

有向絡み目の dual graph diagram

新井克典 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

dual graph diagram は, D. Needell 氏と S. Nelson 氏によって導入された有向絡み目の表示方法である. しかし, 与えられた dual graph diagram が有向絡み目図式を表さない場合がある. 本講演では連結な dual graph diagram が, 有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与える.

1 双対グラフとチェッカーボードグラフ

1.1 双対グラフ

本稿では, グラフは常に有限で多重辺やループを許すものとする.

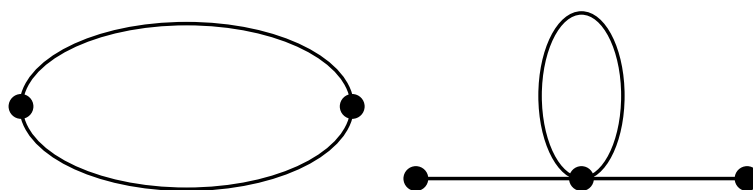


図 1: 多重辺 (左) とループ (右)

球面 S^2 に埋め込まれたグラフを単に S^2 上のグラフと呼ぶ. 球面 S^2 上のグラフ G を単に S^2 の部分集合とみたとき, $|G|$ で表す.

S^2 上のグラフ G_1, G_2 は, 向きを保つ自己同相写像 $h : S^2 \rightarrow S^2$ で $h(|G_1|) = |G_2|$ かつ $h|_{|G_1|} : |G_1| \rightarrow |G_2|$ がグラフの同型を誘導するようなものが存在するとき同値であるといい, $G_1 = G_2$ とかく.

S^2 上のグラフ G の領域とは, $S^2 - |G|$ の連結成分をいう. G の領域全体の集合を $\text{Region}(G)$ と表す.

定義 1.1.1 S^2 上のグラフ G の双対グラフ G^d とは, 次の方法で構成される S^2 上のグラフである:

1. G の各領域から 1 点を取り, G^d の頂点とする.
2. G の任意の辺 e に対して, e の両側にある G の領域に対応する G^d の頂点を e の端点以外と横断的に 1 点で交わるように結ぶ曲線を G^d の辺とする.

* e-mail: u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

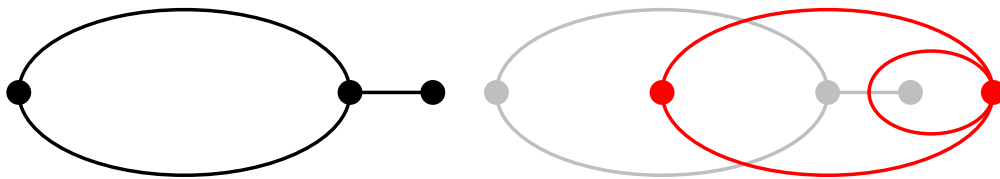
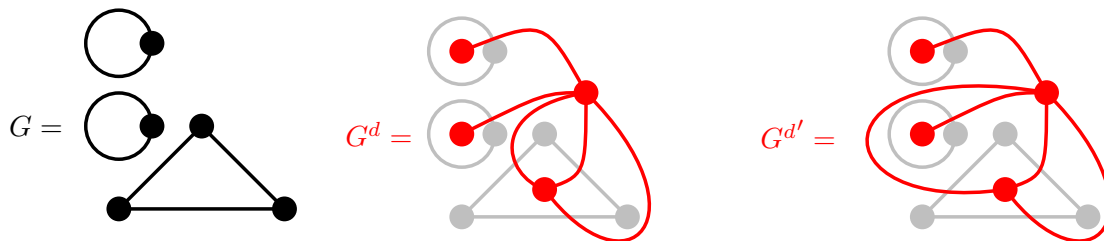


図 2: S^2 上のグラフ G (左) と G の双対グラフ G^d (右)

注意 1.1.2 双対グラフは一意的に定まるとは限らない. 次の例では G^d と $G^{d'}$ はどちらも G の双対グラフであるが, 同値ではない.



1.2 チェッカーボードグラフ

絡み目図式から交差の情報を除いたものを **link universe** と呼ぶことにする.

