Quandle twisted Alexander invariants and homology groups

谷口　雄大　(大阪大学大学院理学研究科)*

概　　要

Quandle twisted Alexander invariant は Ishii-Oshiro によって導入された quandle と quandle homomorphism の組に対する不変量であり, 結び目の twisted Alexander polynomial を復元することができる. 本講演では quandle twisted Alexander invariant と Andruskiewitsch-Graña により構成された quandle の homology group との関係について得られた結果について報告する.

1. Quandle と Alexander pair

空でない集合 X 上の 2 項演算 $*$ が次の条件を満たすとき組 $(X,*)$ を **Quandle** [9,13] と呼ぶ. 簡単のため $(X,*)$ は単に X と書くことにする.

- 任意の $x \in X$ に対して $x * x = x$ が成り立つ.
- ある 2 項演算 $\bar{*} : X^2 \to X$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対して $(x * y)\bar{*}y = (x\bar{*}y) * y = x$ が成り立つ.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ が成り立つ.

これらの条件はそれぞれ結び目理論における Reidemeister 移動に対応している.

例 1. G を群とする. このとき G 上の 2 項演算 $*$ を $x * y := y^{-1}xy$ で定めると $(G,*)$ は quandle になる. この quandle を G の**共役 quandle** と呼び, $\mathrm{Conj}(G)$ と書く.

例 2. K を S^3 内の有向結び目とし, K の正則近傍を $N(K)$, K の外部を $E(K)$ と書く. また $E(K)$ の点 p を固定する. K のメリディアン円板 D と ∂D から p へ向かう $E(K)$ 内の道 α の組 (D,α) を考えそのホモトピー類を $[(D,\alpha)]$ と書くことにする. このホモトピー類全体の集合を $Q(K,p)$ と書き, $Q(K,p)$ 上の 2 項演算 $*$ を次で定める:

$$[(D_1,\alpha)] * [(D_2,\beta)] := [(D_1, \alpha \cdot \beta^{-1} \cdot \partial D_2 \cdot \beta)].$$

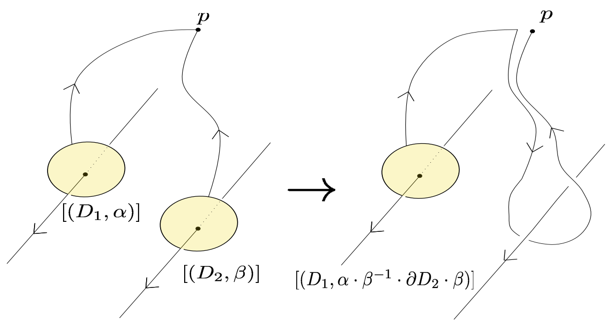

図 1: 結び目 quandle の演算

本研究は科研費 (課題番号:21J21482) の助成を受けたものである。

*e-mail: u660451k@ecs.osaka-u.ac.jp

このとき組 $(Q(K,p),*)$ は quandle になり, この quandle を K の**結び目 quandle** と呼ぶ. 結び目 quandle の quandle 同型類は p に依存しないので以降は単に $Q(K)$ と書く.

続いて Alexander pair について復習する. X を quandle, R を乗法的単位元 1 を持つ環とする. 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to R$ が次の条件を満たすとき組 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ を **Alexander pair** [8] と呼ぶ:

- 任意の $x \in X$ に対して $f_1(x,x) + f_2(x,x) = 1$ が成り立つ.
- 任意の $x, y \in X$ に対して $f_1(x,y)$ は R の可逆元である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して
$$\begin{aligned} &f_1(x*y,z)f_1(x,y) = f_1(x*z,y*z)f_1(x,z),\\ &f_1(x*y,z)f_2(x,y) = f_2(x*z,y*z)f_1(y,z) \text{ かつ}\\ &f_2(x*y,z) = f_1(x*z,y*z)f_2(x,z) + f_2(x*z,y*z)f_2(y,z). \end{aligned}$$
が成り立つ.

Andruskiewitch と Graña によって **quandle module** [1] という概念が導入されており, Alexander pair (f_1, f_2) は quandle module の (η, τ) に対応している. 本稿では [8] での記法を用いることにする.

例 3. X を quandleとし, 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を次で定める:

$$f_1(x,y) := t^{-1}, \quad f_2(x,y) := 1 - t^{-1}.$$

このとき組 (f_1, f_2) は Alexander pair である.

