四角形の切り貼りとその合同類

東北大学 大学院情報科学研究科 村上研究室　佐藤 史弥

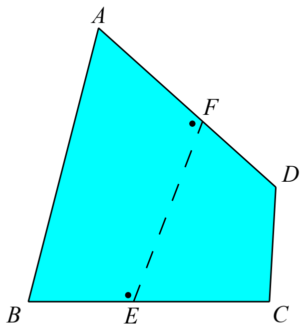
2022 年 1 月 31 日

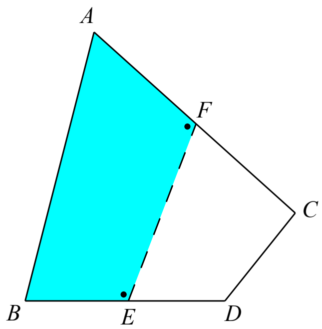
1　準備

1.1　切り貼りの定義と性質

はじめに, 四角形の切り貼りを定義する. なお, この報告書において「四角形」は凸四角形のことを指し, 4 つの角は全て π 未満であるとする.

定義 1.1. 四角形 $ABCD$ において辺 BC 上の点 E と辺 AD 上の点 F(ただし, 頂点は除く) を $\angle BEF = \angle AFE$ となるように取ることが出来るとき, 線分 EF で四角形 $ABCD$ を 2 つに分割し, 片方を裏返して貼りなおすことで新たな四角形 $ABDC$ が得られる. これを四角形の (線分 EF による) **切り貼り**という. また, 切り貼りに使った線分 EF を (辺 AD と辺 BC に対する) **切り取り線**という. 同様にして辺 AB と辺 CD に対する切り取り線とその切り取り線による切り貼りも定義する.





辺 AD と辺 BC に対する切り取り線の取り方を変えても四角形 $ABDC$ の形は変わらず表と裏の面積比が変わるだけである. よって四角形 $ABCD$ に切り貼りを施して得られるのは四角形 $ABDC$ と四角形 $ACBD$ の高々 2 つである.

切り取り線 EF における切り貼りにおいて

$$\angle BEF = \angle AFE = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

である. よって, 4 つの角の大きさが決まると四角形に対する切り取り線の角度も決まるが, 図 1.1(a) のように辺 BC 上のどの点から切り取り線を引いても辺 AD と交わらないときは切り貼りが出来ない. 図 1.1(b) は対角線 BD によって切り貼りが出来てしまうが, 図 1.1(c) のように辺 AD と辺 BC が平行であるときに対角線 BD(あるいは AC) によって切り貼りを施すと四角形から三角形に移ってしまう.

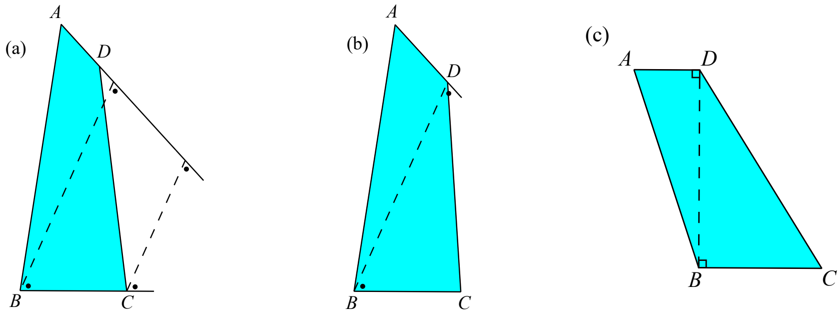


図 1.1

これらの四角形を除くために, 次の前提 1 を満たす四角形に限定して考えるものとする.

前提 1. 以下で扱う四角形は 2 組の向かい合う辺のそれぞれに対して**切り取り線を取ることが出来る**四角形とする. さらに, 切り貼り後もこの条件を満たすとする.

前提 1 の後半部分について補足をする. 図 1.2 の四角形 $ABCD$ は辺 AD と辺 BC が平行な等脚台形であり, 頂点 C と頂点 D を入れ替える切り貼りで平行四辺形 $ABDC$ が得られるが, 平行四辺形 $ABDC$ は辺 DC から下ろす垂線が辺 AB とは交わらないため前提 1 の条件を満たしていない. 前提 1 の後半部分では, このような四角形 $ABCD$ も除くものとしている. なお, これらの切り貼りが出来ない四角形は極端に縦あるいは横に長い四角形が該当するが, 詳細な条件については分かっていない.

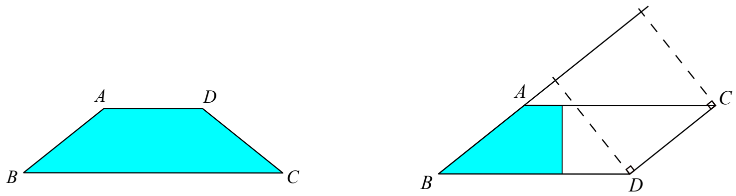


図 1.2

切り取り線 EF における切り貼りにおいて, $\angle C = \angle D$ のときは $\angle C = \angle D = \angle BEF = \angle AFE$ となり, 四角形 $FECD$ は等脚台形である. よって次の補題と系を得る.