U を S^2 上の link universe とする. $S^2 - U$ の連結成分を U の領域と呼び, $\text{Region}(U)$ を U の領域全体の集合とする.

定義 1.2.1 S^2 上の link universe U のチェッカーボード彩色とは, 写像 $c : \text{Region}(U) \rightarrow \{\text{black}, \text{white}\}$ で, 隣接領域を異なる色で塗るものである.

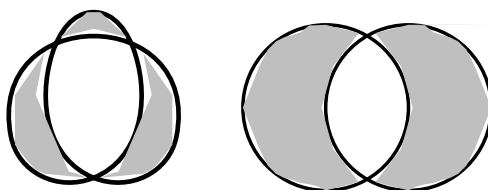


図 3: trefoil universe のチェッカーボード彩色 (左) と Hopf link universe のチェッカーボード彩色 (右)

S^2 上の任意の link universe はチェッカーボード彩色可能である.

定義 1.2.2 (U, c) をチェッカーボード彩色された S^2 上の link universe とする.

G_b (resp. G_w) が (U, c) のチェッカーボードグラフであるとは, G_b (resp. G_w) が次の方法により構成される S^2 上のグラフであることをいう:

1. 各黒色 (resp. 白色) 領域から 1 点を取り, G_b (resp. G_w) の頂点とする.
2. U の各交差において, 向かい合う黒色 (resp. 白色) 領域を結び, G_b (resp. G_w) の辺とする.

本稿では, $\{G_b, G_w\}$ を U のチェッカーボードグラフペアと呼ぶことにする.

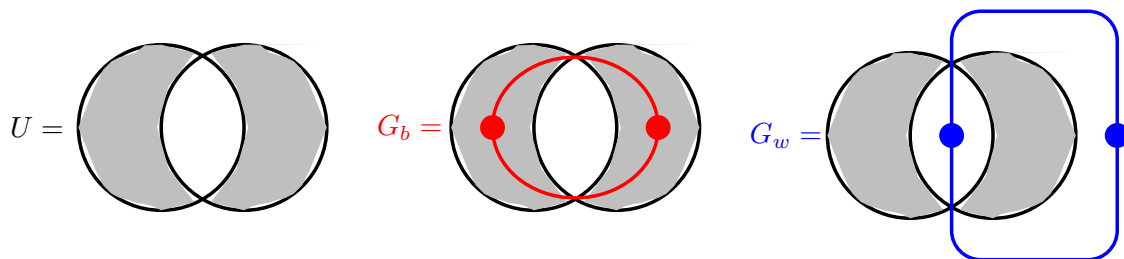
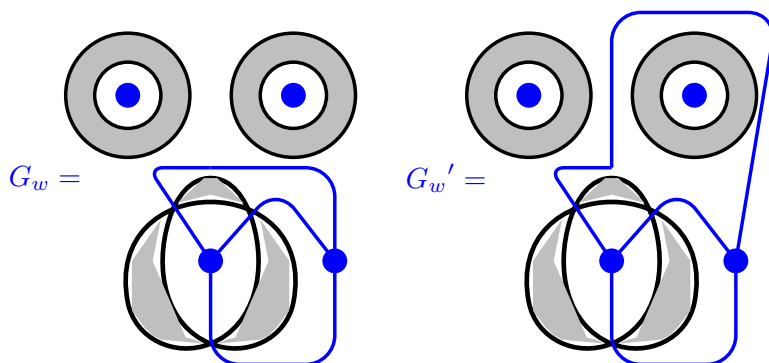


図 4: Hopf link universe のチェッカーボードグラフ

注意 1.2.3 一般にチェッカーボードグラフは一意的に定まるとは限らない. 次の例では, 白色領域に対応するチェッカーボードグラフ G_w と G_w' は同値ではない.



一般に G_b と G_w は互いに双対なグラフではない. チェッカーボードグラフが互いに双対なグラフになる十分条件として次が成り立つ.

