完全グラフの book presentation の分類

炭本 貴裕 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

book presentation とはグラフの $\mathbb{R}^3$ への特殊な埋め込みのことである. 6 頂点完全グラフの book presentation は $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合うものを同値として D. Rowland によって分類されている. 私は, 頂点数が 7 および 8 の完全グラフの book presentation で sheet の数が最小のものを, $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合うものを同値とみなして分類した.

1 準備

いくつかの用語と記号の準備をしておく. まず, グラフと言えば抽象的な有限グラフのこととし, 向きは考えない. 特に n 個の頂点からなるグラフで, 任意の異なる 2 頂点がちょうど 1 本の辺で結ばれているものを n 頂点**完全グラフ**と言い, K_n と表す. また, $\mathbb{R}^3$ 内の 2 つの部分空間が $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合う時, 2 つの部分空間は**同型**であると言うことにする.

2 Book presentation

定義 2.1 $\mathbb{R}^3$ において, L を直線, $S_1, \ldots, S_n$ を L を境界に持つ n 個の互いに異なる半平面とし, $B_n = L \cup \bigcup S_i$ とおく. この時, グラフ G の B_n への埋め込みの像で次の 2 つの条件を満たすものを G の n**-book presentation** と言う.

条件 1. G の全ての頂点は L に埋め込まれている.
条件 2. G の各辺はただ 1 つの S_i に proper に埋め込まれている.

ここで L を **binder**, 各 S_i を **sheet**, B_n を n**-book** と呼ぶ.

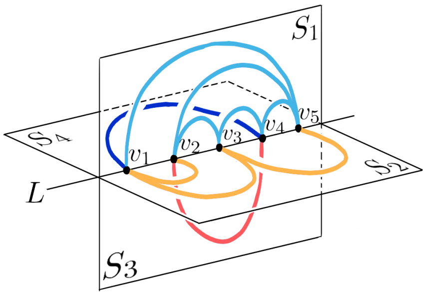


図 1 K_5 の 4-book presentation

* e-mail:u153413e@ecs.osaka-u.ac.jp

book presentation の図式を導入する. 境界 $\mathcal{B}$ を共有し内部では交わりを持たない位相的な円盤たち $\mathcal{S}_1$, ..., $\mathcal{S}_n$ からなる $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $\mathcal{D}_n$ とし, G の n-book presentation を $\widetilde{G}$ とする. $\mathbb{R}^3$ の全同位により, 頂点が $\mathcal{B}$ 上にあり, 各辺がある $\mathcal{S}_i$ の弦になるように $\widetilde{G}$ を $\mathcal{D}_n$ 内に変形できる. この時, $\mathcal{S}_1$, ..., $\mathcal{S}_n$ と $\mathcal{B}$ はそれぞれ n-book の sheet と binder とみなせる. このように変形した $\widetilde{G}$ を平面に射影し, $\mathcal{B}$ が円 C に, 各辺が C の弦になるようにし, 辺の交差は横断的な 2 重点のみになるようにする. 更に辺の交差に適切に上下の情報を加えたものを, $\widetilde{G}$ の **circular diagram** と言う. また circular diagram を sheet ごとに分離して, "上方に" あるものから順に左から並べた図式も使う.

