The Long-Moody construction and twisted Alexander invariants

高野暁弘（東京大学大学院数理科学研究科）*

概要

Long-Moody 構成とは，組み紐群と自由群の半直積の表現から組み紐群の新しい表現を作る方法である．その構成によって出来た表現を行列表示すると，ねじれ Alexander 不変量の定義に使われる表現でねじった Alexander 行列が現れることが分かる．本講演では，組み紐を固定したとき “良い” 表現を選ぶと，その組み紐の閉包のねじれ Alexander 不変量が Long-Moody 構成を用いて記述できることを示す．

謝辞

本稿は研究集会「結び目の数理 IV」の報告書の一部になります．本研究集会での講演の機会を頂き，谷山公規氏，安原晃氏，村尾智氏，丹下稜斗氏，木村直記氏に心よりお礼申し上げます．指導教員の逆井卓也氏には非常に丁寧にご指導いただきました．この場をお借りして深く感謝申し上げます．最後に，講演を聞いてくださった全ての方に改めて感謝を申し上げます．

1 ねじれ Alexander 不変量

3 次元球面 S^3 内の結び目（または絡み目）K を考える．また，K の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ を $G(K)$ と表す．$G(K)$ は不足数が 1 であるような，つまり以下のような群表示をもつのでこれを固定する:

$$G(K) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{n-1} \rangle . \tag{1}$$

ただし，Wirtinger 表示であることは仮定しない．

ねじれ Alexander 不変量の定義のためにいくつか写像を準備する．まず $\alpha\colon G(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$ を各メリディアンを t に写すような全射準同型とする．特に，K が結び目であれば α は単にアーベル化写像である．また，R を一意分解整域とし，$\rho\colon G(K) \longrightarrow GL_k(R)$ を $G(K)$ の k 次元表現とする．さらに，F_n を $x_1, \ldots, x_n$ で生成されるランク n の自由群とし，$\phi\colon F_n \longrightarrow G(K)$ をそれぞれの群表示から誘導される自然な全射準同型とする．これらを自然に群環上の写像

$$\widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}], \quad \widetilde{\rho}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[GL_k(R)] \subset M_k(R), \quad \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

に拡張し，また $\widetilde{\rho}$ と $\widetilde{\alpha}$ のテンソル積表現 $\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$ を，

$$(\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha})(g) \coloneqq \rho(g)\alpha(g) \qquad (g \in G(K))$$

と定義する．これと $\widetilde{\phi}$ との合成を

$$\Phi \coloneqq (\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}) \circ \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$$

と書く．最後に Fox の自由微分 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ を考える．Fox の自由微分とは $\mathbb{Z}$ 上線型写像であって

* E-mail: takano@ms.u-tokyo.ac.jp

- 任意の i,j に対して，$\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$．ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ
- 任意の $g, g' \in F_n$ に対して，$\dfrac{\partial (gg')}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g}{\partial x_j} + g\dfrac{\partial g'}{\partial x_j}$

を満たすものである．

以上の準備のもと，$(n-1)\times n$ 行列 M を各 (i,j) 成分が $k\times k$ 行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M_k(R[t^{\pm 1}])$$

となるような行列と定義し，これを表現 ρ に付随する $G(K)$ の表示 (1) の**ねじれ Alexander 行列**という．さらに，行列 M の j 列目を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列を M_j とし，これを各成分が $R[t^{\pm 1}]$ の $(n-1)k$ 次正方行列とみなすことで，通常の行列式を考えることが出来る．このとき，ある j が存在して $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となり，さらにそのような i,j に対して

$$\det M_i \det \Phi(x_j - 1) = \pm \det M_j \det \Phi(x_i - 1) \tag{2}$$

が成り立つことが確かめられる．

定義 1.1. $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となるような j に対して

$$\Delta_{K,\rho}(t) \coloneqq \frac{\det M_j}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

と定義し，$\Delta_{K,\rho}(t)$ を結び目（または絡み目）K の表現 ρ に付随する**ねじれ Alexander 不変量**という．

補足 1.2. ねじれ Alexander 不変量は，εt^l 倍 $(\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z})$ の違いを除いて定義され，さらに式 (2) より $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となる j によらずに定まることが分かる[*1]．