命題 1.2.4 (U, c) をチェッカーボード彩色された link universe とし, $\{G_b, G_w\}$ をそのチェッカーボードグラフペアとする. このとき, U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つならば G_b と G_w は互いに双対なグラフになる.

この命題は既に知られている事実かもしれないが, これに関する文献が見つからなかった. 命題 1.2.5 と命題 1.2.7 も同様である.

次に S^2 上のグラフ G とその双対グラフ G^d の組 $\{G, G^d\}$ がある link universe のチェッカーボードグラフペアになるための十分条件を述べる. まずそのために必要な準備を行う.

G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. G の辺は G^d のただ 1 つの辺と 1 点で交わる. この点を辺交差と呼ぶことにする.

$G \cup G^d$ から得られるグラフとは, $G \cup G^d$ の辺交差も頂点とする S^2 上のグラフをいう.

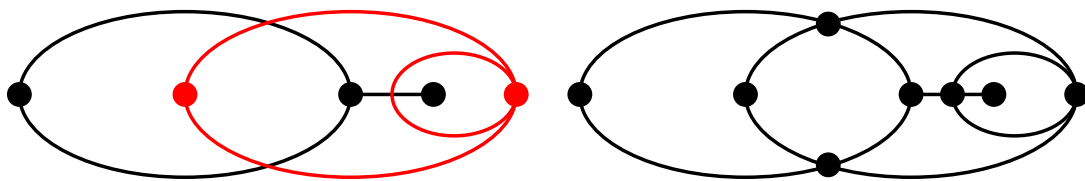


図 5: $G \cup G^d$ (左) と $G \cup G^d$ から得られるグラフ (右)

$G \cup G^d$ の領域を $G \cup G^d$ から得られるグラフの領域として定める.

$G \cup G^d$ の 4 辺形領域とは, 領域の周りに 4 つの辺があるような領域のことをいう. $G \cup G^d$ の 4 辺形領域は次の場合に限られる:

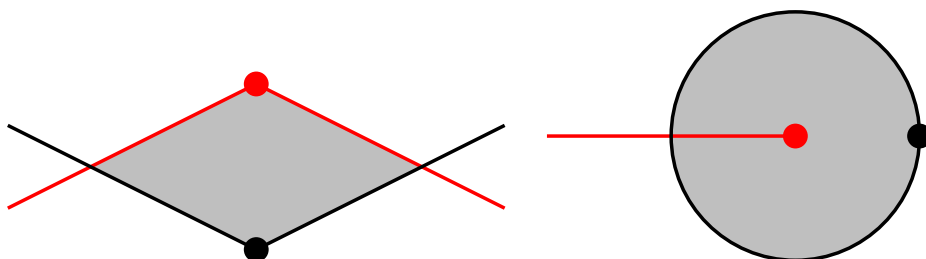


図 6: $G \cup G^d$ の 4 辺形領域

命題 1.2.5 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, G が連結で孤立頂点を持たないならば $G \cup G^d$ の各領域は 4 辺形領域である.

証明の概略 $G, G \cup G^d$ から得られるグラフ $\tilde{G}$ についてのオイラー公式と $\tilde{G}$ の定め方から $2|E(G)| - |\text{Region}(\tilde{G})| = 0$ が成り立つ.

$G \cup G^d$ の各領域は一般に $4n$ 辺形となる. $G \cup G^d$ の $4n$ 辺形の個数を R_n とおき, $N \in \mathbb{N}$ を $R_N \neq 0$, $k > N$ ならば $R_k = 0$ を満たす正整数とする. このとき, $|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n R_n$, $|\text{Region}(\tilde{G})| = \sum_{n=1}^N R_n$ が成り立つ. よって, $\sum_{n=1}^N (n-1) R_n = 0$ となる. この式から, $N = 1$ でなければならない. 従って $G \cup G^d$ の各領域は 4 辺形領域である. $\square$

注意 1.2.6 命題 1.2.5 は逆も成り立つ. すなわち, S^2 上のグラフ G とその双対グラフ G^d に対して, $G \cup G^d$ の各領域が 4 辺形領域ならば G は連結で孤立頂点を持たない.

