

一葉双曲面上のカンドルと longitudinal map

九州大学大学院 数理学府 博士 2 年

米村 拳太郎 *

概要

一葉双曲面上に定義されたカンドルの構造と、それに関係した結び目の不変量 “longitudinal map” について述べる。この文献で省略した部分は、著者の preprint [14] を参照されたい。

1 カンドル

この節では、この文献を読む際に必要なカンドルに関する概念を述べる。詳細に関しては、野坂 [10] や鎌田 [8] を参照されたい。

まず、カンドルの定義を述べる。

定義 1.1 (カンドル [7, 9]) カンドル (quandle) とは空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \rightarrow X$ の組 (X, \triangleright) で次の Q1~Q3 の条件を満たすものである：

Q1 (冪等性) 任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。

Q2 (逆元) 任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。

Q3 (自己分配性) 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

定義 1.1 における条件 Q1~Q3 は、それぞれ Reidemister 移動 I~III と呼ばれる、結び目の射影図に対する操作に対応していることが知られている。

いくつかカンドルの例を挙げておこう。

例 1.2 (二面体カンドル [12]) $X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とし、二項演算 \triangleright を

$$x \triangleright y = 2y - x$$

と定めると、 (X, \triangleright) はカンドルとなる。このカンドルは二面体カンドルと呼ばれている。

例 1.3 (共役カンドル) G を群とし、二項演算 \triangleright を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

と定めると、 (G, \triangleright) はカンドルとなる。このカンドルは共役カンドルと呼ばれている。

以下、カンドル準同型について述べ、この節を終わる。

定義 1.4 (カンドル準同型とカンドル同型) X, Y をカンドルとすると、写像 $f : X \rightarrow Y$ が

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

* Email:3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp

を満たすとき、カンドル準同型写像という。特に、カンドル準同型写像 f が全単射であるとき、カンドル同型写像という。

2 この文献で扱う一葉双曲面上に定義されたカンドル

この文献で主に扱うカンドルを構成する。

命題 2.1 $r > 0$ とする。 $S_1^2(r)$ を

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

に関する $SL(2, \mathbb{R})$ の共役類とする。このとき、二項演算 $\triangleright: S_1^2(r) \times S_1^2(r) \rightarrow S_1^2(r)$ を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

として定めると $(S_1^2(r), \triangleright)$ はカンドルとなる。

この文献では、命題 2.1 で構成したカンドルも単に $S_1^2(r)$ と表すことにする。 $S_1^2(r)$ は一葉双曲面と微分同相であることを注意されたい。

次の見方から $S_1^2(r)$ は既知のカンドルである。

- $S_1^2(r)$ は $SL(2, \mathbb{R})$ に関する共役カンドルの部分カンドルである。
- 石川 [6] により 2 次元の smooth quandle (多様体としての構造を併せ持つカンドル) の分類が完了している。

3 幾何学的形状とカンドル構造

前節で構成したものとは異なる方法で一葉双曲面上にカンドルを構成し、それが前節で構成したカンドルと同型でないことを述べる。これにより、幾何学的な構造が同じでも、性質の全く異なるカンドル構造が入ることが分かる。

この節では双線形形式 $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ をある種の Minkowski 内積

$$\langle (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$$

とする。

定義 3.1 一葉双曲面 $S_1^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ 上に二項演算 $\triangleright: S_1^2(r) \times S_1^2(r) \rightarrow S_1^2(r)$ を

$$\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y} = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

と定めると、 (S_1^2, \triangleright) はカンドルとなる。このカンドルを $S_{1\mathbb{R}}^2$ と表わすことにする。

次の命題により、 $S_1^2(r)$ と $S_{1\mathbb{R}}^2$ は幾何的な構造は一致するが、カンドルとして同型ではない。証明は省略する。

命題 3.2 $S_{1\mathbb{R}}^2$ は対合性

$$\forall x, y, \quad (x \triangleright y) \triangleright y = x$$

を満たすが、任意の $r > 0$ に対して $S_1^2(r)$ は対合性を満たさない。

注意 3.3 この節を設けたのは、Azcan-Fenn[1]の「球面カンドル」の構成と、Clark-Saito[3]の「球面カンドル」の構成が、同じ名前がついているにもかかわらず、全く異なっていたことに起因する。この場合には、偶然にも整合性が取れている。詳細は [13] を参照。