補題 1.2. $\angle C$ と $\angle D$ の大きさが等しい四角形 $ABCD$ において, 線分 EF による切り貼りを施して得られる四角形 $ABDC$ は四角形 $ABCD$ と合同である.

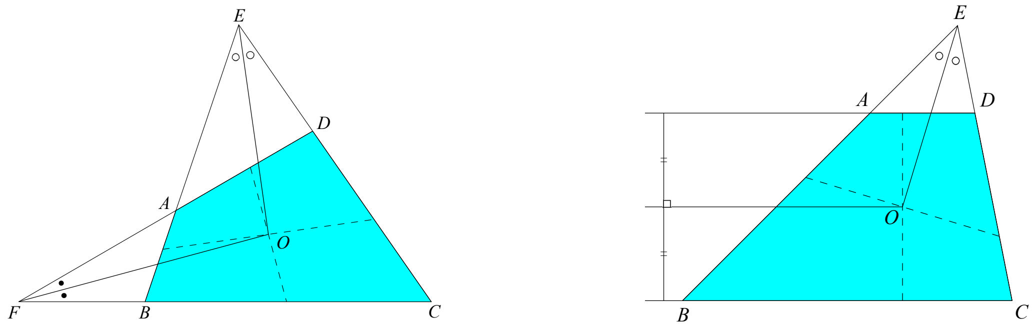
系 1.3. 3 つの角の大きさが等しい四角形に切り貼りを何回施しても得られる四角形は変わらない.

1.2 基準点

切り取り線は条件を満たせばどこに取っても良いが, 全ての切り取り線を 1 点で交わるように取れば切り貼りを分類しやすくなる. そこで, 次の基準点を定義する.

定義 1.4. どの対辺の組も平行でない四角形 $ABCD$ に対し, 直線 AB と直線 CD の交点を E, 直線 AD と直線 BC の交点を F とする. このとき, $\angle E$ の二等分線と $\angle F$ の二等分線の交点 O を（切り貼りの）**基準点**という. AB と CD が平行であるときは, それぞれの直線上の点を両端に持つ垂線を引き, その垂線の垂直二等

分線を $\angle E$ の二等分線の代わりに用いる．AD と BC が平行であるときも同様である．



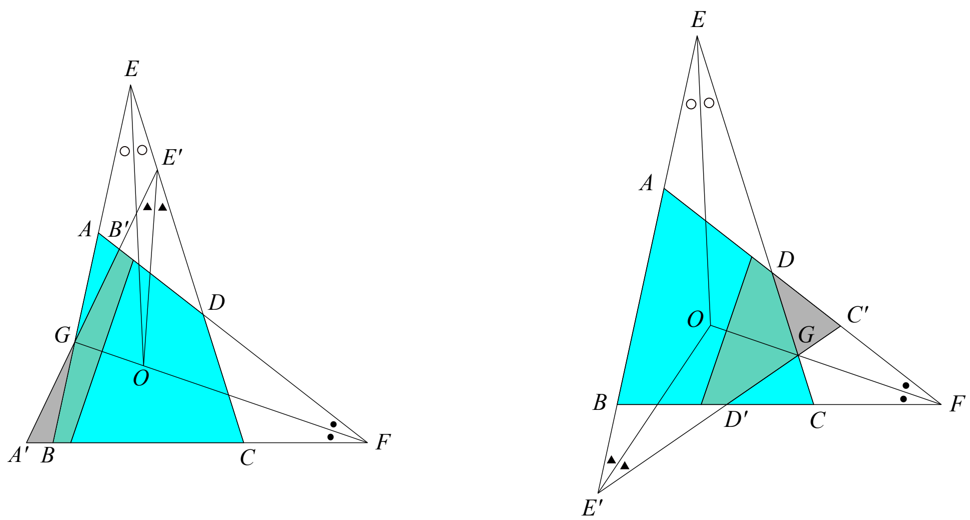
命題 1.5. 四角形に切り貼りを施し，新たな四角形を得たとする．このとき，切り貼りで裏返さなかった方の図形が一致するように 2 つの四角形を重ねると，それぞれの基準点も同じ位置で重なる．

証明. (1) 四角形が台形でないとき．

四角形 $ABCD$ から四角形 $ABDC$ を得る切り貼りについて証明する．直線 AB と直線 CD の交点を E，直線 AD と直線 BC の交点を F とし，$\angle E$ の二等分線と $\angle F$ の二等分線の交点を O とする．また、命題の条件に合うように四角形 $ABDC$ を四角形 $ABCD$ の上に重ねる．ただし，四角形 $ABDC$ は頂点 A と頂点 B を入れ替える切り貼りの場合と頂点 C と頂点 D を入れ替える切り貼りの場合のそれぞれで重ね方が異なる．