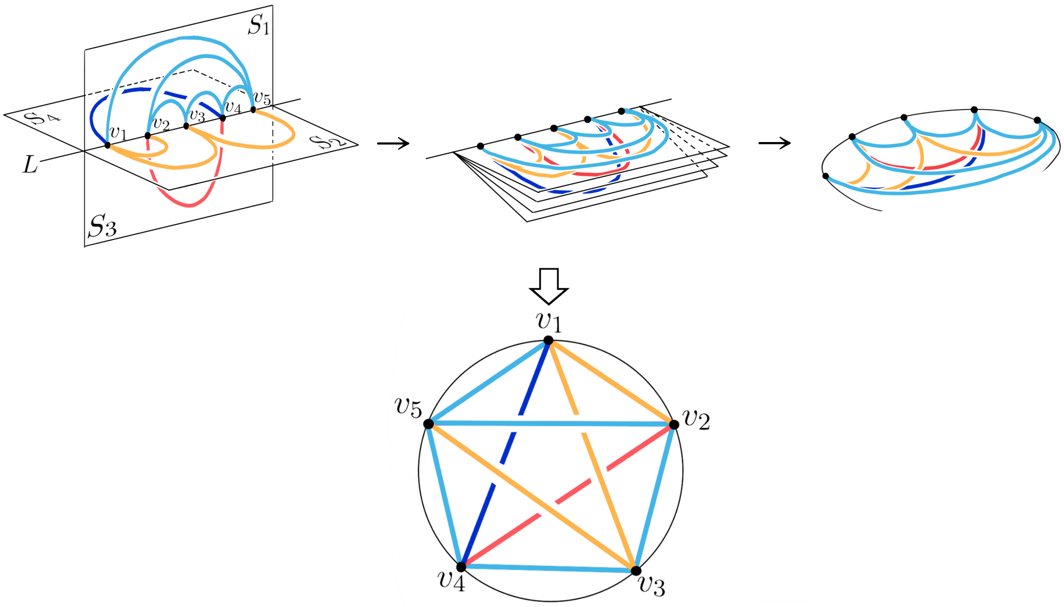


図 2　図 1 の book presentation の circular diagram への変形

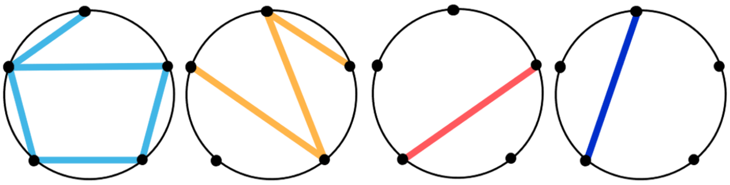


図 3　circular diagram を sheet ごとに分離して順に並べた図式

以下 circular diagram において, 頂点を時計回りに v_1, v_2, ... とし, sheet を上方から順に S_1, S_2, ... とする. また辺 e の端点が円周上で m 頂点分離れている時, e は m-**edge** であると言う.

定理 2.2 ([1]) 次の circular diagram の 6 つの変形は K_n の book presentation の同型を保つ. 但し頂点, sheet のラベルとは, それぞれ頂点 v_i, sheet S_j の添え字の部分 i, j のことである.

変形 1. 全ての頂点のラベルを mod n で等しく増やす.
変形 2. sheet の枚数を s とする. この時全ての sheet のラベルを mod s で等しく増やす.

変形 3. S_i, S_j を隣り合う sheet とする. S_i 内の辺 e が S_j 内の任意の辺と交差を持たない時, e を S_j に移す.

変形 4. 円周上で連続した 2 頂点 v_i, v_j について, v_i に接続する各辺が v_j に接続する任意の辺より上方にあるとする. この時 i, j 以外の各 k について 2 辺 v_iv_k, v_jv_k の位置を入れ替える.

変形 5. 辺を含まない sheet を追加又は削除する.

変形 6. sheet の枚数を s とする. この時各 sheet のラベルを i から $s-i+1$ に変える. 更に各頂点のラベルを j から $n-j+1$ に変える.

特に変形 6 は前半と後半で 1 回ずつ鏡像をとっている. 変形 6 の前半, 後半の操作をそれぞれ変形 6a, 6b とする. また 1-edge は他のどの辺とも交差を持たないため, 他の全ての辺を固定したまま変形 3 により任意の sheet に移動できる. 従って以下 1-edge は無視する.

グラフ G の **sheet-number** $S(G)$ を $S(G)$ =min$\{\, n \,|\, G$ の n-book presentation が存在する $\}$ と定める. この時 G の $S(G)$-book presentation を G の **minimal book presentation** と言う.

定理 2.3 ([3, 4]) $n \geq 4$ の時, $S(K_n) = \begin{cases} n/2 & (n\text{: 偶数}), \\ (n+1)/2 & (n\text{: 奇数}). \end{cases}$

3 Canonical book presentation

性質がよく知られた K_n の minimal book presentation がある.

定義 3.1 ([6]) $n \geq 4$ の時, n の偶奇それぞれで下図のような形の K_n の minimal book presentation を K_n の **right canonical book presentation** と言う. 但し $*$ の部分にはどのように辺が含まれていても良いとし, 空と書いた部分には辺が含まれていないとする.