4 longitudinal map に関するカンドルを用いた結び目の不変量

この文献の目的のひとつとして、longitudinal map の具体例を計算することがある。まず、longitudinal map の定義を述べよう。

定義 4.1 (longitudinal map[3]) K を結び目、 G を群とする。さらに、 $m, l \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ をそれぞれ K のメリディアンとロンジチュードとする。 $x \in G$ をひとつ決めるとき、写像

$$\mathcal{L}_G^x : \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) : f(m) = x\} \rightarrow G \quad f \mapsto f(l)$$

を longitudinal map という。

この節では、定義 4.1 で述べた longitudinal map が生まれた経緯を述べる。

1999 年、Carter ら [2] により、カンドルコサイクル不変量が構成された。これは、極めて強力な結び目の不変量である。著名な応用として、井上-蒲谷 [5] による双曲結び目の複素体積のカンドルコサイクル不変量による実現が知られている。カンドルコサイクル不変量の難点は、

- 考えるカンドルの 2 コサイクルを具体的に分岐しなければならない
- 考えるカンドルによる彩色を全て記述する必要があり、そのために考えるカンドルの集合としての濃度が有限であることが望ましい

ことである。

2007 年、Eisermann[4] は colouring polynomial を構成した。この結び目の不変量の良いところは、考えているカンドルの 2 コサイクルを具体的に分かる必要がないことである。さらに、

- colouring polynomial はカンドルコサイクル不変量の真の拡張である。つまり、カンドルコサイクル不変量で見分けられる結び目は colouring polynomial で見分けられる。
- colouring polynomial は Yang-Baxter 不変量として実現できる。

ことが Eisermann 自身により証明されている。

2019 年、Clark-Saito[3] は、colouring polynomial を集合としての濃度が有限でないカンドルに対しても定義することが出来る不変量へ拡張するため、longitudinal map を構成した。

5 $(2, n)$ 型トーラス結び目の $S_1^2(r)$ による彩色

結び目 K とその射影図 D 、そしてカンドル X が与えられたとき、写像

$$C : \{D \text{ の弧全体} \} \rightarrow X$$

でカンドル準同型 $f : Q_K \rightarrow X$ を誘導するものを、 X による D の彩色という。ここでの Q_K は、結び目カンドルと呼ばれる K に対して定まるカンドルである。 X による D の彩色全体を $\text{Col}_X(D)$ とかく。結び目の射影図 D によって $\text{Col}_X(D)$ は異なるが、その濃度は一致することが知られている。

この節では、 $S_1^2(r)$ による彩色を述べる。

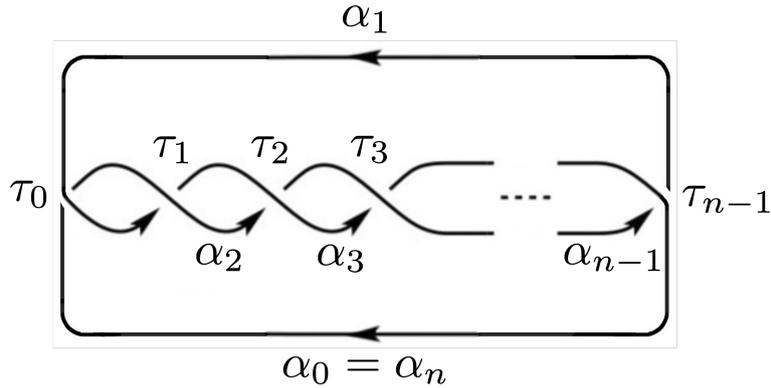


図1 (2, n) 型トーラス結び目の射影図

定理 5.1 図1のような射影図 D を持つ (2, n) 型トーラス結び目の彩色は

$$\text{Col}_{S_1^2(r)}(D) = \bigcup_{f \in \text{Inn } SL(2, \mathbb{R})} \{f \circ C_0\} \cup \left\{ f \circ C_{j,b,c} : \begin{array}{l} j = 1, 3, \dots, n-2 \\ bc = -\frac{4 \sin^2 \theta_j (\sin^2 \theta_j + \sinh^2 r)}{\sinh^2 r} \end{array} \right\}$$

