1,k_2,...,k_{|2\alpha+1|})\chi_{sign(2\beta+1)}(n,l_1,l_2,...,l_{|2\beta+1|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_\gamma)_{q^{\epsilon_\gamma}}
$$

$$
\times\Omega(n,s,k_{|2\alpha+1|},l_{|2\beta+1|})\psi(n,a,m_\gamma,t)\Big\langle
$$



$$
\Big\rangle_3/\Delta(n,0)
$$

$$
\underset{(\text{Lemma4.1})}{=} \sum_{0\le k_{2|\alpha|}\le k_{2|\alpha|-1}\le\cdots\le k_1\le n} \sum_{0\le l_{2|\beta|}\le l_{2|\beta|-1}\le\cdots\le l_1\le n} \sum_{0\le m_\gamma\le m_{\gamma-1}\le\cdots\le m_1\le n} \sum_{s=\max\{k_{2|\alpha|},l_{2|\beta|}\}}^{\min\{k_{2|\alpha|}+l_{2|\beta|},n\}} \sum_{a=0}^{n-s} \sum_{t=\max\{a,m_{|\gamma|}\}}^{\min\{a+t+m_{|\gamma|},n\}} (q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{2\alpha+2\beta-2\gamma}
$$

$$
\times\chi_{sign(2\alpha)}(n,k_1,k_2,...,k_{|\alpha|})\chi_{sign(2\beta)}(n,l_1,l_2,...,l_{2|\beta|})\phi(n,m_1,m_2,...,m_{|\gamma|})_{q^{\epsilon_\gamma}}\Omega(n,s,k_{2|\alpha|},l_{2|\beta|})\psi(n,t,a,m_{|\gamma|})
$$

$$
\times q^{-(n-t)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})}
$$

(4.1), (4.3), (4.5) についても (4.2) と似た方法で証明することができる． □

Remark 4.3. $P(2\alpha+1,2\beta+1,2\gamma)$ に対して, one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式の係数を見ることができる. 例えば, $J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,3,2);q)$ の q の最低次数を用いて正規化した $\hat{J}^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,3,2);q)$ について Mathematica によって $n=1\sim7$ まで計算すると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
n=1: &\quad 1-q+q^2-2q^4+q^5-2q^6+q^7+q^8+q^{10}\\
n=2: &\quad 1-q+0q^2+q^3-2q^4+2q^6-2q^7-2q^8+4q^9+q^{10}+\cdots\\
n=3: &\quad 1-q+0q^2+0q^3+q^4+q^5+q^7-4q^8-q^9+8q^{10}+\cdots\\
n=4: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+2q^5+q^6-2q^8-4q^9+4q^{10}\cdots\\
n=5: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+q^5+2q^6+q^7-3q^8-4q^q+q^{10}+\cdots\\
n=6: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+q^5+q^6+2q^7-2q^8-2q^9+3q^{10}+\cdots\\
n=7: &\quad 1-q+0q^2+0q^3-2q^4+q^5+q^6+q^7-q^8-q^9+2q^{10}+\cdots
\end{aligned}
$$

(4.3) を用いると本講演では講演を行っていないが $P(2\alpha+1,2\beta+1,2\gamma)$ に対して, 上記のように one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式の係数が安定していることを証明することができる.

第 2 節で紹介した 4 つの A_2 ブラケットの公式を用いることで, 全てのパラメータが奇数であるものを除く全ての n 個のパラメータであらわされるプレツェル絡み目に対して one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式を計算することができる. ここでは, 4,5-パラメータのプレッツェル絡み目である $8_{10}, 8_{15}, 8_{20}, 8_{21}$ に関して結果を紹介する.

Theorem 4.4 (Kawasoe)**.**

(1) $P(-3,-2,3,-1)=8_{10}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(-3,-2,3,-1);q)$$

$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_2\le l_1\le n}\ \sum_{0\le p_3\le p_2\le p_1\le n}\ \sum_{m=0}^{n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l_2\}}^{\min\{k_3+l_2,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p_3,m\}}^{\min\{p_3+m,n\}}\sum_{b=s}^{n}\ \sum_{u=\max\{a,b\}}^{\min\{a+b,n\}}(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^3$$

$$\chi_-(n,k_0,k_1,k_2)\chi_-(n,l_0,l_1)_{q^{-1}}\chi_+(n,p_1,p_2,p_3)\chi_-(n,m)\Omega(n,t,k_3,l_2)\Omega(n,s,p_3,m)\psi(n,u,a,b)q^{-(n-u)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{u+1})(1-q^{u+2})}$$

(2) $P(3,-1,-2,-1,3)=8_{15}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,-1,-2,-1,3);q)$$

