

Multiple conjugation quandle coloring quivers of handlebody-links

上田 涼太郎 (大阪大学大学院理学研究科)*

概要

古典絡み目の不変量である quandle coloring quiver が S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された。我々は multiple conjugation quandle (MCQ) を用いた彩色を考えることで、Nelson-Cho の quandle coloring quiver の類似の概念として、quiver に値をもつハンドル体絡み目の不変量を構成した。この不変量の定義と性質について講演する。

1 ハンドル体絡み目

ハンドル体 (handlebody) とは、3 次元球体 $\mathbb{B}^3$ にいくつかの 1-ハンドル $\mathbb{D}^2 \times I$ をつけて得られる向き付け可能な 3 次元多様体のことである。ハンドル体を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだ像のことを、ハンドル体結び目 (handlebody-knot) という [1]。また、いくつかのハンドル体を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込んだ像のことを、ハンドル体絡み目 (handlebody-link) という。

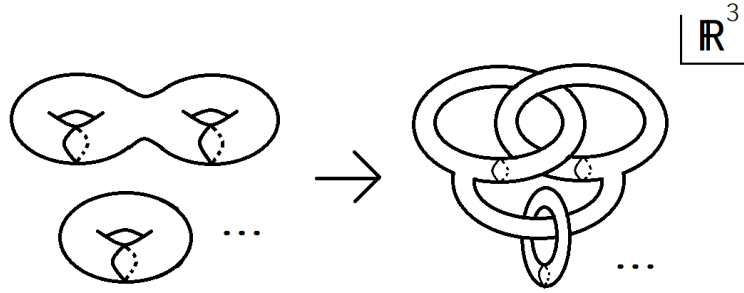


図 1 ハンドル体絡み目。

2 つのハンドル体絡み目 H, H' が同値 (equivalent) であるとは、 $\mathbb{R}^3$ の向きを保つ自己同相写像 f が存在して $f(H) = H'$ が成り立つことであり、このとき $H \sim H'$ と書く。空間 3 価グラフ (spatial trivalent graph) とは、 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた 3 価グラフのことである。円周 S^1 は正確にはグラフではないが、本論文では S^1 の埋め込みも空間 3 価グラフとみなす。そして、 S^1 の埋め込みは空間 3 価グラフの 1 つの辺と考える。空間 3 価グラフの Y-向き付け (Y-orientation) とはすべての頂点での入次数、出次数が共に 1 以上になるように空間 3 価グラフの各辺に向きを入れることである (図 2)。ただし、有向空間 3 価グラフの頂点において、入次数とはその頂点に入る向きを持った辺の数をいい、出次数とはその頂点から出る向きを持った辺の数をい

* e-mail:u081574k@ecs.osaka-u.ac.jp

う. 任意の空間 3 価グラフは 1 つ以上の Y-向き付けを持っている.

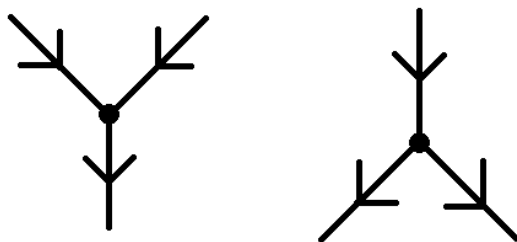
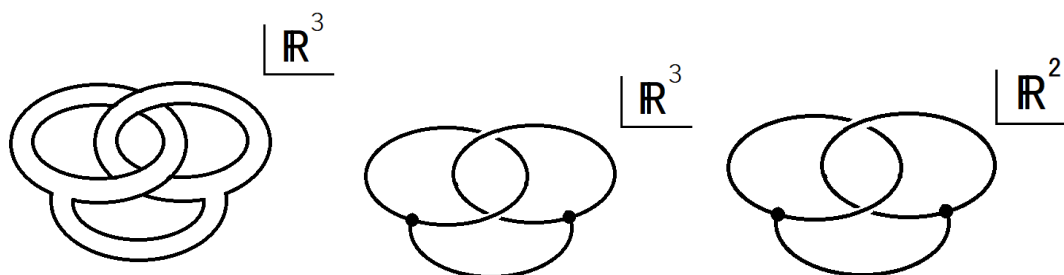


図 2 Y-向き付け.

