

重み付きグラフの変形と結び目理論への応用について

長坂 篤英 (東京大学大学院数理科学研究科)

概要

結び目を分類する上で不変量は重要な道具である．その中でも twisted Alexander 多項式は強力な不変量であり，近年重み付きグラフのゼータとの関連が示されたという進展がある．以下では，重み付きグラフの変形操作を定義し，結び目の変形との関係を述べ，ある条件を満たすより一般の群から重み付きグラフの定義をする方法と群の変形に伴うグラフの変形について述べる．

1 導入

二つの結び目を区別せよ，という問に対し不変量は非常に重要な役割を果たす．J. W. Alexander[5]により 1927 年に Alexander 多項式が導入されて以降，Jones 多項式，colored Jones 多項式や HOMFLY-PT 多項式などの多項式不変量や Jones 多項式の categorification によって得られる Khovanov homology など，人類は様々な不変量を得てきた．和田 [7]，Lin[10] により独立に定義された twisted Alexander 多項式は，Alexander 多項式に結び目群の表現の情報を付与することによって精密化したものであり，従来の Alexander 多項式では区別できない unknot と Kinoshita-Terasaka knot (KT knot) を区別でき，さらに HOMFLY-PT 多項式等で区別できない KT knot と Conway knot を区別できるという点で twisted Alexander 多項式は非常に強力であることがわかる．

一方，石井，大城は twisted Alexander 多項式を含み，さらに quandle という代数系から得られる quandle 2-cocycle invariant と呼ばれる不変量とも関連する f -twisted Alexander 不変量という概念を定義した [2]．

さらに，近年合田は matrix-weighted graph のゼータ関数から twisted Alexander 多項式の“分子”を復元できることを示した [4]．証明には隣接行列と自由微分から得られる Alexander 行列を関連づけるという手法を用いている．これは両者の関係が示唆された非常に興味深い結果であるが，図式を Reidemeister move で変形した際に対応する weighted graph がどう変化するか等には議論がされていないため，与えられた量が結び目の不変量を与えているか否かは和田の一般論に委ねているという点から，ゼータ関数の世界の中で閉じた枠組みを構築したとは言い難い．

以下では，まず matrix-weighted graph の基本変形というゼータ関数の値を保存する変形を操作する．その後，ある条件を満たす有限表示群に対してグラフを構成できることを述べ，変形操作を定義する．結び目の変形と言える Reidemeister move，それに伴う結び目群の表示の変形と言える strong Tietze 変換が全て weighted graph の変形という文脈で捉えられることを示す．

2 Matrix-weighted graph についての諸事項

本節では matrix-weighted graph についての定義をし、その変形について述べる。

有限有向グラフの各 edge に対して行列の重みを付与したものである。具体的に述べよう。vertex の集合を $V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ とし、各 v_i に対して $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が与えられているとする。そして、 v_i から v_j への edge が存在するとき、その edge の weight として可換環 R 成分の $a_i \times a_j$ の行列を対応させる。edge e の weight を $w(e)$ と表す。以下では、matrix-weighted graph をグラフの G と weight の w を合わせて (G, w) で表す。

edge e の始点、終点を $o(e), t(e)$ と表し、列 $(e_1, \dots, e_k)$ であり、 $i = 1, \dots, k-1$ に対し $t(e_i) = o(e_{i+1})$ なるものを $(o(e_1), t(e_k))$ -path という。とくに、 $o(e_1) = t(e_k)$ の場合、cycle と呼ぶ。

2 つの cycle $(e_1, \dots, e_k), (f_1, \dots, f_m)$ が同値であるとは、ある j が存在して $e_{i+j} = f_i$ が成り立つことをいう。さらに、cycle $(e_1, \dots, e_k)$ がある cycle を用いて $(f_1, \dots, f_m)^l$ とかける時、 $(e_1, \dots, e_k)$ は $(f_1, \dots, f_m)$ の power であると言い、 $l \geq 2$ となるような l が存在しない時 prime という。