2 Long-Moody 構成

2.1 組み紐群の自由群への作用

Long-Moody 構成の定義を述べるために，まず組み紐群の自由群への作用を復習する．B_n を n 次の組み紐群とする．組み紐群は，アルティン表示と呼ばれる次の群表示をもつ:

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & (i = 1, \ldots, n-2) \end{array} \right\rangle.$$

各生成元 σ_i は，図 1 のような n 本の組み紐に対応する．

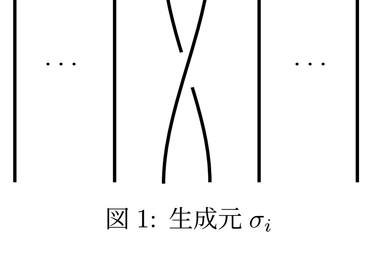

図 1: 生成元 σ_i

*1 ねじれ Alexander 不変量について，より詳しくは例えば和田 [2] や北野-合田-森藤 [3] を参照のこと．

D^2 を $\mathbb{C}$ 内の単位円板とし，$z_1, \ldots, z_n$ を D^2 の内部の点であって，各点 z_i は実軸上にあり $z_1 < \cdots < z_n$ を満たすようにとる．また，D_n を n 点穴あき円板 $D^2 \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ とし，D^2 の境界上に基点 z をとる．このとき，基本群 $\pi_1(D_n, z)$ は自由群 $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ と同型であり，各生成元 x_i は z を基点として z_i の周りを時計回りに 1 回周る単純閉曲線として実現される．組み紐群 B_n は D_n の写像類群 $\mathcal{M}(D_n)$ と同型なので，B_n の各元は $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の自己同型写像を誘導し，これにより B_n の F_n への右作用を得る（図 2）．これを Artin 表現という:

$$x_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & (j = i) \\ x_i & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases} .$$

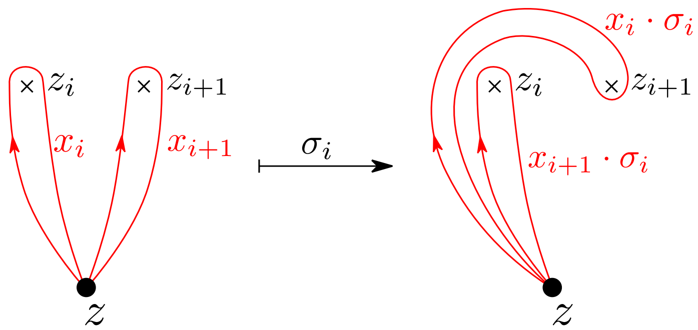

図 2: σ_i の $\pi_1(D_n, z)$ への作用

組み紐 $b \in B_n$ に対して，b の**閉包** $\hat{b}$ とは図 3 のようにして得られる S^3 内の結び目（または絡み目）である．このとき，$G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b})$ は次のような群表示をもつことが知られている:

$$G(\hat{b}) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 = x_1 \cdot b, \ldots, x_n = x_n \cdot b \rangle . \tag{3}$$

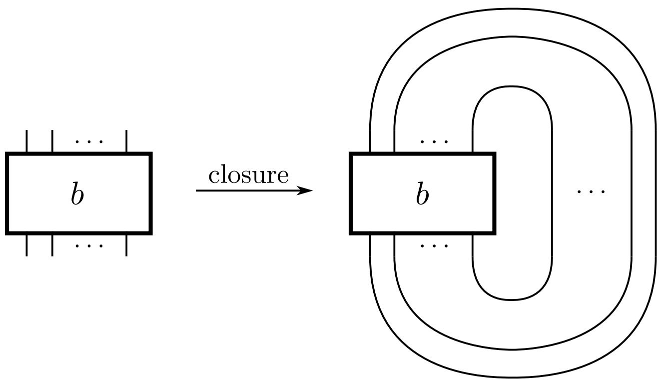

図 3: 組み紐の閉包

2.2　Long-Moody 構成

$\rho \colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ を，半直積 $B_n \ltimes F_n$ の k 次元表現とする．ここで，B_n の F_n への作用は上で与えられたものとする．また，$v \in R^{\oplus k}$ は行ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_k)$ のように書き，表現 ρ は右からかけられているとする．$\mathcal{I}_{F_n}$ を $R[F_n]$ の添加イデアル，つまり添加写像 $R[F_n] \longrightarrow R; \sum_{x \in F_n} a_x x \longmapsto \sum_{x \in F_n} a_x \ \ (a_x \in R)$ の核とする．$\mathcal{I}_{F_n}$ は自然に左 $R[F_n]$ 加群になり，また $R^{\oplus k}$ も表現 ρ により右 $R[F_n]$ 加群とみなすことが出来るので，テンソル積 $R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}$ を考えることが出来る．