空間 3 価グラフ K とハンドル体絡み目 H に対して, H が K の正則近傍となっているとき K は H を表す (represent) という. ハンドル体絡み目 H のダイアグラム (diagram) を, H を表す空間 3 価グラフ K のダイアグラムとする.



ハンドル体結び目 H

H を表す空間 3 価グラフ K

H の ダイアグラム

このとき次の定理が成り立つ.

定理 1.1 ([1]). D, D' をそれぞれハンドル体絡み目 H, H' のダイアグラムとする. このとき, H と H' が同値であることの必要十分条件は, D と D' が有限回の R1 – R6 変形 (図 3) で移り合うことである.

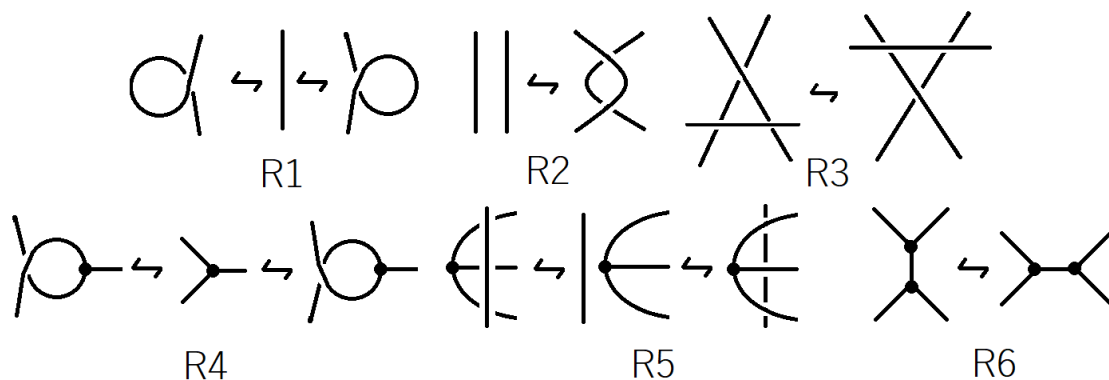


図 3 R1 – R6 変形.

2 多重共役カンドル

まず初めに, カンドルの定義を紹介する.

定義 2.1 ([5, 7]). 空でない集合 Q 上の 2 項演算 $*$: $Q \times Q \rightarrow Q$; $(x, y) \mapsto x * y$ が次の 3 つの条件を満たすとき, 組 $(Q, *)$ をカンドル (**quandle**) という. 以後, $(Q, *)$ を単に Q と書く.

1. 任意の $x \in Q$ に対して, $x * x = x$.
2. 任意の $x, y \in Q$ に対して, $z * y = x$ となる $z \in Q$ が唯一存在する.
3. 任意の $x, y, z \in Q$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

カンドルは結び目理論におけるライデマイスター変形を背景に導入された. 以後, カンドルは有限とする.

例 2.2. n を自然数, Q を巡回群 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする. このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x * y = 2y - x$ と定めると Q はカンドルになる. このカンドルを位数 n の **2 面体カンドル (dihedral quandle)** と呼び, R_n と書く.

ここで, カンドル Q の型 (**type**) を

$$\text{Type}(Q) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x *^n y = x \ (\forall x, y \in Q)\}$$

とする. ただし, $x *^n y$ とは $(\cdots (\overbrace{x * y}^n) * y \cdots) * y$ のことである. 任意の有限カンドルは有限の型をもつ. 次に, 多重共役カンドルの定義を紹介する.

定義 2.3 ([2]). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は空でない群 $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ の非交和であって, 2 項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$; $(x, y) \mapsto x * y$ が次の 4 つの条件を満たすとき, 組 $(X, *)$ を**多重共役カンドル (MCQ)** という. 以後, $(X, *)$ を単に X と書く.