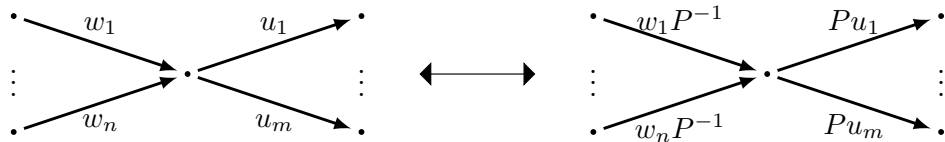
matrix-weighted graph (G, w) の matrix-weighted zeta function $\zeta_G(w)$ は

$$\zeta_G(w) = \prod_{[C]} \det(I - w(C))^{-1}$$

で定義される。ここに、 $[C]$ は prime cycle の同値類を走り、 $C = (e_1, \dots, e_k)$ としたとき、 $w(C) = w(e_1) \cdots w(e_k)$ とする。

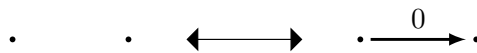
Definition 2.1. weighted oriented graph に対し、次の様な他の部分是不変にして一部の vertex, edge 及びその weight を変化させるような変形、及び図における edge の向きを逆にしたものを matrix-weighted graph の基本変形と呼ぶ。以下の図で、矢印が入っていない edge はその向きを問わないものとする。

(1) (change of basis)

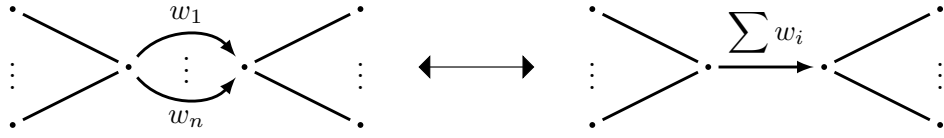


ここに、中央に現れる vertex はループを持ちうる。

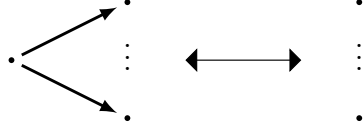
(2) (null edge)



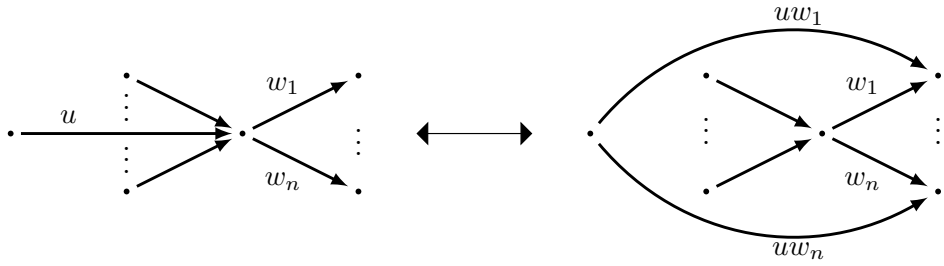
(3) (weight summation)



(4) (source/sink elimination)



(5) (hub vertex resolution)



ここに、左図において、weight が u の edge はループではないとする。

matrix-weighted graphs $(G, w), (G', w')$ が基本変形を有限回繰り返して他方が他方に移るとき、 $(G, w) \sim (G', w')$ と書く。 □

Theorem 2.2. (N.) *matrix-weighted graph* の基本変形でゼータ関数は不変である。すなわち、

$$(G, w) \sim (G', w') \implies \zeta_G(w) = \zeta_{G'}(w')$$

が成り立つ。 □

3 有限表示群と重み付きグラフ

本節では、ある条件を満たす有限表示群から自由微分を用いることで重み付きグラフを構成し、その変形操作について述べる。そして、この変形操作が群の変形と関連していることを述べる。

まずは自由微分を定義する。 $F_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$ を自由群とする。自由微分とは、 $\mathbb{Z}$ 線型写像

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{Z}F_s \rightarrow \mathbb{Z}F_s$$

であって、次の条件を満たすものである。

- 全ての $p, q \in F_s$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(pq) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) + p \frac{\partial}{\partial x_i}(q)$$