例 4. R を一意分解整域, G を k 次一般線形群 $GL(k;R)$, X を conjugation quandle $\mathrm{Conj}(G)$ とする. $R[t^{\pm 1}]$ を R 係数の 1 変数 Laurent 多項式環, $M(k,k;R[t^{\pm 1}])$ で各成分が $R[t^{\pm 1}]$ の元である k 次正方行列全体が成す環とし, 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to M(k,k;R[t^{\pm 1}])$ を次で定める:

$$f_1(x,y) := y^{-1}t^{-1}, \quad f_2(x,y) := y^{-1}x - y^{-1}t^{-1}.$$

このとき組 (f_1, f_2) は Alexander pair である.

2. Quandle twisted Alexander invariant

この節では quandle の twisted Alexander invariant の定義と性質 [7] について復習する. Quandle の表示については [4,10] を, $\boldsymbol{f}$-twisted Alexander matrix については [7,8] を参照されたい.

$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を有限集合, $FQ(S)$ を S 上の自由 quandle とする. また $Q = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$ を有限表示 quandle, X を quandle, R を一意分解整域, $\rho : Q \to X$ を quandle 準同型, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ を写像 $f_1, f_2 : X^2 \to M(k, k : R)$ の組からなる Alexander pair, c を X の元とする. $\mathrm{pr} : FQ(S) \to Q$ を自然な射影とし, 本稿では簡単のため $a \in FQ(S)$ に対して $\mathrm{pr}(a)$ は単に a と書くことにする.

$1 \leq j \leq n$ に対して x_j に関する $\boldsymbol{f} \circ \rho$**-derivative** [8] とは次の規則を満たす $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j} : FQ(S) \to M(k,k;R)$ のことである:

- 任意の $x, y \in FQ(S)$ に対して, $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(x*y) = f_1(\rho(x),\rho(y))\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(x) + f_2(\rho(x),\rho(y))\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(y)$.
- $1 \leq i \leq n$ に対して $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(x_i) = \delta_{ij}$, ここで δ_{ij} は Kronecker delta である.

また Q の関係子 $r = (r_1, r_2) \in FQ(S)^2$ に対して $\dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(r) := \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(r_1) - \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_j}(r_2)$ と定める.

このとき表示 $\langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$ に関する **$\boldsymbol{f}$-twisted Alexander matrix** [8] とは次で定める各成分が $M(k, k; R)$ の元である $m \times n$ 行列 $A(Q, \rho; f_1, f_2)$ のことである:

$$A(Q,\rho;f_1,f_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_1}(r_1) & \cdots & \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_n}(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_1}(r_m) & \cdots & \dfrac{\partial_{\boldsymbol{f}\circ\rho}}{\partial x_n}(r_m) \end{pmatrix}.$$

続いて $\boldsymbol{f}$-twisted Alexander matrix $A(Q,\rho;f_1,f_2)$ の i 列目を取り除いた行列を $A(Q,\rho;f_1,f_2)_i$ と書き, $A(Q,\rho;f_1,f_2)_i$ を各成分が R の元である $km \times k(n-1)$ 行列とみなす. また $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i)$ を行列 $A(Q,\rho;f_1,f_2)_i$ の $k(n-1)$ 次の小行列式全体の最大公約数とする, ただし $m < n-1$ ならば $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i) = 0$ と定める. ここで $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i)$ は R の単元倍を法として定まることに注意する.

補題 5 (Ishii-Oshiro [7])**.** 任意の $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$\det f_2(\rho(x_j)\bar{*}c, c)\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i) \doteq \det f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_j)$$

が成り立つ, ここで $\doteq$ は R の単元倍を法として等しいことを表す.

ここで $\det(f_2(x_i)\bar{*}c, c) \neq 0$ を満たすある i が存在すると仮定する. すると補題 5 から R の商体の元 $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c) := \dfrac{\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2)_i)}{f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)}$ は R の単元倍を法として i の取り方に依らない.

定理 6 (Ishii-Oshiro [7])**.** Q' を有限表示 quandle とする. もし quandle 同型 $\psi : Q' \to Q$ が存在するならば $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c) \doteq \Delta(A(Q',\rho\circ\psi;f_1,f_2),c)$ が成り立つ.

つまり $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c)$ は quandle と quandle 準同型の組 (Q,ρ) の不変量になる.