定義 2.1. ([1, Theorem 2.1]) 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\mathcal{LM}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_n}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes h) := v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で定義されるものである．

補足 2.2. 半直積 $B_n \ltimes F_n$ は，$\sigma_i \longmapsto \sigma_{i+1}$, $x_i \longmapsto \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1$ という対応により B_{n+1} に埋め込まれることが知られており，この埋め込みを用いて B_{n+1} の表現から B_n の表現を構成するという Long-Moody 構成も定義できる ([1, Theorem 2.4]).

添加イデアル $\mathcal{I}_{F_n}$ はランク n の自由 $R[F_n]$ 加群と同型であるので，$R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n} \cong R^{\oplus nk}$ となり，Long-Moody 構成は B_n の nk 次元表現とみなすことが出来る．また，その基底として例えば $x_1 - 1, \ldots, x_n - 1$ がとれる．よって，この基底に関する Long-Moody 構成の行列表示を考えることが出来る．

定理 2.3. 任意の組み紐 $b \in B_n$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

が成り立つ．

証明. Fox の自由微分の基本公式より，任意の $w \in \mathbb{Z}[F_n]$ に対して

$$w - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_j - 1)$$

が成り立つ．よって，任意の $b \in B_n, v \in R^{\oplus k}$ および $1 \le i \le n$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes (x_i - 1)) &= v(\rho(b)) \otimes (x_i - 1) \cdot b \\ &= v(\rho(b)) \otimes \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)(x_j - 1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} v\left(\rho(b)\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right) \otimes (x_j - 1)\end{aligned}$$

となり求める行列を得る． □

補足 2.4. Long-Moody 構成には，1 変数増やして考えることがよくある．$t^l \in R[t^{\pm 1}]$ $(l \in \mathbb{Z})$ に対して，$t^l\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(R[t^{\pm 1}]) = R[t^{\pm 1}]^{\times}$ を $B_n \ltimes F_n$ の 1 次元表現であって, 各生成元 σ_i, x_i を t^l 倍にうつすものとして定義する．また, 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ とのテンソル積表現 $t^l \otimes \rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R[t^{\pm 1}])$ を $t^l\rho$ と表す．このとき，表現 ρ の **1 変数増やした Long-Moody 構成**とは，表現

$$t^{-1}\mathcal{LM}(t\rho) = t^{-1} \otimes \mathcal{LM}(t\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_{R[t^{\pm 1}]}(R[t^{\pm 1}]^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}) \cong GL_{nk}(R[t^{\pm 1}])$$

のことである．

例 2.5. 1 次元自明表現 $\mathcal{T} := t^0\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を考える．このとき, 1 変数増やした Long-Moody 構成 $t^{-1}\mathcal{LM}(t\mathcal{T})\colon B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ による σ_k の像は次で与えられる:

$$\begin{aligned}t^{-1}\mathcal{LM}(t\mathcal{T})(\sigma_k) &= t^{-1}(\sigma_k)\mathrm{Diag}\left(t\mathcal{T}(\sigma_k), \ldots, t\mathcal{T}(\sigma_k)\right) \cdot \left(t\mathcal{T}\left(\frac{\partial(x_i \cdot \sigma_k)}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n} \\ &= I_{k-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-k-1}.\end{aligned}$$

これは unreduced Burau 表現と同値である．

3　主結果

3.1　Reduced Long-Moody 構成

主結果を述べるために，reduced Long-Moody 構成の定義を説明する．そのために，F_n の別の生成元を用意する．$g_i := x_1 \cdots x_i$ とすると，$g_1, \ldots, g_n$ もまた $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の生成元となり，B_n の作用は次で与えられる（図 4）：

$$g_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} g_j & (j \neq i) \\ g_{i+1} g_i^{-1} g_{i-1} & (j = i \neq 1) \\ g_2 g_1^{-1} & (j = i = 1) \end{cases}.$$