- ◎ 頂点 A と頂点 B を入れ替える切り貼りをした場合，四角形 $ABDC$ の点 A，点 B をそれぞれ点 A'，点 B' と名前を付け直し，直線 CD と直線 $A'B'$ の交点を点 E' とする．線分 AB と線分 $A'B'$ の交点を G とすると，線分 FO は AB と $A'B'$ の線対称の軸となっており，FO も点 G を通る．
- ◎ 頂点 C と頂点 D を入れ替える切り貼りをした場合は四角形 $ABDC$ の点 C，点 D をそれぞれ点 C'，点 D' と名前を付け直し，直線 AB と直線 $C'D'$ の交点を点 E' とする．線分 CD と線分 $C'D'$ の交点を G とすると，線分 FO は CD と $C'D'$ の線対称の軸となっており，こちらも FO は点 G を通る．

2 種類の重ね方のうちどちらかは点 E と点 E' が直線 FG の同じ側にあり，もう片方は反対側にある．同じ側にあるときは点 O は三角形 EGE' の傍心となり，反対側にあるときは三角形 EGE' の内心である．したがって，$\angle A'E'C$ の二等分線 (または $\angle AE'C'$ の二等分線) も点 O を通る．四角形 $ABCD$ から四角形 $ACBD$ を得る切り貼りも同様である．



(2) 四角形が台形であるときも同様に出来るので割愛する.

□

図 1.4 の四角形 $ABCD$ は切り貼りは出来るが, 基準点での切り貼りは出来ない四角形である. 実際, 図 1.4(b) のように頂点 C と D を入れ替える切り貼りの切り取り線が基準点 O を通るように取ると, 線分 AD とは交わらない. しかし, その切り取り線を少し左に動かせば辺 AD と辺 BC それぞれの内分点を通るため, この四角形 $ABCD$ は 1.1 節の前提 1 は満たしていることが分かる.

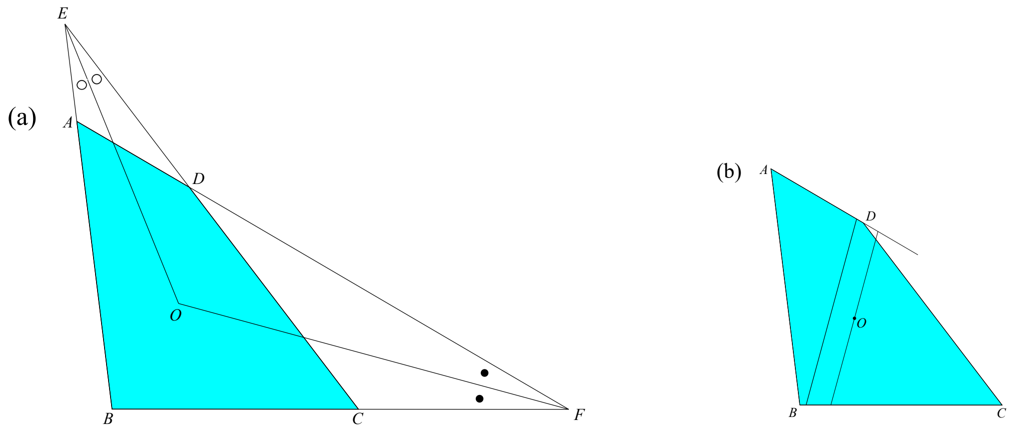


図 1.4

前提 1 を満たせば切り貼り自体は可能であるが, 複数回の切り貼りを円滑に行うため, 以下では次の前提 2 を満たす四角形に限定して考えるものとする.

前提 2. 以下で扱う四角形は 2 組の向かい合う辺のそれぞれに対して基準点を通る切り取り線を取ることが出来る四角形とする. さらに, 前提 1 と同じように, 切り貼り後もこの条件を満たすとする.

前提 2 についても基準点での切り貼りが出来ない四角形の詳細な条件については分かっていない.

2　切り貼りの分類

この章では 1.2 節で定義した基準点での切り貼りを分類する. 四角形に切り貼りを繰り返し施すと $ABCD$, $ABDC$, $ADBC$, $ADCB$, $ACDB$, $ACBD$, $ABCD^{(2)}$... の順に移り合う. よって, 前提 2 を満たす四角形であれば複数回の切り貼りによって角の並べ替えを全て網羅することが出来るので, それぞれの合同類の代表元は

$$\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D$$

を満たす四角形 $ABCD$ とすることが出来る. また, 切り取り線の角度の候補となるのは $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ のうち 2 つの和の平均であるため 6 通りである. 四角形の分け方に違いが生じうるのはこの 6 通りの大小関係が変わるときであるが, $\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D$ とすれば

$$\angle A + \angle B \leq \angle A + \angle C \leq \pi \leq \angle B + \angle D \leq \angle C + \angle D$$

$$\angle A + \angle C \leq \angle A + \angle D \leq \angle B + \angle D, \quad \angle A + \angle C \leq \angle B + \angle C \leq \angle B + \angle D$$

が得られる. 以上から

◎ $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ の中に等しいものがあるときと無いとき
◎ $\angle A+\angle D$ と $\angle B+\angle C$ の大小関係が変わるとき

に四角形の分け方が変わる. 実際に四角形を分類すると次の 12 パターンに分かれる.