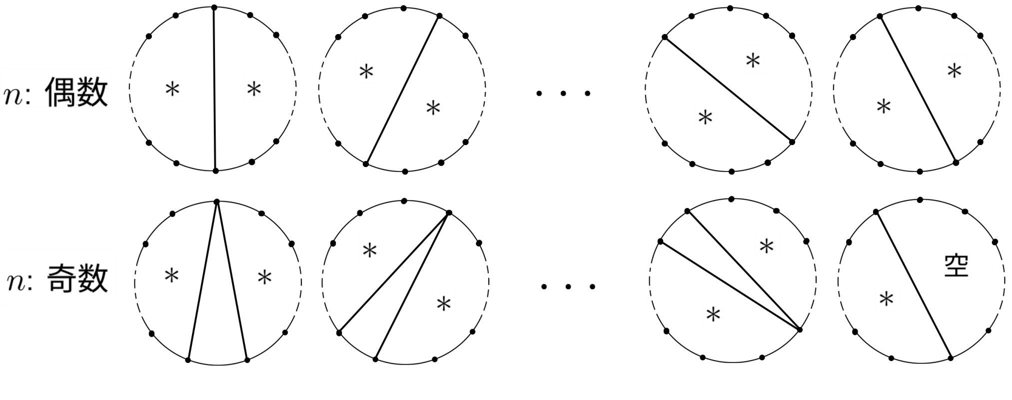


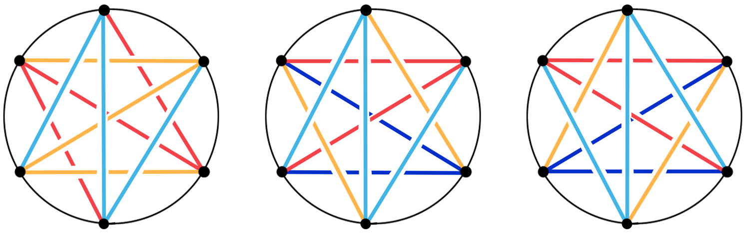
図 4 K_n の right canonical book presentation

定理 3.2 ([6]) K_n の right canonical book presentation は同型の差を除いて一意的に定まる.

定理 3.3 ([6]) $n \geq 5$ の時, K_n の right canonical book presentation に含まれる K_{n-1} の book presentation は全て K_{n-1} の right canonical book presentation と同型である.

4　主結果

K_6 の全ての book presentation の同型類が D. Rowland により分類されている ([1]). その一部を下図に示し, それぞれ $(6, A)$, $(6, B)$, $(6, \overline{B})$ と名前を付けた. $(6, A)$ は K_6 の right canonical book presentation であり, 自身の鏡像と同型である. K_6 の minimal book presentation は $(6, A)$ しかない. また $(6, B)$ は K_6 の 4-book presentation で, 自身の鏡像 $(6, \overline{B})$ と非同型である.



$(6, A)$　　$(6, B)$　　$(6, \overline{B})$

図 5　K_6 の book presentation の同型類の一部

この結果を用いて次の結果を得た.

主結果 4.1 $n = 7, 8$ の時, K_n の minimal book presentation の同型類を分類した. またそれらに含まれる K_{n-1} の book presentation のリストを与えた.

主結果 4.1 の過程を述べる. 以下 book presentation と言えばその circular diagram を考えているとする.

まず K_7 の場合を考える. 定理 2.3 より $S(K_7) = 4$ なので, K_7 の 4-book presentation を考えれば良い.

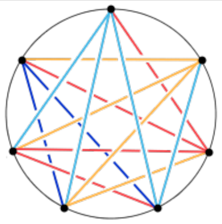
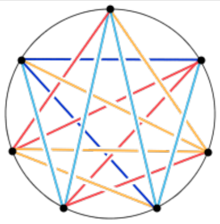
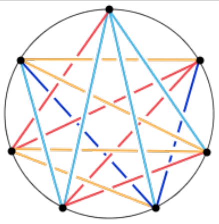
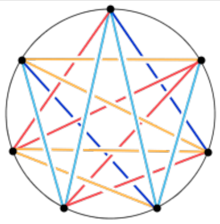
<u>*Step* 1.</u> 3-edge の埋め込み方を考える. K_7 の book presentation には 3-edge が 7 本ある. これらはどの 3 本を選んでも交差を持つので 1 枚の sheet に埋め込めるのは 2 本までである. 従って 3-edge の本数の分配は $(2, 2, 2, 1)$ となる. 変形 1, 2 により, $v_1v_4, v_1v_5 \subset S_1$ かつ S_4 は 3-edge を 1 本しか含まないとして良い. また v_2v_5, v_3v_6, v_4v_7 はどの 2 辺も交差を持つので, S_2, S_3, S_4 に分けて埋め込む必要がある. $v_3v_6 \subset S_4$ とすると, $v_2v_5, v_2v_6 \subset S_2$, $v_3v_7, v_4v_7 \subset S_3$ 又は $v_3v_7, v_4v_7 \subset S_2$, $v_2v_5, v_2v_6 \subset S_3$ の 2 通りが考えられるが, 変形 1, 2, 6 によりそれぞれ $v_2v_5 \subset S_4$, $v_4v_7 \subset S_4$ とした場合に帰着できる. 従って $v_2v_5 \subset S_4$ 又は $v_4v_7 \subset S_4$ として良い. 更に変形 1, 6b により, 鏡像の差を除けば $v_4v_7 \subset S_4$ として良い. よって $E_1 = v_1v_4 \cup v_1v_5$, $E_2 = v_2v_5 \cup v_2v_6$, $E_3 = v_3v_6 \cup v_3v_7$, $E_4 = v_4v_7$ とおくと 3-edge の埋め込み方は, $E_1 \subset S_1$, $E_4 \subset S_4$ として, $E_2 \subset S_2$, $E_3 \subset S_3$ 又は $E_3 \subset S_2$, $E_2 \subset S_3$ の 2 通りのみを考えれば良い.