特に，g_n は D^2 の境界とホモトピックなので B_n の作用は自明であることが分かる．以後，F_n は $g_1, \ldots, g_n$ で生成されているとみなし，その部分群 F_{n-1} は $g_1, \ldots, g_{n-1}$ で生成されているとする．

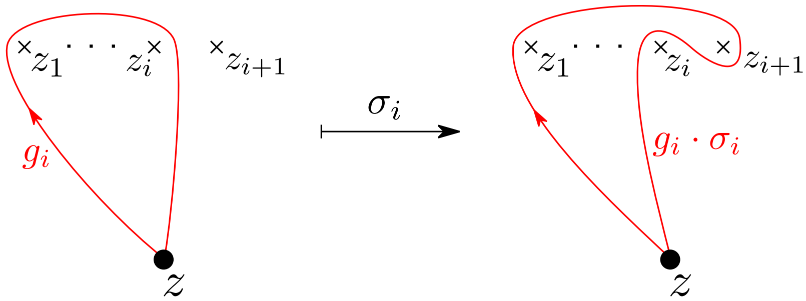

図 4: 生成元 g_i と σ_i の作用

$\mathcal{I}_{F_n}$ の基底を $g_1 - 1, \ldots, g_n - 1$ にとり直し，この基底に関する $\mathcal{LM}(\rho)$ の行列表示を求めると

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(\rho\left(\dfrac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} & V \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

となる．ここで，V はある $(n-1)k \times k$ 行列である．

定義 3.1. ([1, Theorem 2.11])[*2]表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **reduced Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_{n-1}]} \mathcal{I}_{F_{n-1}})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_{n-1}}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b)(v \otimes h) := v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で与えられるものである．

このとき，基底 $g_1 - 1, \ldots, g_{n-1} - 1$ に関する $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)$ の行列表示は次のようになる:

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$

補足 3.2. 1 変数増やした reduced Long-Moody 構成も同様に定義される．また，その行列表示は

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= t^{-1}(b)\mathrm{Diag}\left(t\rho(b), \ldots, t\rho(b)\right) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \\ &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \end{aligned}$$

となる．

[*2] Long の論文での主張は，本稿での言葉を使うと「Long-Moody 構成は，reduced Long-Moody 構成とインプットの表現 $\rho|_{B_n}$ に split する」というものだが，上の行列表示の通り組み紐群の表現として必ずしも split するわけではない．

3.2 主結果

前節より，Long-Moody 構成の行列表示は Fox の自由微分で記述できることが分かった．さらに，最初にとる表現 ρ にある条件を課すことでねじれ Alexander 不変量との関係が分かる．

定理 3.3. 組み紐 $b \in B_n$ を固定する．表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ に対して，表現 $G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ が存在して次の図式が可換であると仮定する:

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "\rho|_{F_n}"] \arrow[d, "\phi"'] & GL_k(R) \\ G(\hat{b}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

このとき，

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t)\det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) = \pm\varepsilon t^l \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\dots,\rho(b))\right)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z}$ である．また，表現 $G(\hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ は $\rho|_{F_n}$ から誘導されるので，同じ記号 ρ で表している．

証明. 組み紐 b を用いた $G(\hat{b})$ の表示 (3) において，生成元を $x_1,\dots,x_n$ から $g_1,\dots,g_n$ に取り替えることにより不足数 1 の表示を得る:

$$G(\hat{b}) \cong \langle g_1,\dots,g_n \mid g_1 = g_1\cdot b,\dots,g_{n-1} = g_{n-1}\cdot b\rangle\,.$$

このとき，全射準同型 $\alpha\colon G(\hat{b}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t\rangle$ は $g_i \longmapsto t^i\ (i = 1,\dots,n)$ で与えられる．この表示によるねじれ Alexander 行列を計算すると

$$M = \left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - \delta_{ij}I_k\right)_{1\le i\le n-1, 1\le j\le n}$$

となるので，n 列目を消去すると，表現 ρ に付随するねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{\hat{b},\rho}(t)$ は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{\det M_n}{\det\Phi(g_n - 1)} = \frac{\det\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right)}{\det\Phi(g_n - 1)}$$

となる．一方，定義より $\Phi = (\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\alpha})\circ\widetilde{\phi}$ であり，また $t|_{F_n} = \alpha\circ\phi$, $\rho|_{F_n} = \rho\circ\phi$ なので