◎ $\angle A<\angle B<\angle C<\angle D$ のとき
- $\angle A+\angle D>\angle B+\angle C$ となる四角形 ... パターン 1-(i)
- $\angle A+\angle D<\angle B+\angle C$ となる四角形 ... パターン 1-(ii)
- $\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$ となる四角形 ... パターン 1-(iii) (台形)

◎ $\angle A=\angle B<\angle C<\angle D$ となる四角形 ... パターン 2
◎ $\angle A<\angle B=\angle C<\angle D$ のとき
- $\angle A+\angle D>\angle B+\angle C$ となる四角形 ... パターン 3-(i)
- $\angle A+\angle D<\angle B+\angle C$ となる四角形 ... パターン 3-(ii)
- $\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$ となる四角形 ... パターン 3-(iii) (直角を持つ台形)

◎ $\angle A<\angle B<\angle C=\angle D$ となる四角形 ... パターン 4
◎ $\angle A=\angle B<\angle C=\angle D$ となる四角形 ... パターン 5 (等脚台形)
◎ $\angle A=\angle B=\angle C<\angle D$ となる四角形 ... パターン 6
◎ $\angle A<\angle B=\angle C=\angle D$ となる四角形 ... パターン 7
◎ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$ となる四角形 ... パターン 8 (長方形)

この報告書ではパターン 1-(i) と 1-(ii) のみ説明する.

2.1 パターン 1-(i)

まずは, パターン 1-(i) の四角形の分け方 (図 2.1 左図) について詳しく説明する.

$\angle A<\angle B<\angle C<\angle D$ かつ $\angle A+\angle D>\angle B+\angle C$ を満たす四角形 $ABCD$ に対し, 基準点 O を通る線分 EF を引く. ただし, 点 E, F はそれぞれ辺 BC, AD の内分点であり,

$$\angle OEC=\angle OFD=\frac{\angle A+\angle B}{2}=\blacktriangle$$

を満たすとする. さらに, 辺 BC 上に点 G, H, I, J, 辺 AD 上に点 K, L を

$$\angle OGC=\angle OJB=\angle OKD=\frac{\angle A+\angle C}{2}=\circ,\quad \angle OHC=\angle OIB=\angle OLD=\frac{\angle B+\angle C}{2}=\bullet$$

を満たすようにとる. このとき, $\angle A<\angle B<\angle C<\angle D$ の条件から $\blacktriangle<\circ<\bullet$ となるため, 辺 BC 上の点は B, E, G, H, I, J, C の順に, 辺 AD 上の点は A, F, K, L, D の順に並ぶ.

次に, 基準点 O を通る線分 MN を引く. ただし, 点 M, N はそれぞれ辺 AB, CD の内分点であり,

$$\angle OMA=\angle OND=\frac{\angle B+\angle C}{2}=\bullet$$

を満たすとする. さらに, 辺 AB 上に点 P, Q, R, S, T, 辺 CD 上に点 U を

$$\angle OPB=\angle OTA=\frac{\angle A+\angle B}{2}=\blacktriangle,\quad \angle OQB=\angle OSA=\angle OUD=\frac{\angle A+\angle C}{2}=\circ,$$

$$\angle ORB=\frac{\angle B+\angle C}{2}=\bullet$$

を満たすようにとる．このとき，$\angle A < \angle B < \angle C < \angle D$ の条件から辺 AB 上の点は A, P, Q, R, M, S, T, B の順に，辺 CD 上の点は C, U, N, D の順に並ぶ．