- $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$

Definition 3.1. $\langle X | R \rangle = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ を群 G の表示とする．関係式 r において, alphabet x_i を一つ選び, 同じ生成元 x_i が r の中に複数現れる場合は, どの x_i かも指定する．これを r の基点と呼ぶ. $\square$

以下では次の仮定をする．

Assumption 3.2. 各 r_i は基点をもち, かつ alphabet は X の中で異なる．さらに, $\text{pr} : F_s \rightarrow G$ としたとき,

$$\text{pr} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \neq 0 \in \mathbb{Z}G$$

である. $\square$

各 $r \in R$ に対し基点を定めたとき, これを (X, R, B) の三つ組で表す．以下では, (X, R, B) と書いた場合は断りなく上の条件を満たすように各 $r \in R$ に基点が定まっているものとする．有限表示が与えられた時に関係式の基点の取り方は様々であるが, 一つを固定して議論をする時は関係式のラベルを付け替えて

$$r_i = x_i f_i(x_1, \dots, x_n)^{-1}$$

と書く．これを以下では簡単のため

$$r_i : x_i = f_i$$

と書く．条件により,

$$\text{pr} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \neq 1 \in \mathbb{Z}G$$

である． f_i の中に x_i がある場合にも, r_i の先頭にどの x_i を指定するかのも不定性があるが, まずは一つ固定して議論をする．

Remark 3.3. 以上の仮定は次のように述べるができる．すなわち, 単射 $f : R \rightarrow X$ が存在し, $r \in R$ に対して $f(r)$ は r の alphabet でありどの alphabet かも指定している．さらに,

$$\text{pr} \left(\frac{\partial r}{\partial f(r)} \right) \neq 0 \in \mathbb{Z}G$$

が満たされている. $\square$

Definition 3.4. 上の仮定を満たす有限表示群 $\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ に対し, $r_i : x_i = f_i$ の両辺を微分した

$$dx_i = df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

を考える．graph の vertex の集合 $v_1, \dots, v_n$ に対し, 関係式 r_i ごとに, v_i から v_j へ edge を伸ばし, weight を

$$\text{pr} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \in \mathbb{Z}G$$

と定める．ここに, $\text{pr} : \langle x_1, \dots, x_n \rangle \rightarrow \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ である．これを group-weighted graph と言い, $\Gamma(X, R, B)$ と表す. $\square$

Group-weighted graph の基本変形を次の様に定義する.

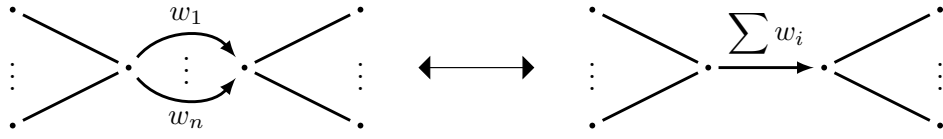
Definition 3.5. 次の様な局所的変形, すなわち他の部分是不変にして一部の vertex, edge, weight を変化させるような変形を group-weighted graph の基本変形と呼ぶ^{*1}. 以下の図で, 矢印が入っていない edge はその向きを問わないものとする.

(G1) (null edge)

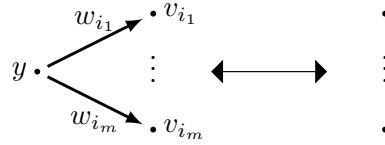


ここに, weight が 0 の edge が出発する点は sink ではないとする.

(G2) (weight summation)



(G3) (source/sink elimination)

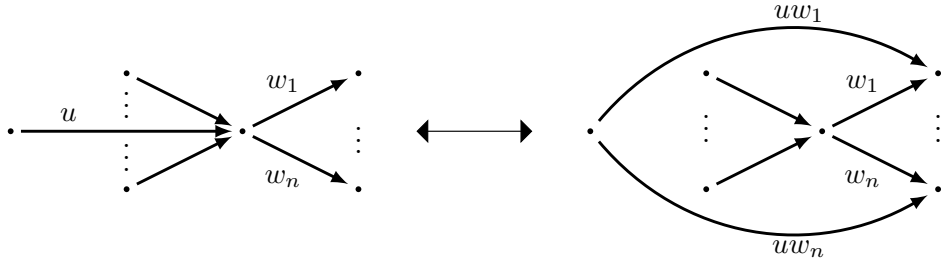


ここに, 上の $w_{i_1}, \dots, w_{i_m}$ において,

$$df = \sum_j w_{i_j} dx_{i_j}$$

なる y を含まない word f が存在するとする.