命題 1.2.7 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, G が連結で孤立頂点を持たないならばある link universe U がただ 1 つ存在して, $\{G, G^d\}$ は U のチェッカーボードグラフペアになる.

2 Dual graph diagram

2.1 Dual graph diagram

定義 2.1.1 (Needell-Nelson [1]). D を S^2 上の有向絡み目図式, $\{G_b, G_w\}$ を D のチェッカーボードグラフペア, そして $\mathcal{O}(E(G_b)), \mathcal{O}(E(G_w))$ を G_b, G_w の辺の向きの集合とする. $(G_b \cup G_w, f)$ が D の **dual graph diagram** であるとは, G_b と G_w の和 $G_b \cup G_w$ と次を満たす写像 $f : E(G_b) \cup E(G_w) \rightarrow \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G_b)) \cup \mathcal{O}(E(G_w))$ の組をいう:

f は D の各交差において



を満たす. すなわち, D の正の交差に対しては平滑化したときにその交差の近傍で連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に, 上方弧を左手に見ながら進みその交差を通ると上方弧が右手に見えるような向きを与える. また平滑化したときにその交差の近傍で非連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に $+$ の符号を与える.

D の負の交差に対しては平滑化したときにその交差の近傍で連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に, 上方弧を右手に見ながら進みその交差を通ると上方弧が左手に見えるような向きを与える. また平滑化したときにその交差の近傍で非連結になるような領域に対応した頂点間を結ぶ辺に $-$ の符号を与える.

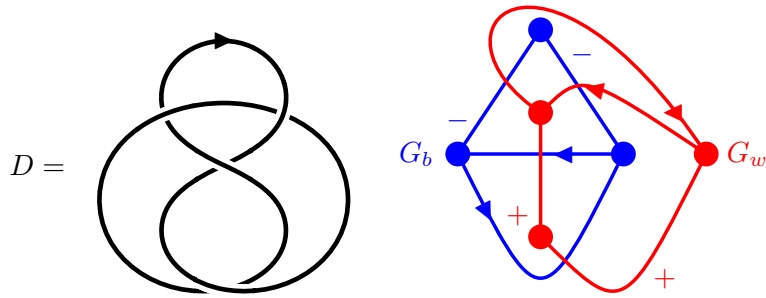


図 7: 八の字結び目の図式 D の dual graph diagram $(G_b \cup G_w, f)$

注意 2.1.2 有向絡み目図式の dual graph diagram は, 有向絡み目図式のみからは定まらない. 実際, チェッカーボードグラフが一意的に定まらないような有向絡み目図式からは, 複数通りの dual graph diagram を考えることができる.

2.2 (一般化された) connected dual graph diagram

定義 2.2.1 G を S^2 上の連結かつ孤立頂点を持たないグラフとし, G^d をその双対グラフとする. $(G \cup G^d, f)$ が (一般化された) **connected dual graph diagram** であるとは, G と G^d の和 $G \cup G^d$ と次を満たす写像 $f: E(G) \cup E(G^d) \rightarrow \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G)) \cup \mathcal{O}(E(G^d))$ の組をいう:

$$e \in E(G), e' \in E(G^d), e \cap e' \neq \emptyset \Rightarrow (f(e), f(e')) \in \{\pm\} \times \mathcal{O}(E(G^d)) \cup \mathcal{O}(E(G)) \times \{\pm\}$$