1. 任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $a * b = b^{-1}ab$.
2. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $x * e_\lambda = x$ かつ $x * (ab) = (x * a) * b$. ここで, e_λ は G_λ の単位元である.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.
4. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $(ab) * x = (a * x)(b * x)$. ここで, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a * x, b * x \in G_\mu$ を満たす.

多重共役カンドルはハンドル体結び目理論における R1 – R6 変形を背景に導入された. 以後, 多重共役カンドルは有限とする.

$X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, $f: X \rightarrow X$ を写像とする. 任意の $x, y \in X$ に対して, $f(x * y) = f(x) * f(y)$ が成り立ち, さらに任意の $\lambda \in \Lambda$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つとき, f を**多重共役カンドル自己準同型写像** という. また, X のカンドル自己準同型写像全体の集合を $\text{End}(X)$ と書く.

Q をカンドルとする. このとき, $Q \times \mathbb{Z}_{\text{Type}(Q)} = \bigsqcup_{x \in Q} (\{x\} \times \mathbb{Z}_{\text{Type}(Q)})$ は次の演算で多重共役カンドルとなる.

$$(x, a) * (y, b) = (x *^b y, a) \quad (x, y \in Q, a, b \in \mathbb{Z}_{\text{Type}(Q)})$$

$$(x, a)(x, b) = (x, a + b) \quad (x \in Q, a, b \in \mathbb{Z}_{\text{Type}(Q)})$$

これを Q の付随多重共役カンドル (associated MCQ) という.

命題 2.4. p を任意の奇素数, $X_p = R_p \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_p} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 p の 2 面体カンドルの付随多重共役カンドル とする. このとき, 次が成立する.

$$\text{End}(X_p) = \{f : X_p \rightarrow X_p, f(x, i) = (ax + b, i) \mid a, b \in \mathbb{Z}_p\} \cup \{f : X_p \rightarrow X_p, f(x, i) = (c, 0) \mid c \in \mathbb{Z}_p\}.$$

3 多重共役カンドル彩色

ハンドル体絡み目のダイアグラムに対して, 多重共役カンドルによる彩色を紹介する. D をハンドル体絡み目 H のダイアグラムとする. このとき, D の弧 (arc) とは D の各連結成分を頂点でさらに区切ったものと定める. D のアーク全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と書く.

定義 3.1 ([2]). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. このとき, D の各交点と各頂点で図 4 の条件を満たす写像 $c : \mathcal{A}(D) \rightarrow X$ を X による彩色 (coloring) または X -彩色 (X -coloring) という. また, D の X -彩色全体の集合を $\text{Col}_X(D)$ と書く.

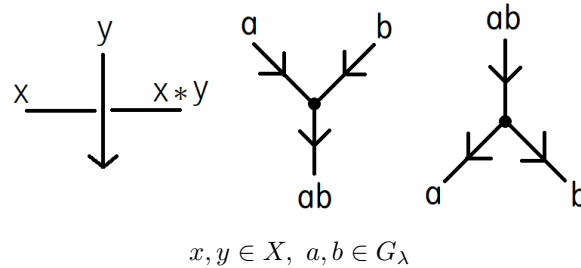


図 4 彩色条件.

このとき, 次の命題が成立する.

命題 3.2 ([2]). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D と D' を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. このとき, 2 つのハンドル体絡み目ダイアグラム D と D' が同値なハンドル体絡み目を表すならば, $\text{Col}_X(D)$ と $\text{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に, X が有限多重共役カンドルならば, $\text{Col}_X(D)$ は有限であり, その位数 $|\text{Col}_X(D)|$ はハンドル体絡み目の不変量である. この不変量を多重共役カンドル彩色数 (MCQ coloring number) という.