(G4) (hub vertex resolution)



ここに, 左図において, weight が u の edge はループではないとする. □

G の表現 $\rho : G \rightarrow GL_k(K)$ を用いて各 edge の weight $g \in \mathbb{Z}G$ を $\rho(g)$ に置き換えることで matrix-weighted graph が得られる. この様にして得られた matrix-weighted graph を $\Gamma_\rho(X, R, B)$

^{*1}この定義では「矢印を逆にする」という定義はしない. これは, 定義 3.4 で v_i 「から」 出発する, としているからである. v_i 「に」 入力する, と定義した場合は矢印の向きが逆になる.

とかく．定義から次がわかる．

Proposition 3.6. $\Gamma(X, R, B)$ と $\Gamma(X', R', B')$ が *group-weighted graph* の基本変形で移り合うならば, $\Gamma_\rho(X, R, B)$ と $\Gamma_\rho(X', R', B')$ は *matrix-weighted graph* の基本変形で移り合う. $\square$

また, どのように表現をとるかということについては次のことがわかる.

Proposition 3.7. $\Gamma_\rho(X, R, B)$ のゼータ関数を $\zeta_\rho(X, R, B)$ と書いたとき, 次が成り立つ.

- (1) $\rho \sim \rho' \implies \zeta_\rho(X, R, B) = \zeta_{\rho'}(X, R, B)$
- (2) $\rho \sim \rho_1 \oplus \rho_2 \implies \zeta_\rho(X, R, B) = \zeta_{\rho_1}(X, R, B)\zeta_{\rho_2}(X, R, B)$ $\square$

以上に述べた通りこの *matrix-weighted graph* 構成では, r_i の label の付け替えや, r_i の左辺に現れる x_i の取り方などの不定性が一般には生じるが, 次のことが言える.

Proposition 3.8. ゼータ関数は r_i の label の選択や, r_i の中のどの x_i を先頭に選ぶかの選択を変えても K の単数倍を除いて一致する. $\square$

すなわち, $f: R \rightarrow X$ が定まっている時, $r \in R$ に対し $f(r)$ を r の具体的にどの alphabet にするか, という不定性は考えている環の単数倍の違いを無視すればゼータ関数の値が一致する. 一方, 基点を変化させた時は一般にはゼータ関数の値は異なる. ただし, 基点の集合が不変である限りはゼータ関数の値は不変となる.

Proposition 3.9. 群 G の表示 $\langle X | R \rangle$ を考える. 写像 $f, g: R \rightarrow X$ は単射であって, $r \in R$ に対し $f(r), g(r)$ がそれぞれ r の *alphabet* であるとする. このとき, $f(R) = g(R)$ であれば単数倍を除いてそのゼータ関数が一致する. $\square$

さて, 以上の様に構成した *group-weighted graph* の変形と, グラフの構成に用いた有限表示群の変形とを関連付けよう. よく知られている様に, 次の群の変形操作は群の同型を誘導する.

Definition 3.10. 2つの有限表示群 $\langle X | R \rangle, \langle X' | R' \rangle$ が, 次の有限回の (1) ~ (4) の操作およびその逆で移り合う時, この二つは *strongly Tietze equivalent* という.

- (1) r_i を r_i^{-1} に変える.
- (2) r_i を $r_i r_j$ ($i \neq j$) に変える.
- (3) $w \in F(x_1, \dots, x_n)$ を用いて r_i を $w r_i w^{-1}$ にする.
- (4) G の表示を $\langle x_1, \dots, x_n, y | r_1, \dots, r_m, y w^{-1} \rangle$ ($w \in F(x_1, \dots, x_n)$) にする. $\square$

Definition 3.11. Strong Tietze 変換において,

- (1) ~ (3) では基点を不変.
- (4) では $y w^{-1}$ の基点を y とする.