命題 7 (Ishii-Oshiro [7])**.** K を S^3 内の有向結び目とし, $Q(K)$ を K の結び目 quandle とする.
(1) X を quandle とし, (f_1, f_2) を例 3 の Alexander pair とする. 任意の quandle 準同型 $\rho : Q(K) \to X$ と $c \in X$ に対して $\Delta(A(Q(K),\rho;f_1,f_2),c) \doteq \dfrac{\Delta_K(t)}{t-1}$ が成り立つ, ここで $\Delta_K(t)$ は K の **Alexander polynomial** である.
(2) R を一意分解整域, G を k 次一般線形群 $GL(k;R)$, X を conjugation quandle $\mathrm{Conj}(G)$ とする. このとき任意の quandle 準同型 $\rho : Q(K) \to X$ から結び目群の線形表現 $\rho_{\mathrm{grp}} : G(K) \to G$ が誘導される. (f_1, f_2) を例 4 の Alexander pair とすると, 任意の $c \in X$ に対して $\Delta(A(Q(K),\rho;f_1,f_2),c) \doteq \Delta_{K,\rho_{\mathrm{grp}}}(t)$ が成り立つ, ここで $\Delta_{K,\rho_{\mathrm{grp}}}(t)$ は ρ_{grp} に対する K の **twisted Alexander polynomial** [12, 14] である.

3. Homology groups

この節では Andruskiewitsch と Graña によって定義された Alexander pair を用いた homology group [1] の定義を復習する. 記法などは [2] に基づいている.

正の整数 n に対して $C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を Q^n の元を基底とする自由 $M(n,n;R)$ 加群とする. また 0 以下の整数 n に対しては

$$C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) := \begin{cases} M(n,n;R) & (n=0 \text{ のとき}), \\ 0 & (n<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. 続いて正の整数 n に対して $\partial_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho} : C_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \to C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を以下で定める:

$$\begin{aligned} &\partial_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(q_1,\ldots,q_n) \\ &= \sum_{i=2}^{n}(-1)^i f_1(\rho([q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n]),\rho([q_i,\ldots,q_n]))(q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n) \\ &-\sum_{i=2}^{n}(-1)^i(q_1*q_i,\ldots,q_{i-1}*q_i,q_{i+1},\ldots,q_n) \\ &+f_2(\rho([q_1,q_3,\ldots,q_n]),\rho([q_2,\ldots,q_n]))(q_2,\ldots,q_n), \end{aligned}$$

ここで $[q_1,\ldots,q_n] := (\cdots(q_1*q_2)*q_3\cdots)*q_n$ である.

また $\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho} : C_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \to C_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を $\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(x) := f_2(\rho(x)\bar{*}c, c)$, 負の整数 n に対して $\partial_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho} : C_{n+1}^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \to C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ を零写像と定める. このとき $C_\bullet^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) = (C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q), \partial_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho})$ は chain complex であり, この chain complex の n 次の homology group を $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ と書くことにする.

また右 $M(k,k;R)$ 加群 V を用意して chain complex $C_\bullet^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ を $C_\bullet^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V) = (V\otimes C_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q), \mathrm{Id}_V\otimes\partial_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho})$ で定め, この n 次の homology group を $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ と書く.

例 8. X を quandle とする.
(1) 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to \mathbb{Z}$ を以下で定める:

$$f_1(x,y) := 1, \quad f_2(x,y) := 0.$$

このとき $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ は Alexander pair であり, $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ は rack space [5, 6] の homology group と一致する.
(2) 写像 $f_1, f_2 : X^2 \to \mathbb{Z}[t^{\pm1}]$ を以下で定める:

$$f_1(x,y) := t, \quad f_2(x,y) := 1-t.$$

このとき $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ は Alexander pair であり, $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ は twisted rack homology group $H_n^{\mathrm{TR}}(Q)$ [3] と一致する.

4. Main results

本節では主結果について述べる.

定理 9. 写像 $\partial_2' : M(k,k;R)^m \to M(k,k;R)^n$ と $\partial_1' : M(k,k;R)^n \to M(k,k;R)$ を次で定める:

$$\partial_2'(\boldsymbol{a}) := \boldsymbol{a}A(Q,\rho;f_1,f_2), \quad \partial_1'(\boldsymbol{a}) := \boldsymbol{a}\begin{pmatrix} f_2(\rho(x_1)\bar{*}c,c) \\ \vdots \\ f_2(\rho(x_n)\bar{*}c,c) \end{pmatrix}.$$

このとき $\partial'_1 \circ \partial'_2 = 0$ であり, $H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \cong \mathrm{Ker}(\partial'_1)/\mathrm{Im}(\partial'_2)$ かつ $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) \cong M(k,k;R)/\mathrm{Im}(\partial'_1)$ が成り立つ.

証明の概略. $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset Q$ を基底とする自由 $M(k,k;R)$ 加群を $C_1(S)$ と書き, $C_1(S)$ を $C_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q)$ の部分加群とみなす. 境界準同型の定義から $C_1(S) \cong M(k,k;R)^n$ という同一視の元で $\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}|_{C_1(S)} = \partial'_1$ が得られる. また Q が有限表示を持つことから以下が示せる.