4 多重共役カンドル彩色クイバー

古典絡み目の不変量であるカンドル彩色クイバー (quandle coloring quiver) が S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された [6]. 我々は多重共役カンドル彩色を考えることで, カンドル彩色クイバーの類似の概念

として、クイバーに値をもつハンドル体絡み目の不変量である多重共役カンドル彩色クイバーを定義した。この不変量の定義を紹介する。

定義 4.1 (U). $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする。このとき, 任意の $S \subset \text{End}(X)$ に対して, 次で定義される V と E をそれぞれ頂点集合と辺集合, s と t をそれぞれソース写像, ターゲット写像によって定められるクイバーを多重共役カンドル彩色クイバー (MCQ coloring quiver) といい, $Q_{X,S}^{\text{MCQ}}(D)$ と書く。

- $V = \text{Col}_X(D)$.
- $E = \{(v, w, f) \in V \times V \times S \mid w = f \circ v\}$.
- $s : E \rightarrow V; s((v, w, f)) = v$.
- $t : E \rightarrow V; t((v, w, f)) = w$.

補題 4.2. $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を多重共役カンドル, D を Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする。このとき, 任意の $c \in \text{Col}_X(D)$ と任意の $f \in \text{End}(X)$ に対して, $f \circ c \in \text{Col}_X(D)$ である。

例 4.3. D を図 5 のような Y-向き付けされたハンドル体結び目のダイアグラム, $X_3 = R_3 \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_3} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 3 の 2 面体カンドル R_3 の付随多重共役カンドルとする。 X_3 による D の多重共役カンドル彩色は以下の 18 通りである。ただし, a, b は R_3 の任意の元である。

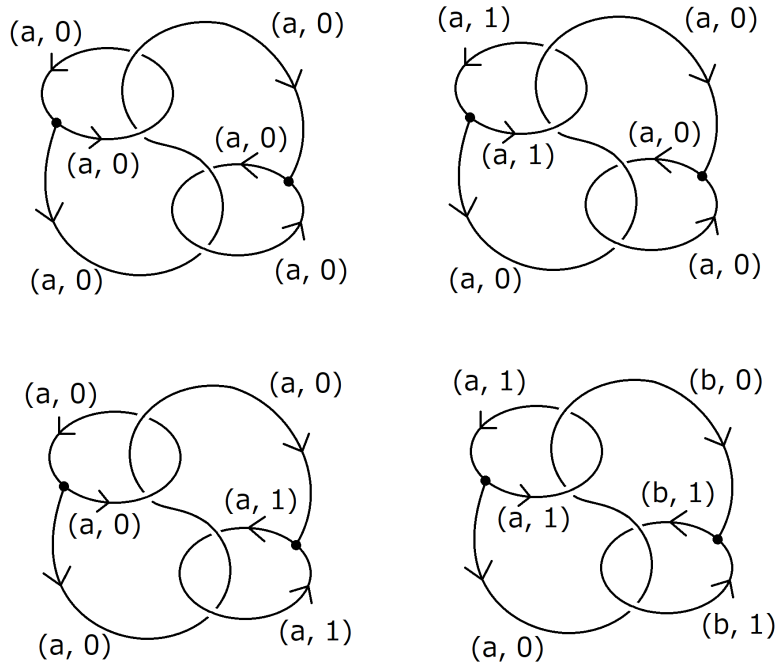


図 5 Y-向き付けされたハンドル体結び目のダイアグラムの X_3 -彩色。

ここで, $f \in \text{End}(X_3)$ を $f(x, i) = (0, i)$ で定める。このとき, D の各彩色に f を合成した関係を描いたのが次の図 6 である。