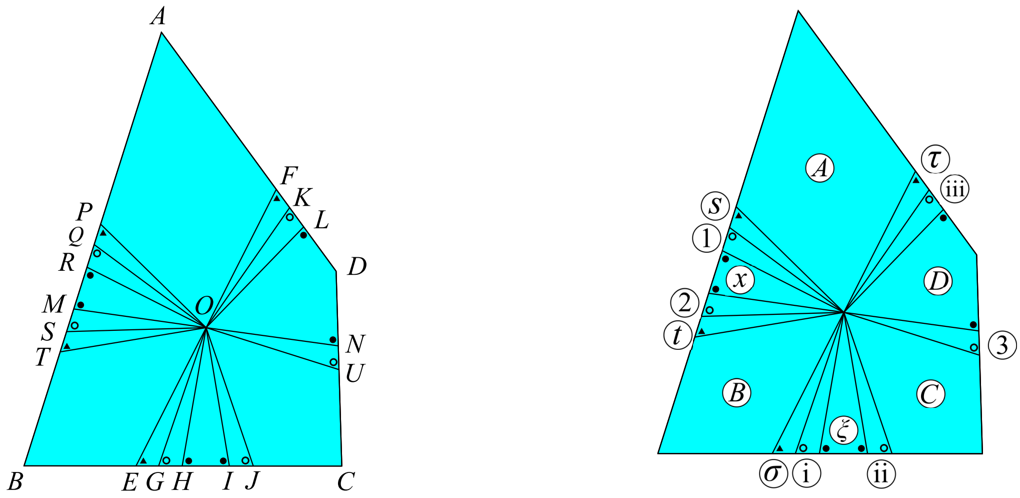


図 2.1 四角形 $ABCD$

ここからはパターン 1-(i) の四角形に切り貼りを施す．点 O は基準点であるため $OE = OF$, $OM = ON$ となり，四角形の分け方から

$$OG = OJ = OK, \quad OH = OI = OL, \quad OP = OT, \quad OQ = OS = OU, \quad OR = OM = ON$$

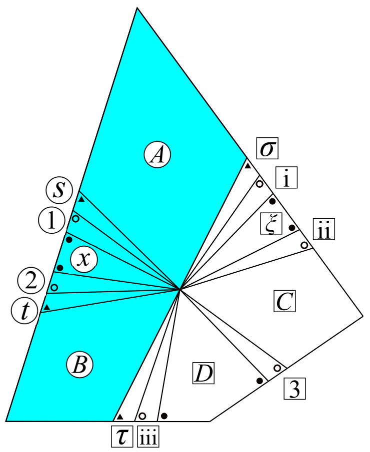
も得られる．よって図 2.1 の右図のように三角形や四角形に名前を付けると次のことが分かる．

- ◎ 三角形 s と三角形 t は合同
- ◎ 三角形 σ と三角形 τ は合同
- ◎ 三角形 1 と三角形 2 と三角形 3 は合同
- ◎ 三角形 i と三角形 ii と三角形 iii は合同
- ◎ 三角形 s と三角形 σ は相似
- ◎ 三角形 1 と三角形 i は相似
- ◎ 三角形 x と三角形 ξ は相似な二等辺三角形

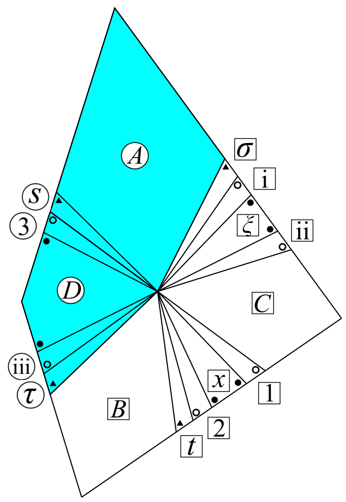
ここからは切り貼りを行う．1 回目の切り貼りは線分 EF を切り取り線として頂点 C と D を入れ替える切り貼りを行う．このとき，四角形 $ABDC$ が得られる．

四角形 $ABDC$ では $2\circ + \angle B + \angle D = 2\pi$ となるため，1, x, 2, t, B, τ, iii, D, 3 を合わせた図形が四角形になる．s と 1, C と 3 を分ける線分で切り貼りを施し，四角形 $ADBC$ が得られる．

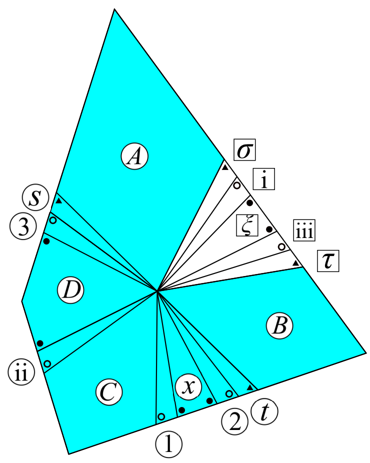
四角形 $ADBC$ は $2\bullet + \angle A + \angle D = 2\pi$ となり，iii, τ, B, t, 2, x, 1, C, ii を合わせた図形が四角形になる．D と iii, ξ と ii を分ける線分で切り貼りを施し，四角形 $ADCB$ が得られる．