というように基点を設定する時, これを基点を保った *strong Tietze 変換* と呼ぶ. $\square$

このとき次が成り立つ.

Theorem 3.12. (N.) $(X, R, B), (X', R', B')$ を群 G の 2 つの有限表示群とする．二つの表示が基点を保った *strongly Tietze equivalent* であるとき $\Gamma(X, R, B) \sim \Gamma(X', R', B')$ である． $\square$

逆が成り立つか？という問題を考えよう．

Theorem 3.13. (N.) 有限表示群 (X, R, B) に対し, *group-weighted graph* $\Gamma(X, R, B)$ をつくる． Γ を $\Gamma(X, R, B)$ に *group-weighted graph* の基本変形を行って得られたグラフとする．このとき, 次を満たす有限表示群 (X', R', B') が存在する．

- $\Gamma = \Gamma(X', R', B')$.
- (X, R) と (X', R') は *strongly Tietze equivalent*.

$\square$

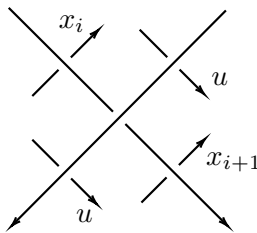
4 結び目理論への応用

本章は, 結び目理論への応用を述べる．細かい言葉の定義などは [14] などを参照されたい．まずは, 和田氏 [7] によって定義された結び目の twisted Alexander 多項式を定義し, 合田氏 [4] の定理を概説するとともに, 結び目の変形と先に述べたグラフの変形を結びつける．そして, 最後には結び目図式から不変量を得るにはグラフ上でどのような条件を満たすべきかについて議論をする．以下では K と書いたら結び目とし, $\pi_K := \pi_1(S^3 \setminus K)$ とする．

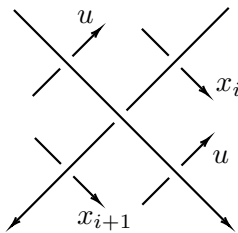
π_K の Wirtinger 表示

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$$

を一つ固定する．ここに, Wirtinger 表示とは, 結び目図式が与えられるたびに交叉点ごとに次の様に π_K の生成元を書いて得られる π_K の表示であった:



関係式 : $x_{i+1}u^{-1}x_i^{-1}u$



$x_{i+1}ux_i^{-1}u^{-1}$

Twisted Alexander 多項式とは, 結び目群の表現から得られるものである．写像をいくつか用意しよう．まず, α は Hurewicz 写像から誘導される写像とする:

$$\alpha : \pi_K \rightarrow \pi_K / [\pi_K, \pi_K] \cong \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle ; x_i \mapsto t$$

α を $\mathbb{Z}\pi_K \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に延長したものを $\tilde{\alpha}$ とし, $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ から π_K への自然な射影を ϕ , $\rho : \pi_K \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$ を表現とする．これらを延長した写像も $\tilde{\phi}, \tilde{\rho}$ とかく．以上の写像を用いて次の合成を考える．

$$\Phi : \mathbb{Z}F_n \xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathbb{Z}\pi_K \xrightarrow{\tilde{\rho} \otimes \tilde{\alpha}} M_m(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

(i, j) 成分が

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M_m(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

であるブロック行列を M とし, M の k 列目を取り除いて得られるブロック行列として $(m-1) \times (m-1)$ のサイズの行列を M_k とする.

Lemma 4.1 ([7]). すべての j に対し $\det \Phi(1-x_j) \neq 0$ である. □

Lemma 4.2 ([7]). $1 \leq i < j \leq n$ に対して

$$(\det M_j)(\det \Phi(1-x_i)) = \pm (\det M_i)(\det \Phi(1-x_j))$$

が成り立つ. □

これにより, 結び目 K の Wirtinger 表示を一つ固定した時についての不変量を得られた.