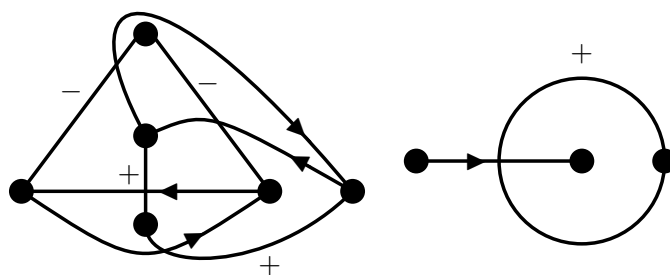


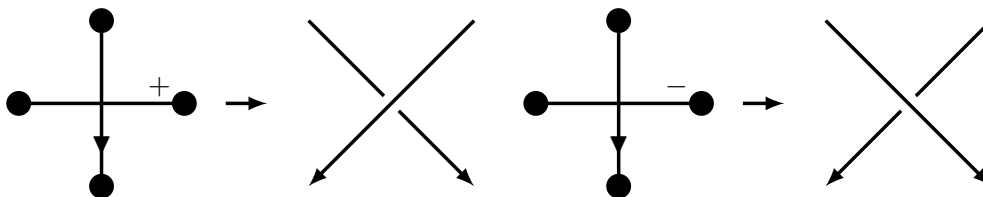
図 8: (一般化された) connected dual graph diagram の例

(一般化された) connected dual graph diagram から **node** 付き有向絡み目図式を対応させる方法を述べる. 但し, node 付き有向絡み目図式とは次の 2 価頂点を許した有向絡み目図式をいう:

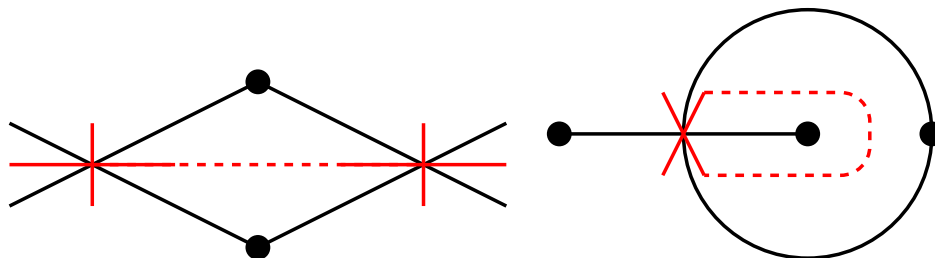


命題 2.2.2 (cf. Needell-Nelson [1]). (一般化された) connected dual graph diagram $(G \cup G^d, f)$ は次の方法により, node 付き有向絡み目図式を表す.

(Step1) $(G \cup G^d, f)$ の各辺交差ごとに, 局所的に交差を対応させる.



(Step2) 各領域内にある交差の端点を結ぶ.



G が連結かつ孤立頂点を持たないことから、命題 1.2.5 より $G \cup G^d$ の各領域は 4 辺形領域となる。よって Step2 が実行できる。[1] ではこのような G の仮定が与えられておらず、4 辺形領域になるケースとして考察されている。