(1) 四角形 $ABDC$



(2) 四角形 $ADBC$

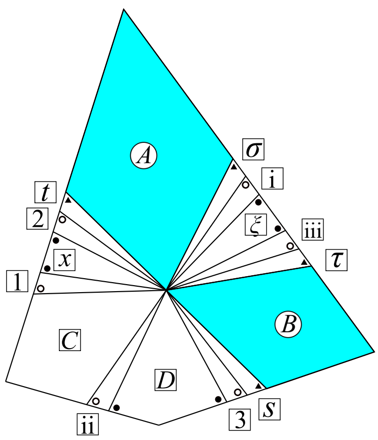


(3) 四角形 $ADCB$

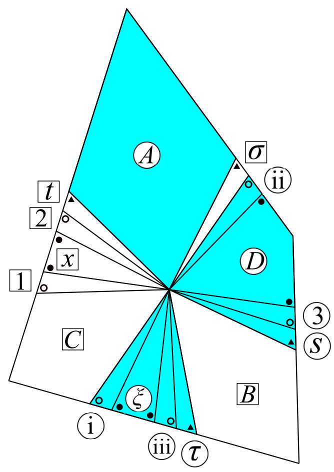
四角形 $ADCB$ は, s, 3, D, ii, C, 1, x, 2, t を合わせた図形が四角形となり, A と s, B と t を分ける線分で切り貼りを施すことで, 四角形 $ACDB$ が得られる.

四角形 $ACDB$ では ii, D, 3, s, B, τ, iii, ξ, i を合わせた図形が四角形となり, C と ii, σ と i を分ける線分で切り貼りを施すと, 四角形 $ACBD$ が得られる.

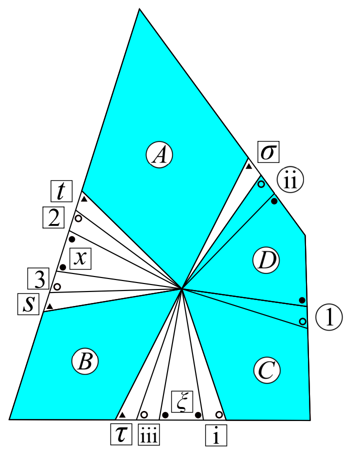
四角形 $ACBD$ は, 1, C, i, ξ, iii, τ, B, s, 3 を合わせた図形が四角形となり, x と 1, D と 3 を分ける線分で切り貼りを施すことで, 四角形 $ABCD^{(2)}$ が得られる.



(4) 四角形 $ACDB$



(5) 四角形 $ACBD$



(6) 四角形 $ABCD^{(2)}$

次の切り貼りは 1 回目の切り貼りと同じものであるので, 裏表の区別をしなければ 6 種類の四角形が図 2.2 のように循環する.

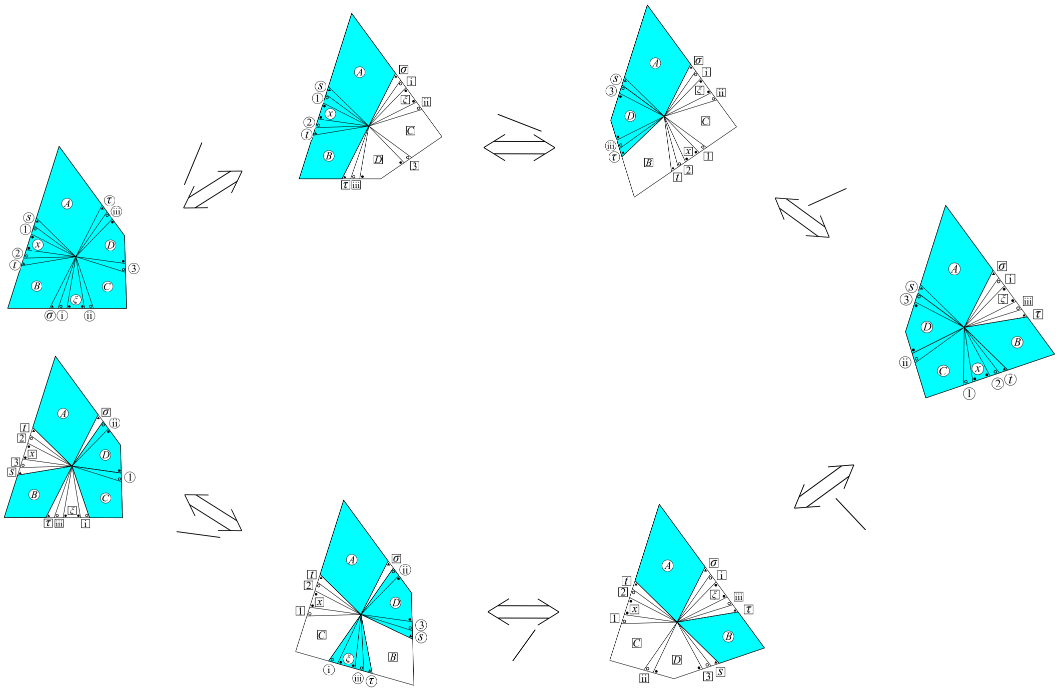
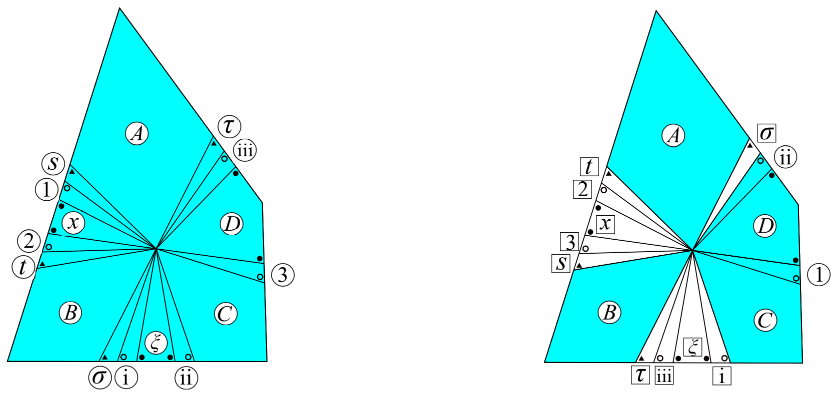