Definition 4.3 ([7]). Wirtinger 表示から得られる有理式

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det M_j}{\det(1-\Phi(x_j))}$$

を表現 ρ に対応した結び目 K の twisted Alexander 多項式という. □

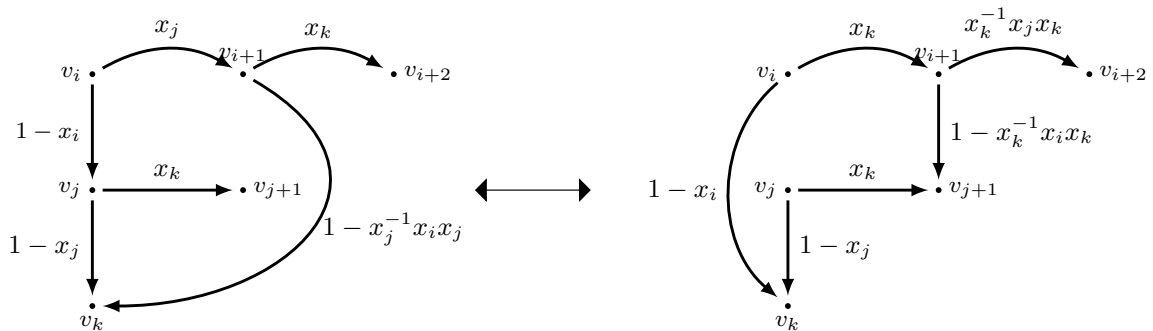
これによって, 結び目図式を一つ固定するたびに, すなわち結び目群の表示を一つ固定するたびに値を割り当てることができた. 合田氏 [4] は, 結び目群の関係式を

$$r_i : x_i = u^{\mp 1} x_{i+1} u^{\pm 1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

としたとき, M_1 はある matrix-weighted graph のゼータ関数から得られることを示した. 合田氏は結び目図式から knot graph と呼ばれるグラフを構成し, そこに weight を付与することで matrix-weighted graph を構成した. 一般には Wirtinger 表示の取り方はいろいろあるから, Wirtinger 表示のとり方を変えた時についての考察をしよう.

Theorem 4.4 ([7]). $\Delta_{K,\rho}$ は $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ の単数倍の違いを除いて定まる.

Proof. ここでは, グラフを用いた証明をする. Wirtinger 表示において関係式をどのように $n-1$ 個選ぶかの不定性は strong Tietze 変換であることが知られており, これによる行列式の変化は $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ の単数倍の違いのみである. Wirtinger 表示における関係式を $x_i = u^{\mp 1} x_{i+1} u^{\pm 1}$ と読み, グラフを作る. 例えば Reidemeister move 3 の前後のグラフの変化は次の様になっている.



この二つは group-weighted graph の基本変形で移り合うことがわかるから、表現を用いて matrix-weighted graph を構成した際、これらも基本変形で移り合う。すなわちゼータ関数は一致する。 ■

Remark 4.5. 上の証明で、基本変形の列を作るとそれが strong Tietze 変換の列になっていることがわかる。これは、同じく [7] によって示された「 π_K の任意の Wirtinger 表示は strongly Tietze equivalent である」ということの証明も同時に与える。 □

Remark 4.6. 和田氏は、表現が unimodular であるとき、すなわち、 $\rho: \pi_K \rightarrow SL_m(R)$ であるときに $\Delta_{K,\rho}$ はある $e \in \mathbb{Z}$ を用いて、 m が奇数のとき $\pm t^e$ 倍の、 m が偶数のとき t^e 倍の違いを除いて定まる、ということを示している。このことは Theorem 4.4 において、Wirtinger 表示の関係式を固定した場合ゼータの値は一致するため、strong Tietze 変換の (1), (2) での行列の行が定数倍されることから従う。 □

Theorem 4.4 におけるグラフの変化を再考しよう。 $w(v_i \rightarrow v_j)$ で v_i から v_j への path の weight の和とする。このとき、両側のグラフともに次が成り立っている。

- $w(v_i \rightarrow v_{i+2}) = x_j x_k$
- $w(v_i \rightarrow v_{j+1}) = x_k - x_i x_k$
- $w(v_i \rightarrow v_k) = 1 - x_i$
- $w(v_j \rightarrow v_{j+1}) = x_k$
- $w(v_j \rightarrow v_j) = 1 - x_j$