<u>*Step* 2.</u> 2-edge の埋め込み方を考える. 下表で $\times$ が付いている部分は, その列の 2-edge とその行の 3-edge たちが交差を持つ, 即ち同じ sheet には埋め込めないことを表している. また 2-edge 同士が交差を持つのは表で隣り合っている時のみである (v_1v_3 と v_2v_7 も隣り合っているとみなす). これらを踏まえれば, v_4v_6 が E_3 と同じ sheet に埋め込まれるとすると v_3v_5 が E_2 と同じ sheet に埋め込まれることが決まる. 更にこの時, v_2v_4 が E_1 又は E_4 と同じ sheet に埋め込まれることも分かる. このように表の順に 2-edge の埋め込み方を決めていき, 全ての場合を挙げる. v_4v_6 が E_4 と同じ sheet に埋め込まれるとした場合は 表を先の逆順に辿って全ての場合を挙げていく. すると全部で 33 通りの 2-edge の埋め込み方が得られる. Step1 で得た 2 通りの 3-edge の埋め込み方と合わせて, 全部で 66 通りの book presentation が得られる.

	v_1v_3	v_2v_4	v_3v_5	v_4v_6	v_5v_7	v_1v_6	v_2v_7
E_1			×	×			×
E_2	×			×	×		
E_3		×			×	×	
E_4			×			×	

<u>*Step* 3.</u> Step2 で得た 66 通りの book presentation は, 変形 1, . . . , 6, 6a, 6b で移り合うものを除けば 4 通りになる.

<u>*Step* 4.</u> Step3 で得た 4 通りの book presentation を下表に図示し, それぞれ $(7, A)$, . . . , $(7, D)$ とした. またそれぞれに含まれる K_6 の book presentation も調べ表の下段に記した. ここで $(7, A)$ は K_7 の right canonical book presentation であるから, 定理 3.3 より $(6, A)$ を 7 個含むことが直ちに分かることに注意する. これら 4 個の book presentation およびその鏡像たちが互いに同型かどうかを見ていく. まず, 含まれる K_6 の book presentation の集合は同型に関する不変量であるから, $(7, A)$, . . . , $(7, D)$ は鏡像の差も込めて全て互いに非同型であることが分かる. 後はそれぞれが自身の鏡像と同型かどうか分かれば良いが, K_7 の任意の空間埋め込みは自身の鏡像と非同型であることが知られている ([2]). 従って $(7, A)$, . . . , $(7, D)$ はそれぞれ自身の鏡像と非同型である. よって K_7 の 4-book presentation の同型類は, $(7, A)$, . . . , $(7, D)$ およびそれぞれの鏡像 $(7, \overline{A})$, . . . , $(7, \overline{D})$ の 8 個である.

 $(7, A)$	 $(7, B)$	 $(7, C)$	 $(7, D)$
$(6, A) \times 7$	$(6, A) \times 6$ $(6, B) \times 1$	$(6, A) \times 5$ $(6, B) \times 2$	$(6, A) \times 4$ $(6, B) \times 2$ $(6, \overline{B}) \times 1$

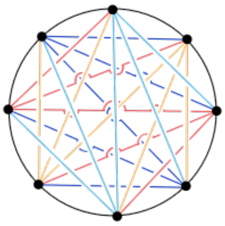
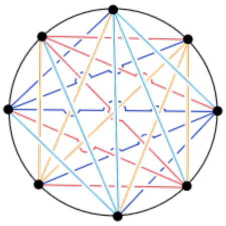
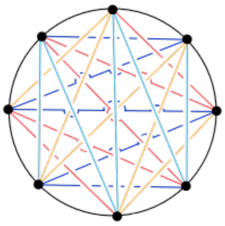
次に K_8 の場合を考える. 定理 2.3 より $S(K_8) = 4$ なので, K_8 の 4-book presentation を考えれば良い.