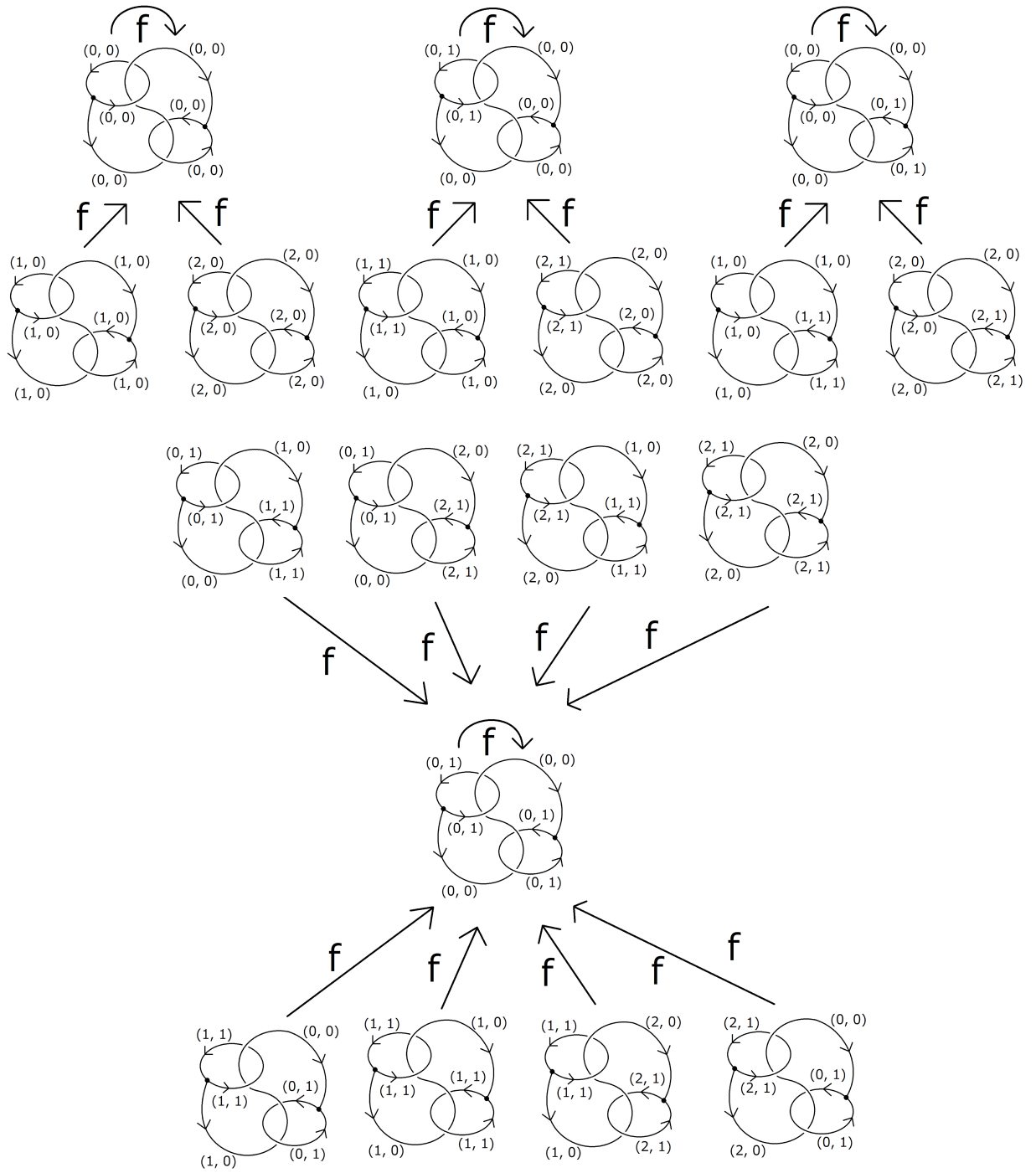


図6 X_3 -彩色に f を合成したもの.

つまり, $S = \{f\}$ としたときの多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X_3, S}^{\text{MCQ}}(D)$ は図 7 のクイバーである.

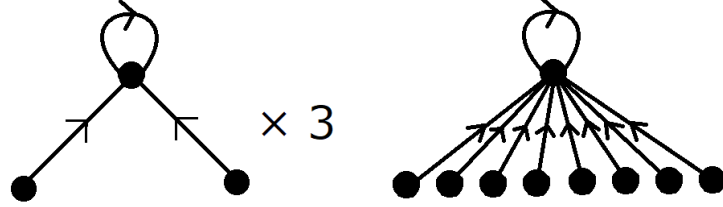


図 7 $Q_{X_3, S}^{\text{MCQ}}(D)$.

5 主定理

多重共役カンドル彩色クイバーの性質について紹介する.