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\dots,\rho(b))\cdot\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \\ &= \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\dots,\rho(b))\cdot\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\,(\rho(b),\dots,\rho(b))\right) =& \det\mathrm{Diag}\,(\rho(b),\dots,\rho(b))\det\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \\ =& (\det\rho(b))^{n-1}\det\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) &= \det(t\rho(g_n) - I_k) \\ &= \det\Phi(g_n - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．$\det\rho(b) \in R^\times$ なので，求める等式を得る． □

4 例

最後に，定理 3.3 の例をいくつか述べることにする．ただし，定理 3.3 の仮定では，$B_n \rtimes F_n$ の表現が結び目（または絡み目）群の表現を誘導するという条件件を課していたが，以下の例では逆に，最初に結び目（または絡み目）群の表現をとってきて，それが $B_n \rtimes F_n$ の表現に拡張されるかどうかを考えることにする．

例 4.1. ([2, Section 4]) $b := \sigma_1^3 \in B_2$ とする．この閉包は三葉結び目 3_1 である（図 5）．このとき，補空間の

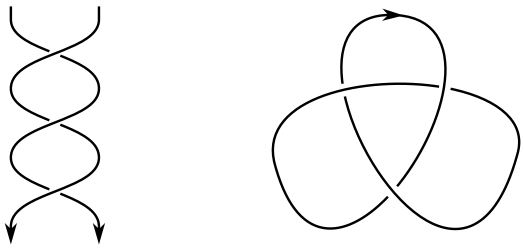

図 5: 組み紐 σ_1^3 と三葉結び目 3_1

基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b \rangle \\ &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 = g_1 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

と書ける．また，表現 $\rho := \widetilde{\mathscr{B}}\colon G(\hat{b})(\cong B_3) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}[s^{\pm 1}])$ を reduced Burau 表現とする．この表現は

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -s \end{pmatrix}$$

で与えられる．これは自然にランク 2 の自由群 F_2 の表現に拡張される．また，半直積 $B_2 \ltimes F_2$ は

$$B_2 \ltimes F_2 \cong \left\langle x_1, x_2, \sigma_1 \;\middle|\; x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1 \right\rangle$$

という表示をもつので，表現 ρ が $B_2 \ltimes F_2$ に拡張されるためには，上の関係式を満たすように σ_1 の像を定める必要があるが，これは

$$\rho(\sigma_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい．ここで，$g_1 \cdot b = g_2^2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ なので

$$\frac{\partial(g_1 \cdot b)}{\partial g_1} = -g_2^2 g_1^{-1}$$

であり，よって

$$t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) = -\rho(b)\rho(g_2^2 g_1^{-1})t^3 = \begin{pmatrix} st^3 & -st^3 + s^2t^3 \\ st^3 & -st^3 \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$\det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \rho(b)\right) = \det\begin{pmatrix} 1+st^3 & -st^3+s^2t^3 \\ st^3 & 1-st^3 \end{pmatrix} = 1 - s^3t^6$$

と

$$\det\left(\rho(x_1x_2)t^2 - I_2\right) = \det\begin{pmatrix} -1 & -st^2 \\ st^2 & -st^2-1 \end{pmatrix} = 1 + st^2 + s^2t^4$$

を得る．以上より，ねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{1-s^3t^6}{1+st^2+s^2t^4} = 1-st^2$$

となる．

例 4.2. $b := \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$ とすると，その閉包は 8 の字結び目 4_1 である（図 6）．このとき，補空間の

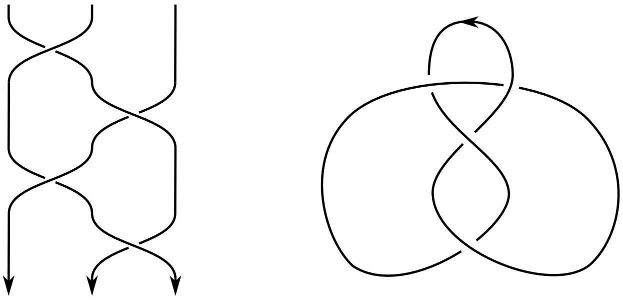

図 6: 組み紐 $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ と 8 の字結び目 4_1

基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b, x_3 = x_3 \cdot b \rangle \\ &\cong \left\langle x_2, x_3 \;\middle|\; x_2[x_3^{-1}, x_2] = [x_3^{-1}, x_2]x_3 \right\rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 = g_1 \cdot b, g_2 = g_2 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