この考え方を押し進めると、Reidemeister move の前後に対応するグラフの path の weight が等しければ結び目図式に対して不変量を与えることが期待される。そこで、自由微分から得られるとは限らない行列の weight を付与させてグラフを構成し、Reidemeister move の前後に対応するグラフの path の weight が等しい条件を考えよう。このとき、石井氏、大城氏 [2] によって定義された Alexander pair により weight が統制されることがわかる。

Definition 4.7. Q を quandle, R を単位的環とする。写像 $f_1, f_2: Q \times Q \rightarrow R$ が次の条件を満たすとき、組 $f = (f_1, f_2)$ を Alexander pair と呼ぶ。

- (1) 全ての $a \in Q$ に対し $f_1(a, a) + f_2(a, a) = 1$
- (2) 全ての $a, b \in Q$ に対し $f_1(a, b)$ は可逆元
- (3) 全ての $a, b, c \in Q$ に対し次が成り立つ:
 - (ア) $f_1(a * b, c) f_1(a, b) = f_1(a * c, b * c) f_1(a, c)$
 - (イ) $f_1(a * b, c) f_2(a, b) = f_2(a * c, b * c) f_1(b, c)$
 - (ウ) $f_2(a * b, c) = f_1(a * c, b * c) f_2(a, c) + f_2(a * c, b * c) f_2(b, c)$ □

Quandle の定義などについては [6] などを参照されたい。Alexander pair の条件式は次の様な設定を考えた時に自然に出てくる条件である。

Proposition 4.8. [8] $f = (f_1, f_2)$ が Alexander pair であるとする。このとき、 $Q \times R$ に次で

quandle の構造 $(Q \times R, \star)$ が入る:

$$(a, x) \star (b, y) = (a * b, f_1(a, b)x + f_2(a, b)y)$$

□

Alexander pair $f = (f_1, f_2)$ が Proposition 4.8 が満たすことと weight の path を保存することの関連は、被覆空間と基本群の関係のアナロジーから理解できる。先に現れた以外の結び目の不変量として、quandle 2-cocycle invariant との関連なども以上の文脈から捉えることができ、[11] の別証明を与えるなど、グラフの path の weight を保つという条件が非常に重要な条件であることが示唆される。

参考文献

- [1] A. Terras, Zeta functions of graphs: a stroll through the garden, Cambridge University Press, 2010, vol. 128.
- [2] A. Ishii and K. Oshiro, “Twisted Derivatives with Alexander pairs for quandles., preprint.
- [3] D. Joyce, “A classifying invariant of knots, the knot quandle,” Journal of Pure and Applied Algebra 23.1 (1982): 37-65.
- [4] H. Goda, “Twisted alexander polynomial and matrix-weighted zeta function,” Kyushu Journal of Mathematics 74.1 (2020): 211-221.
- [5] J. W. Alexander, “Topological invariants of knots and links,” Transactions of the American Mathematical Society 30.2 (1928): 275-306.
- [6] M. Elhamdadi and S. Nelson, Quandles, American Mathematical Soc., 2015.
- [7] M. Wada, “Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups,” Topology 33.2 (1994): 241-256.
- [8] N. Andruskiewitsch, and M. Graña, “From racks to pointed Hopf algebras,” Advances in Mathematics 178.2 (2003): 177-243.
- [9] T. Ohtsuki, Quantum invariants: A study of knots, 3-manifolds, and their sets, World Scientific, 2002.
- [10] X. S. Lin, “Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials,” Acta Mathematica Sinica 17.3 (2001): 361-380.
- [11] Y. Taniguchi, “An f -twisted Alexander matrix of link quandles,” arXiv preprint arXiv:2107.06561 (2021).
- [12] 大槻 知忠, 結び目の不変量, 共立講座, 数学の輝き 4, 共立出版, 2015.
- [13] 北野 晃朗, 合田 洋, 森藤 孝之, ねじれ Alexander 不変量, 数学メモアール, 5, 日本数学会, 2006.
- [14] 村上 斉, 結び目理論入門 (上) (岩波数学叢書), 岩波書店, 2019.