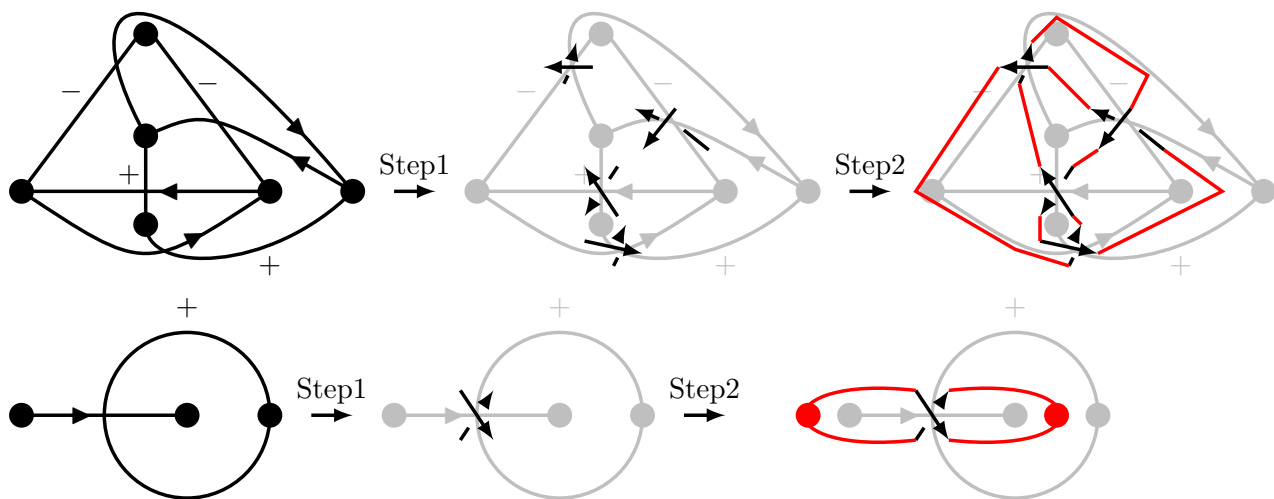


図 9: 命題 2.2.2 の例

3 主結果

3.1 主結果

定理 3.1.1 (一般化された) connected dual graph diagram $(G \cup G^d, f)$ が命題 2.2.2 の対応で有向絡み目図式を表すための必要十分条件は、各 4 辺形領域において、境界に現れる G の頂点と G^d の頂点の入次数の和がそれらの出次数の和に等しくなることである。

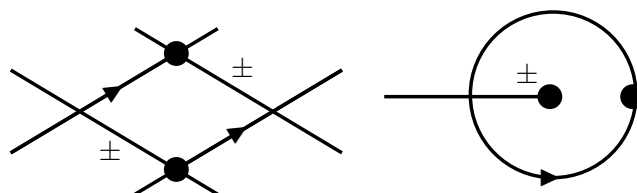


図 10: G の頂点と G^d の頂点の入次数の和とそれらの出次数の和が等しくなる例

定理 3.1.1 から次の結果が得られる。

定理 3.1.2 次の 2 つの集合 A, B は命題 2.2.2 の対応から定まる写像 $\varphi: A \rightarrow B$ によって 1 対 1 に対応する。

A 定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram 全体の集合

B 連結で交差を 1 つ以上持つ有向絡み目図式全体の集合

3.2 定理 3.1.2 の証明の概略

補題 3.2.1 定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram $(G \cup G^d, f)$ が表す有向絡み目図式 D はただ 1 つ存在する. また D は連結で交差を 1 つ以上持つ.

証明の概略 命題 1.2.7 より, D はただ 1 つ存在することが言える.

また, $|E(G)| \geq 1$ から $c(D) \geq 1$ が成り立つ.

D が連結でないと仮定して矛盾を導く. D は連結でないのである単純閉曲線 c が存在して分離される. 命題 1.2.7 から D のチェッカーボードグラフペアは $\{G, G^d\}$ であるので G の連結性からある $u, v \in V(G)$ が存在して $\{u, v\} \in E(G)$ が c と交わる. チェッカーボードグラフが c と交わっている所以, D も c と交わる. これは D が c で分離されることに矛盾する. 以上より D は連結である. $\square$

補題 3.2.2 連結で交差を 1 つ以上持つ任意の有向絡み目図式 D に対し, 定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram で D を表すものが存在する.

証明の概略 D の dual graph diagram を $(G_b \cup G_w, f)$ とおく.

$c(D) \geq 1$ から $|E(G_b)| \geq 1$ かつ $|E(G_w)| \geq 1$ が成り立つ.

また, 命題 1.2.4 から G_b と G_w は互いに双対なグラフである. 双対グラフは常に連結なので $(G_b \cup G_w, f)$ は定理 3.1.1 の条件を満たす (一般化された) connected dual graph diagram である. 命題 2.2.2 の対応により, $(G_b \cup G_w, f)$ は D を表す. $\square$

定理 3.1.2 の証明 補題 3.2.1 より, 写像 $\varphi: A \rightarrow B$ が定まり単射である. また, 補題 3.2.2 から全射性も成り立つ.

よって $\varphi: A \rightarrow B$ は全単射なので集合 A, B は 1 対 1 に対応する. $\square$

謝辞

今回の研究集会で講演の機会を与えて下さった世話人である谷山公規先生, 安原晃先生, 村尾智先生, 丹下稜斗先生, 木村直記先生にお礼申し上げます. また講演後に質問, 助言して下さった先生方にもお礼申し上げます.

参考文献

- [1] D. Needell, S. Nelson, *Biquasiles and dual graph diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2017), no. 8, 1750048.