図 2.2

四角形 $ABCD$ と四角形 $ABCD^{(2)}$ を比較すると,

◎ s と t が裏返りながら入れ替わっている.
◎ σ と τ が裏返りながら入れ替わっている.
◎ 1 は 3, 2 は 1, 3 は 2 の位置に移動し, 2 と 3 が裏返っている.
◎ i は ii, ii は iii, iii は i の位置に移動し, i と iii が裏返っている.
◎ x と ξ は場所は変わっていないが, 裏返っている.

よって, s や t, σ や τ は合計 2 周 (12 回), 1, 2, 3 と i, ii, iii, iii は合計 3 周 (18 回), x と ξ は合計 2 周 (12 回) の切り貼りで元の位置に戻り, 表にも戻る. すなわち, 裏表の区別をすると四角形 $ABCD$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数である 6 周 (36 回) の切り貼りで初めて全ての面が表に戻る.



四角形 $ABCD$　　　四角形 $ABCD^{(2)}$

2.2　パターン 1-(ii)

パターン 1-(ii) は $\angle A + \angle D < \angle B + \angle C$ となる四角形に切り貼りを施す．分け方をパターン 1-(i) と比べると，三角形 s, t, σ, τ や 1, 2, 3, i, ii, iii の関係性はパターン 1-(i) と同様であるが，y と η がパターン 1-(i) には無かった二等辺三角形である．このとき，三角形 y は三角形 x と合同，三角形 η は三角形 ξ と合同であり，三角形 x と三角形 ξ は相似である．パターン 1-(ii) も切り貼りを繰り返し施すと，裏表の区別をしなければ 6 種類の四角形が図 2.3 のように循環する．