$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l\le n}\ \sum_{0\le m_2\le m_1}\sum_{0\le p\le n}\ \sum_{0\le r_3\le r_2\le r_1\le n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l\}}^{\min\{k_3+l,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\sum_{s=\max\{p,r_3\}}^{\min\{p+r_3,n\}}\ \sum_{b=s}^{n}$$

$$\sum_{u=\max\{a,m_1\}}^{\min\{a+m_2,n\}}\ \sum_{v=\max\{b,m_2\}}^{\min\{b+m_2,n\}}(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-2}\chi_+(n,k_1,k_2,k_3)\chi_-(n,l)\phi(n,m_1,m_2)\chi_-(n,p)\chi_+(n,r_1,r_2,r_3)\Omega(n,t,k_3,l)$$

$$\Omega(n,s,p,r_3)\psi(n,u,a,m_2)\psi(n,v,u,b)q^{-(n-v)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})}$$

(3) $P(3,-2,-3,1)=8_{20}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,-2,-3,1);q)$$

$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_2\le l_1\le n}\ \sum_{0\le p_3\le p_2\le p_1\le n}\ \sum_{m=0}^{n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l_2\}}^{\min\{k_3+l_2,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p_3,m\}}^{\min\{p_3+m,n\}}\ \sum_{b=s}^{n}\sum_{u=\max\{a,b\}}^{\min\{a+b,n\}}q^{\frac{n^2+3n}{3}}$$

$$\chi_+(n,k_1,k_2,k_3)\chi_-(n,l_1,l_2)_{q^{-1}}\chi_-(n,p_1,p_2,p_3)\chi_+(n,m)\Omega(n,t,n-k_3,l_2)\Omega(n,s,n-p_2,n-m)$$

$$\psi(n,u,t+a,s+b)q^{-(n-u)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{u+1})(1-q^{u+2})}$$

(4) $P(3,3,-1,-2)=8_{21}$ に対して,

$$J^{\mathfrak{sl}_3}_{(n,0)}(P(3,3,-1,-2);q)$$

$$=\sum_{0\le k_3\le k_2\le k_1\le n}\ \sum_{0\le l_3\le l_2\le l_1\le n}\ \sum_{0\le p\le n}\ \sum_{0\le m_2\le m_1\le n}\ \sum_{t=\max\{k_3,l_3\}}^{\min\{k_3+l_3,n\}}\ \sum_{a=t}^{n}\ \sum_{s=\max\{p,m\}}^{\min\{p+m,n\}}\sum_{b=s}^{n}\ \sum_{u=\max\{a,b\}}^{\min\{t+s,n\}}$$

$$(q^{\frac{n^2+3n}{3}})^{-3}\chi_+(n,k_1,k_2,k_3)\chi_+(n,l_1,l_2,l_3)\chi_-(n,p)\chi_-(n,m_1,m_2)$$

$$\Omega(n,t,k_3,l_3)\Omega(n,s,p,m_2)\psi(n,u,a,b)q^{-(n-u)}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})}{(1-q^{u+1})(1-q^{u+2})}$$

Remark 4.5. Theorem4.2, Theorem4.4 と既存の結果を合わせることで $8_{16},8_{17},8_{18}$ を除く全ての 8 交点以下の結び目に対して one-row 色付き $\mathfrak{sl}_3$Jones 多項式が決定される.

参考文献

[GMV13] S. Garoufalidis, H. Morton, and T. Vuong, The SL_3 colored Jones polynomial of the trefoil, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 6, 2209–2220. MR 3034446

[GV17] S. Garoufalidis and T. Vuong, A stability conjecture for the colored Jones polynomial, Topology Proc. 49 (2017), 211–249. MR 3570390

[Law03] R. Lawrence, The PSU(3) invariant of the Poincarê homology sphere, Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop "Invariants of Three-Manifolds" (Calgary, AB, 1999), vol. 127, 2003, pp. 153–168. MR 1953324

[Jon85] V. F. R. Jones, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985), no. 1, 103–111. MR 766964

[Kau87] L. H. Kauffman, State models, and the Jones polynomial, Topology 26 (1987), no. 3, 395–407. MR 899057

[Kup96] G. Kuperberg, Spiders for rank 2 Lie algebras, Comm. Math. Phys. 180 (1996), no. 1, 109–151. MR 1403861

[Wen87] H. Wenzl, On sequences of projections, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 9 (1987), no. 1, 5–9. MR 873400

[Yua17] W. Yuasa, The $\mathfrak{sl}_3$ colored Jones polynomials for 2−bridge links, J. Knot Theory Ramifications 26(2017), no.7, 1750038, 37.MR 3660093

[Yua18a] ________, A q-series identity via the $\mathfrak{sl}_3$ colored Jones polynomials for the $(2,2m)$-torus link, Proc.Amer. Math. Soc. 146 (2018), no. 7, 3153–3166. MR 3787374

[Yua21a] ________, Twist formulas for one-row colored A_2 webs and $\mathfrak{sl}_3$ tails of $(2,2m)$-torus links. Acta Math. Vietnam. 46 (2021), no. 2, 369^^e2^^80^^93387. MR4264242