(1) $\mathrm{Im}(\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}) = \mathrm{Im}(\partial'_1)$.

(2) 合成写像 $\mathrm{Ker}(\partial'_1) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}) \twoheadrightarrow H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q) = \mathrm{Ker}(\partial_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho})/\mathrm{Im}(\partial_2^{\boldsymbol{f}\circ\rho})$ は全射.

(3) (2) の合成写像の核は $\mathrm{Im}(\partial'_2)$.

以上のことから主張が従う. □

つづいて R は単項イデアル整域であると仮定する. M を有限生成左 R 加群としたとき, 有限個の R の元 $e_1, \ldots, e_s$ が存在して $M \cong \oplus_{i=1}^{s} R/(e_i)$ が成り立つ, ここで (e_i) は e_i が生成する R のイデアルを表している. このとき積 $e_1 \cdots e_s$ を M の **order** と呼ぶ. M の order は R の単元倍を除いて一意に定まることに注意する.
$V = R^k$ を左 R 加群かつ右 $M(k,k;R)$ 加群とみなして $H_n^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ を考える. このとき $H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ と $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ は有限生成左 R 加群なので $\mathrm{order}(H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))$ と $\mathrm{order}(H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))$ が定義できる.

定理 10. $\det(f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)) \neq 0$ を満たす i が存在するならば $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ がねじれ元のみからなる[1]. さらに

$$\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c) \doteq \frac{\mathrm{order}(H_1^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))}{\mathrm{order}(H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V))}$$

が成り立つ.

証明の概略. 任意の j に対して $\mathrm{Coker}(R^k \to R^k; \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a} f_2(\rho(x_j)\bar{*}c, c))$ から $H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ への全射が存在する. ここで $\det(f_2(\rho(x_i)\bar{*}c, c)) \neq 0$ を満たす i が存在するならば $\mathrm{Coker}(R^k \to R^k; \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a} f_2(\rho(x_j)\bar{*}c, c))$ はねじれ元のみからなることから定理の前半は従う. 後半は [11] の定理 4.1 と同じ流れで示すことが出来る. □

注意 11. [7] では **column relation map** と呼ばれる概念を用いて quandle の twisted Alexander invariant $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2), R_{\mathrm{col}}(Q,\rho;\boldsymbol{f}_{\mathbf{col}}))$ を定義している. 本稿で扱っている $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2),c)$ は $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2), R_{\mathrm{col}}(Q,\rho;\boldsymbol{f}_{\mathbf{col}}))$ の特別な場合である.

3 節の homology group を column relation map を用いて拡張することによって [7] で定義された quandle の twisted Alexander invariant $\Delta(A(Q,\rho;f_1,f_2), R_{\mathrm{col}}(Q,\rho;\boldsymbol{f}_{\mathbf{col}}))$ に対しても定理 10 が成り立つことが示せる.

---

[1] 講演では「$H_0^{\boldsymbol{f}\circ\rho}(Q;V)$ がねじれ元のみからなるならば $\det(f(\rho(x_i)\bar{*}c, c)) \neq 0$ を満たす i が存在する」と述べましたが, 上の主張が正しいです。間違ったことを述べてしまい, 誠に申し訳ありませんでした.

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった世話人の先生方にお礼申し上げます. また講演を聞いていただいた全ての方に改めて感謝を申し上げます.

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch and M. Graña, *From racks to pointed Hopf algebras*, Advances in Mathematics **178** (2003), no. 2, 177–243.

[2] J. S. Carter, M. Elhamdadi, M. Graña, and M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005), no. 3, 499–541. MR2166720

[3] J. S. Carter, M. Elhamdadi, and M. Saito, *Twisted quandle homology theory and cocycle knot invariants*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 95–135. MR1885217

[4] R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 04, 343–406.

[5] R. Fenn, C. Rourke, and B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), no. 4, 321–356. MR1364012

[6] ______, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 2, 701–740. MR2255194

[7] A. Ishii and K. Oshiro, *Quandle twisted Alexander invariants.* preprint.

[8] ______, *Twisted derivatives with Alexander pairs for quandles.* preprint.

[9] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.

[10] S. Kamada, *Surface-knots in 4-space. An introduction*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017.

[11] P. Kirk and C. Livingston, *Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson–Gordon invariants*, Topology **38** (1999), no. 3, 635–661.

[12] X. S. Lin, *Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), no. 3, 361–380.

[13] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. **161** (1982), no. 1, 78–88.

[14] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), no. 2, 241–256.