<u>*Step* 1.</u> 4 本の 4-edge v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8 はどの 2 本も交差を持つので各 sheet に 1 本ずつ含まれる. 変形 2 により S_1 が v_1v_5 を含むとして良い. この時, 次の 4 通りの場合それぞれで, 同じ sheet に含まれる辺の組み合わせが一意的に決まり, またこの 4 通り以外の辺の組み合わせ方は存在しない; $v_1v_3, v_1v_4 \subset S_1$, $v_1v_4, v_2v_4 \subset S_1$, $v_2v_5, v_2v_4 \subset S_1$, $v_2v_5, v_3v_5 \subset S_1$([6]). よって, この 4 つのパターンから 1 つ決め更に v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8 の埋め込み先を決めれば K_8 の 4-book presentation が一意的に定まる. そしてそれらのみを考えれば十分である. このようにして得られる book presentation は 24 通りある.

<u>*Step* 2.</u> Step1 で得た 24 通りの book presentation は, 変形 1, 2, 6a, 6b により移り合うものを除けば 3 通りになる.

<u>*Step* 3.</u> Step2 で得た 3 通りの book presentation を下表に図示し, それぞれ $(8, A)$, $(8, B)$, $(8, C)$ とした. またそれぞれに含まれる K_7 の book presentation も調べ表の下段に記した. ここで $(8, A)$ は K_8 の right

canonical book presentation であるから, 定理 3.3 より $(7, A)$ を 8 個含むことが直ちに分かることに注意する. これら 4 個の book presentation およびその鏡像たちが互いに同型かどうか見ていく. まず, 含まれる K_7 の book presentation の集合は同型に関する不変量であるから, $(8, A)$, $(8, B)$, $(8, C)$ は鏡像の差も込めて全て互いに非同型であり, $(8, A)$ は自身の鏡像と非同型であることが分かる. 後は $(8, B)$, $(8, C)$ が自身の鏡像と同型かどうか分かれば良いが, これらは変形 1, 6a により自身の鏡像と移り合う, 即ち自身の鏡像と同型である. よって K_8 の 4-book presentation の同型類は, $(8, A)$, $(8, B)$, $(8, C)$ および $(8, A)$ の鏡像 $(8, \overline{A})$ の 4 個である.

 $(8, A)$	 $(8, B)$	 $(8, C)$
$(7, A) \times 8$	$(7, A) \times 4$ $(7, \overline{A}) \times 4$	$(7, C) \times 2$ $(7, \overline{C}) \times 2$ $(7, D) \times 2$ $(7, \overline{D}) \times 2$

補足として, [5] では FIGURE 1 として K_8 の比較的単純な空間埋め込みの例が与えられている. この空間埋め込みを $\widetilde{K_8}$ とすると, $\widetilde{K_8}$ は実際 K_8 のある book presentation と同型であるが, それは 4-book presentation ではない, 即ち $(8, A)$, $(8, B)$, $(8, C)$ のいずれとも非同型である. このことは次のようにして確かめられる. まず, $\widetilde{K_8}$ に含まれる絡み目 $[147] \cup [25863]$ は $(2, 4)$ トーラス絡み目であるが, $(8, A)$, $(8, B)$ には長さが 3 と 5 のサイクルで実現される $(2, 4)$ トーラス絡み目は含まれない. よって $\widetilde{K_8}$ は $(8, A)$, $(8, B)$ と非同型である. また, $\widetilde{K_8}$ からラベル 8 の頂点を取り除いて得られる K_7 の空間埋め込みは $(7, A)$ と同型であるが, $(8, C)$ には $(7, A)$ と同型な K_7 の空間埋め込みは含まれない. よって $\widetilde{K_8}$ は $(8, C)$ と非同型である.

謝辞

今回の研究集会で講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に心よりお礼申し上げます. また, 講演後に質問および助言をくださった先生方にも深く感謝申し上げます. 研究の励みになりました. 本当にありがとうございました.

参考文献

[1] D. Rowland, *Classification of Book Representations of* K_6, J. Knot Theory Ramifications, **26**(**12**) (2017), 1–26.

[2] E. Flapan and N. Weaver, *Intrinsic chirality of complete graphs*, Proc. Am. Math. Soc, **115** (1992), 233–236.

[3] F. Bernhart and P. C. Kainen, *The book thickness of a graph*, J. Combin. Theory Ser, **B27** (1979), 320−331.

[4] K. Kobayashi, *Standard spatial graph*, Hokkaido Math, **J.21** (1992), 117−140.

[5] P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks and J. LaCombe, *Knotted Hamiltonian cycles in spatial embeddings of complete graphs*, New York J. Math, **13** (2007), 11−16.

[6] T. Otsuki, *Knots and links in certain spatial complete graphs*, J. Combin. Theory Ser, **B68** (1996), 23−35.