定理 5.1 (U). 2 つの Y-向き付けされたハンドル体絡み目ダイアグラム D と D' が同値なハンドル体絡み目を表すならば, 任意の多重共役カンドル X と, 任意の $S \subset \text{End}(X)$ に対して, それらの多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X, S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X, S}^{\text{MCQ}}(D')$ はクイバーとして同型である.

定理 5.1 より多重共役カンドル彩色クイバーはハンドル体絡み目の不変量であることが分かる.

定義から多重共役カンドル彩色クイバーは多重共役カンドル彩色数と同等もしくはより強力なハンドル体絡み目の不変量であるが, 実際に, より強力な場合の例を次で与える.

例 5.2. D と D' を図 8 の Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. $X_3 = R_3 \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_3} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 3 の 2 面体カンドル R_3 の付随多重共役カンドルとする. X_3 による D と D' の多重共役カンドル彩色数は共に 60 である.

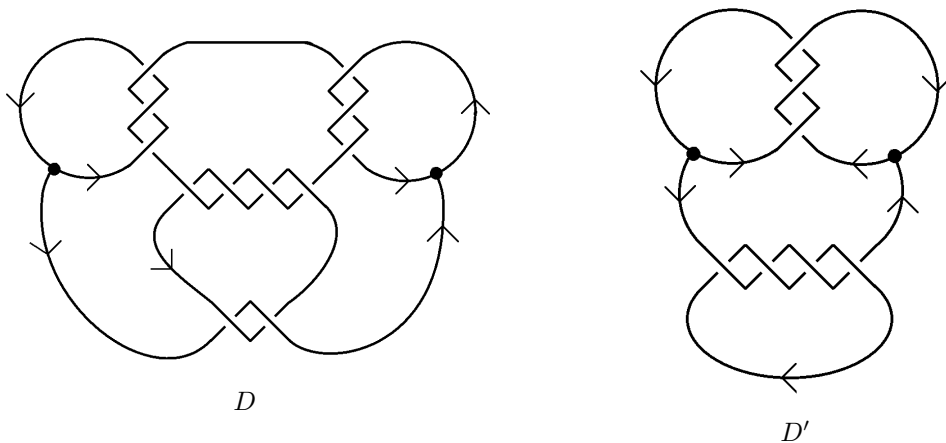


図 8 Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラム.

ここで, $f \in \text{End}(X_3)$ を $f(x, i) = (0, i)$ で定める. $S = \{f\}$ とし, 多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X_3, S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_3, S}^{\text{MCQ}}(D')$ を考えると, それらは次のクイバーである.