である．ここで，$[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$ である．また，表現 $\rho\colon G(\hat{b}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ を次で定義する:

$$\rho(x_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(s+2) & 3s \\ -2s^2 & s-1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(s+2) & 3 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$s \in \mathbb{C}$ は $s^2+s+1=0$ を満たすとする．半直積 $B_3 \ltimes F_3$ は

$$B_3 \ltimes F_3 \cong \left\langle x_1, x_2, x_3, \sigma_1, \sigma_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1, x_3\sigma_1 = \sigma_1 x_3, \\ x_1\sigma_2 = \sigma_2 x_1, x_2\sigma_2 = \sigma_2 x_2 x_3 x_2^{-1}, x_3\sigma_2 = \sigma_2 x_2, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right\rangle$$

という表示をもつので，σ_1 と σ_2 の像を

$$\rho(\sigma_1) = \sqrt{\frac{-s}{3}}\begin{pmatrix} 1 & s+2 \\ -\dfrac{2(s+2)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_2) = \sqrt{\frac{-s}{3}}\begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ \dfrac{2(2s+1)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}$$

と定めれば，表現 ρ は $B_3 \ltimes F_3$ に拡張される．すると

$$\begin{aligned} &\det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \begin{pmatrix} \rho(b) & 0 \\ 0 & \rho(b) \end{pmatrix}\right) \\ =&\det\begin{pmatrix} \frac{(t^3+2t^2+1)(s-1)}{3t} & -\frac{t^3-t^2s+1}{t} & \frac{2t^2s+t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \frac{ts+s+1}{t} \\ \frac{2(-t^2s^2+t^3+1)}{3t} & -\frac{(t^3+2t^2+1)(s+2)}{3t} & \frac{2(ts+t+s)}{3t} & -\frac{2t^2s+t^2-3s^2+ts+2t}{3t^2} \\ \frac{3t^2s-3t+s-1}{3t} & -\frac{1}{t} & \frac{3t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \frac{s+1}{t} \\ \frac{2}{3t} & \frac{3t^2s^2-3t-s-2}{3t} & \frac{2s}{3t} & \frac{3t^2+3s^2-ts-2t}{3t^2} \end{pmatrix} \\ =&\frac{(1+t)^4(1-t+t^2)^2}{t^4} \end{aligned}$$

であり

$$\det\left(\rho(x_1x_2x_3)t^3 - I_2\right) = \det\begin{pmatrix} -(1+t)(1-t+t^2) & 0 \\ 0 & -(1+t)(1-t+t^2) \end{pmatrix}$$
$$= (1+t)^2(1-t+t^2)^2$$

となるので，ねじれ Alexnader 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = (1+t)^2$$

となる.

5 今後の課題＆現在取り組んでいること

問題 5.1. 組み紐 $b \in B_n$ を固定したとき，$B_n \ltimes F_n$ に拡張するような表現 $\rho\colon G(\hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ を見つけよ.

上の例以外では，組み紐 σ_1^q，つまり $(2,q)$ トーラス結び目（ただし q は奇数）に対してある非可換な $SL_2(\mathbb{C})$ 表現が $B_2 \ltimes F_2$ に拡張できることを確かめている．また，結び目 $4_1, 5_2, 6_1$ に対してはホロノミー表現は半直積に拡張されないことが分かっている.

問題 5.2. インプットの表現 $\rho\colon B_n \longrightarrow GL_k(R)$ として，既にある絡み目の不変量 f を構成できているようなものをとってきたとき

- $\mathcal{LM}(\rho)$ から絡み目の不変量 F を構成せよ.
- 2 つの不変量 f と F の関係を見つけよ.

参考文献

[1] D. D. Long. Constructing representations of braid groups. *Comm. Anal. Geom.*, 2(2):217–238, 1994.

[2] Masaaki Wada. Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, 33(2):241–256, 1994.

[3] 北野晃朗・合田洋・森藤孝之. ねじれ *Alexander* 不変量. 数学メモアール, 5. 日本数学会, 2006.