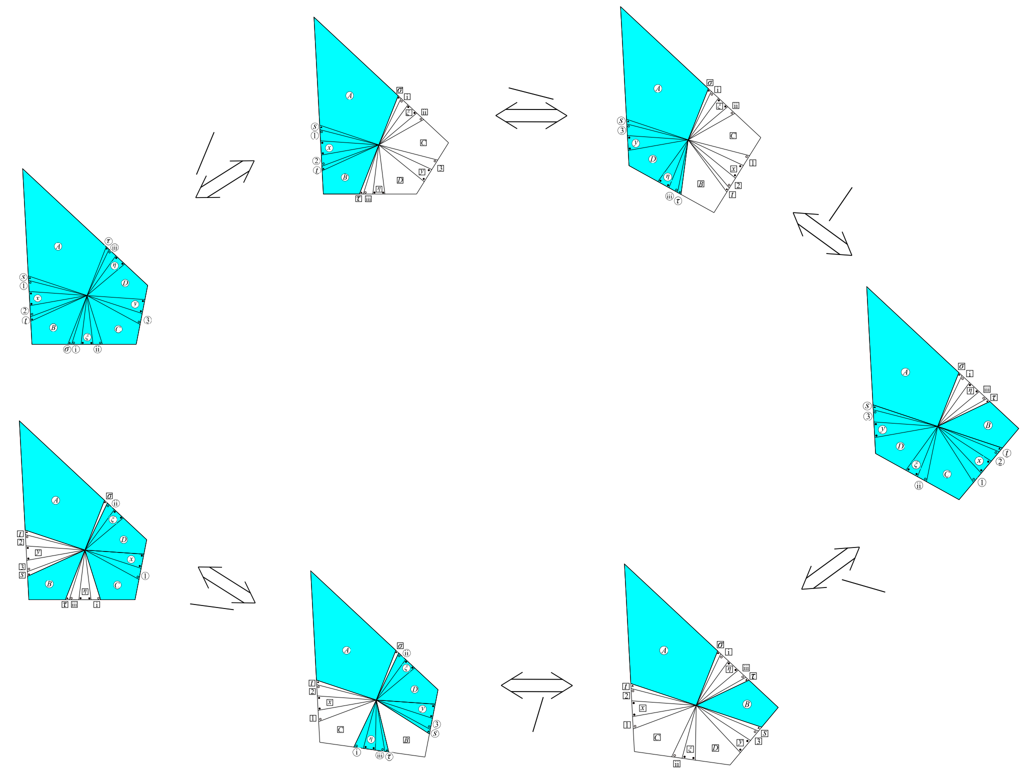


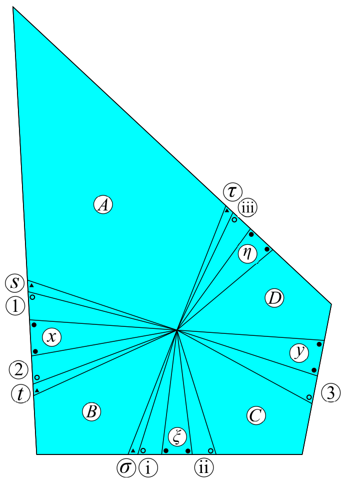
図 2.3

四角形 $ABCD$ と四角形 $ABCD^{(2)}$ を比較すると，

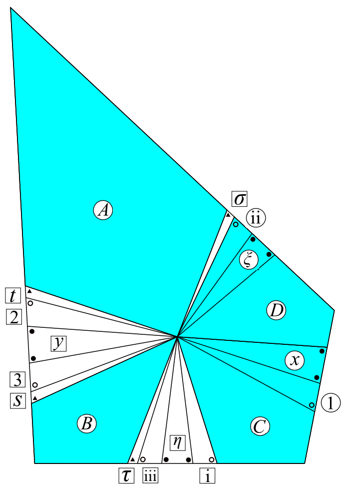
◎ s と t が裏返りながら入れ替わっている．
◎ σ と τ が裏返りながら入れ替わっている．
◎ 1 は 3, 2 は 1, 3 は 2 の位置に移動し，2 と 3 が裏返っている．
◎ i は ii, ii は iii, iii は i の位置に移動し，i と iii が裏返っている．
◎ x と y が入れ替わり，y だけが裏返っている．
◎ ξ と η が入れ替わり，η だけが裏返っている．

よって，s や t, σ や τ は合計 2 周 (12 回), 1, 2, 3 と i, ii, iii, iii は合計 3 周 (18 回), x や y, ξ や η は合計 4 周 (24 回) の切り貼りで元の位置に戻り，表にも戻る．パターン 1-(i) と比較すると，y と η が現れたために二等辺

三角形を表に戻すまでに必要な回数が増えている．裏表の区別をするとき, 四角形 $ABCD$ は 12 周 (72 回) の切り貼りで初めて全ての面が表に戻る．



四角形 $ABCD$



四角形 $ABCD^{(2)}$

3　主結果と今後の展望

この報告書ではパターン 1-(i) と 1-(ii) の四角形に切り貼りを施し, どちらも裏表の区別をつけなければ 6 回の切り貼りで循環した．裏表の区別を考える場合, パターン 1-(i) は 6 周 (36 回), パターン 1-(ii) は 12 周 (72 回) の切り貼りで全ての面が表に戻った．記載出来なかった残りの 10 パターンについてはパターン 1-(i) またはパターン 1-(ii) のどちらかが退化した切り貼りとなり, 裏表の区別をつけなければ 6 回の切り貼りで循環し, 裏表の区別をつける場合はそれぞれのパターンごとに全ての面が表に戻るまでの切り貼りの回数が異なるという結果が得られた．

今後の展望としては, 前提 1 や前提 2 を満たすための条件については分かっておらず, 前提 2 を満たさない四角形は切り貼り自体は可能であるため, 前提 2 を満たす四角形と同様に 6 回の切り貼りで循環するのかを調べる必要がある．そして, この切り貼りを五角形や六角形など他の多角形に施した場合はどうなるのか, ということは非常に興味深い内容である．また, 私は「面積と外周の長さが等しい 2 つの多角形を考えたとき, 外周の長さを保ったまま切り貼りで移り合うのか」をテーマとして考える中で四角形の切り貼りを見つけ研究を進めた．元々のテーマについても研究を進めたい．

さらに, 12 月 23 日の発表で私は導入として「ボヤイ-ゲルビンの定理」を提示したが, 金沢大学の牛島顕先生からボヤイ-ゲルビンの定理はユークリッド平面の全ての等長写像 (回転, 平行, 対称移動) を用いる equidecomposability(分割合同) であり, 先行研究では使える写像を制限するような研究が色々あるのでそれらと組み合わせると研究が広がるかもしれないと助言をして頂いた．また, 抽象的な定義をすればボヤイ-ゲルビンの定理は球面幾何学や双曲幾何学にも応用できる．先行研究と組み合わせたり定義を抽象化させたりするといった四角形の切り貼りを拡張させる研究にも積極的に取り組んでいきたい．