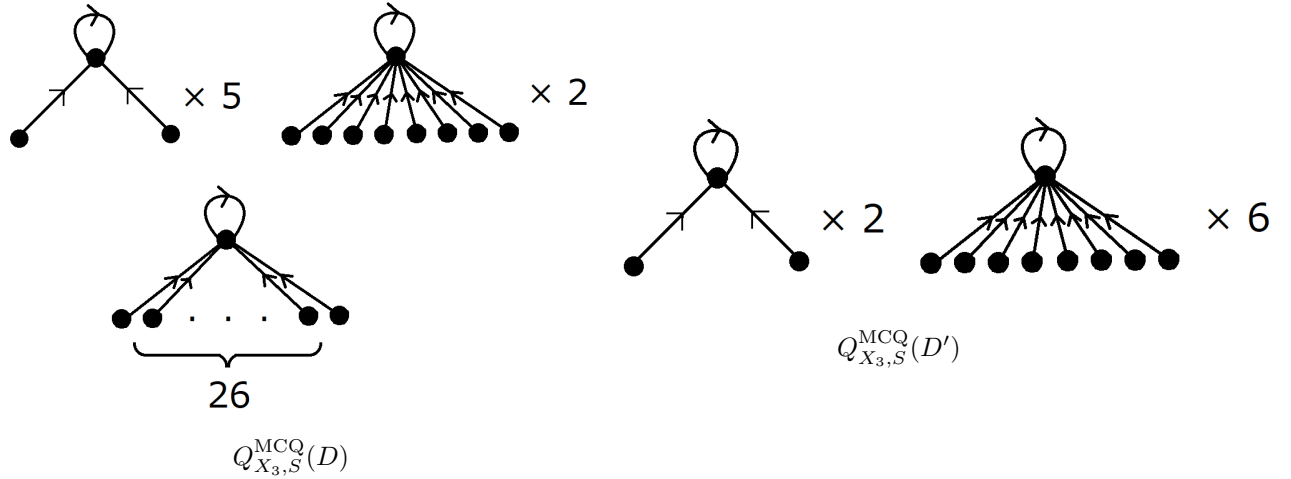


図9 $Q_{X_3, S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_3, S}^{\text{MCQ}}(D')$ は同型でない.

図9より, D と D' は同値なハンドル体絡み目ではない.

また, $f' \in \text{End}(X_3)$ を $f'(x, i) = (x + 1, i)$ で定める. $S' = \{f'\}$ とし, 多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X_3, S'}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_3, S'}^{\text{MCQ}}(D')$ を考えると, それらは次のクイバーである.



図10 $Q_{X_3, S'}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_3, S'}^{\text{MCQ}}(D')$ は同型である.

つまり, $\text{End}(X_3)$ の部分集合 S の選び方によって D と D' が同値でないか分からない場合もある.

上の例はハンドル体絡み目であるが, ハンドル体結び目や, 多重共役カンドルが2面体カンドルの付随多重共役カンドル以外の場合でもこのような例が存在する.

また, 多重共役カンドル彩色クイバーに対して次の性質が得られた.

定理 5.3 (U). D と D' を成分数が等しく, 全種数が n である Y-向き付けされたハンドル体絡み目ダイアグラムとする. また, p を任意の $p \geq 2^n - 1$ を満たす奇素数, $X_p = R_p \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_p} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数

p の 2 面体カンドルの付随多重共役カンドルとする. このとき, $|\text{Col}_{X_p}(D)| = |\text{Col}_{X_p}(D')|$ ならば, 任意の $S \subset \text{End}(X_p)$ に対して, それらの多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X_p, S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_p, S}^{\text{MCQ}}(D')$ はクイバーとして同型である.

また定理 5.3 より, 次の系が導かれた.

系 5.4 (U). D と D' を種数が 2 のハンドル体結び目ダイアグラムとする. また, p を任意の奇素数, $X_p = R_p \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_p} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 p の 2 面体カンドルの付随多重共役カンドルとする. このとき, $|\text{Col}_{X_p}(D)| = |\text{Col}_{X_p}(D')|$ ならば, 任意の $S \subset \text{End}(X_p)$ に対して, それらの多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X_p, S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_p, S}^{\text{MCQ}}(D')$ はクイバーとして同型である.

定理 5.3 における $p \geq 2^n - 1$ の仮定は本質的である. 特に全種数が 3 の Y-向き付けされたハンドル体絡み目の場合, $p = 5$ とすると, 定理 5.3 が成り立たない場合の例を次で与える.

例 5.5. D と D' を図 11 の種数が 3 の Y-向き付けされたハンドル体絡み目のダイアグラムとする. $X_5 = R_5 \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_5} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2)$ を位数 5 の 2 面体カンドル R_5 の付随多重共役カンドルとする. X_5 による D と D' の多重共役カンドル彩色数は共に 200 である.

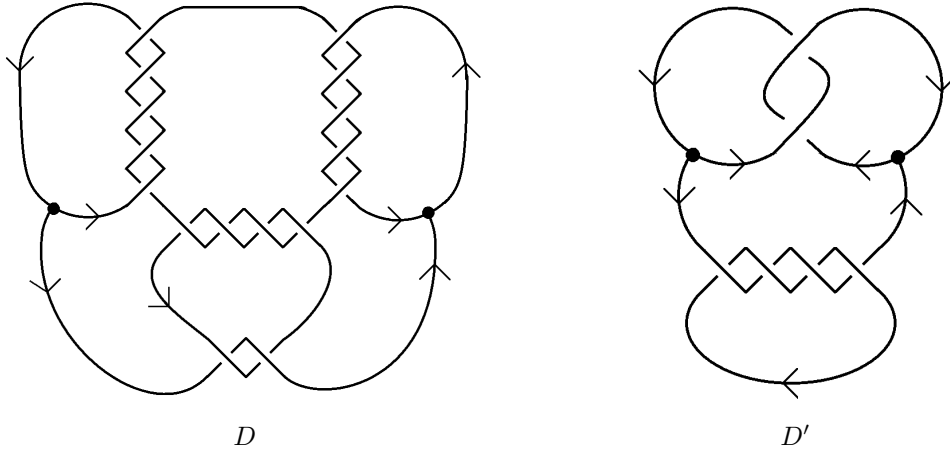


図 11 種数が 3 の Y-ori 付けされたハンドル体絡み目のダイアグラム.

ここで, $f \in \text{End}(X_5)$ を $f(x, i) = (0, i)$ で定める. $S = \{f\}$ とし, 多重共役カンドル彩色クイバー $Q_{X_5, S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_5, S}^{\text{MCQ}}(D')$ を考えると, それらは次のクイバーである.

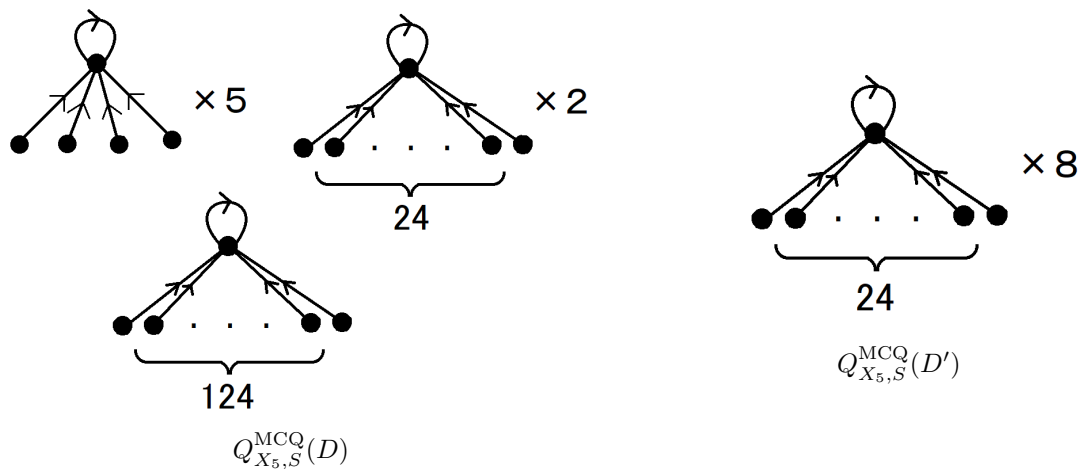


図 12 $Q_{X_5,S}^{\text{MCQ}}(D)$ と $Q_{X_5,S}^{\text{MCQ}}(D')$ は同型でない.

例 5.5 より, 定理 5.3 における $p \geq 2^n - 1$ の仮定は本質的であることが分かる.

参考文献

- [1] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 1403–1418.
- [2] A. Ishii, *A multiple conjugation quandle and handlebody-knots*, Topology Appl. **196** (2015), 492–500.
- [3] A. Ishii, *The Markov theorems for spatial graphs and handlebody-knots with Y-orientations*, Internat. J. Math. **26** (2015), 1550116, 23 pp.
- [4] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi and M. Suzuki, *A table of genus two handlebody-knots up to six crossings*, J. Knot Theory Ramifications **21** (2012), 1250035, 1–9.
- [5] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Alg. **23** (1982), 37–65.
- [6] K. Cho and S. Nelson. *Quandle coloring quivers*. J. Knot Theory Ramifications. **28** (2019), no. 1, 1950001, 12pp.
- [7] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mt. Sb. (N. S.) **119** (161) (1982), 78–88.
- [8] Y. Taniguchi, *Quandle coloring quivers of links using dihedral quandles*. J. Knot Theory Ramifications. **30** (2021), no. 2, 2150011.