である。

記号の説明と証明は省略する。証明のポイントは、行列の対角化によって冪乗を具体的に求めることができることである。彩色を計算するときに学部で習う線形代数が前面に出るのは、実は珍しいことである。

著者は「線形代数の恩恵を受け易いため、この文献で扱ってるような smooth quandle (多様体構造を併せ持つカンドル) について研究をしよう」という PR を行っている。この文献を読んで興味を持っていただけたら幸いである。

6 $S_1^2(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現の関係

$r > 0$, K を結び目とする。 $SL(2, \mathbb{R})$ における

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

と共役な元を、この文献では双曲元ということにする。

定義 6.1 (双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現) $\mathfrak{m} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ とする。このとき、表現 $f : \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ に対して、 $f(\mathfrak{m})$ が双曲元であるとき、双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現とこの文献ではいうことにする。

野坂 [11] の結果を用いることにより、 $S_1^2(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2, \mathbb{R})$ 表現の間には、自然な 1 対 1 対応が得られる。

定理 6.2 K を結び目、 D を K の射影図、そして $r > 0$ とする。このとき、1 対応 1 対応

$$\Psi_{K,r} : \text{Col}_{S_1^2(r)}(D) \xrightarrow{\sim} \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2, \mathbb{R})) : f \text{ は双曲表現}\}$$

を具体的に構成することが出来る。

さらに、系として、次の自然な対応が誘導される。

系 6.3 K を図のような射影図 D を持つ $(2, n)$ 型トーラス結び目とし、 K のメリディアン \mathbf{m} を α_0 とする。このとき、 $\Psi_{K,r}$ から次のような 1 対 1 対応が誘導される。

$$\{C \in \text{Col}_{S^2_1(r)}(D) : C(\alpha_0) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\} \simeq \{f \in \text{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2, \mathbb{R})) : f(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\}$$

7 $(2, n)$ 型トーラス結び目の $SL(2, \mathbb{R})$ -longitudinal map の計算例

定義 4.1 において、 K を $(2, n)$ 型トーラス結び目、 $G = SL(2, \mathbb{R})$ 、そして

$$x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

とした場合の計算例を述べる。ただし、 $r > 0$ とする。

補題 7.1 定理 5.1 の記号を用いる。 $u_0 = C_{j,b,c}(\alpha_0)$ 、 $u_1 = C_{j,b,c}(\alpha_1)$ とする。このとき、

$$(u_0 u_1)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

定理 7.2 系 6.3 の対応を考えると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G^x(\Psi_{K,r}(C_0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_G^x(\Psi_{K,r}(C_{j,b,c})) &= \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

証明 $k \geq 1$ を用いて、 $n = 2k + 1$ とする。ここでは、結び目群は Wirtinger 表示という、図式の弧を生成元とするような、図式から得られる表示で表されているとする。 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を用いて、ロングitudナル $\mathfrak{l} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-n}(\alpha_1 \alpha_3 \cdots \alpha_{2k-1})(\alpha_0 \alpha_2 \cdots \alpha_{2k})$$

と表せる。このとき、[3, Lemma 6.3] の証明と同様の議論を行うことで、

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-2n}(\alpha_0 \alpha_1)^n$$

であることが従う。これを用いて、longitudinal map $\mathcal{L}_G^x(f)$ を計算する。

($f = \Psi_{K,r}(C_0)$ のとき)

$$C_0(\alpha_0) = C_0(\alpha_1) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$$

より、

$$\mathcal{L}_G^x(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} \left(\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

($f = \Psi_{K,r}(C_{j,b,c})$ のとき) 補題 7.1 より、

$$\mathcal{L}_G^x(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}$$

である。

謝辞

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2136 の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] Hiiseyin Azcan and Roger Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 18, pp. 102–110, 1994.
- [2] J Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 355, No. 10, pp. 3947–3989, 2003.
- [3] W. Edwin Clark and Masahico Saito. Longitudinal mapping knot invariant for $SU(2)$. *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 27, No. 11, pp. 1843014, 22, 2018.
- [4] Michael Eisermann. Knot colouring polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 231, No. 2, pp. 305–336, 2007.
- [5] Ayumu Inoue and Yuichi Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, No. 1, pp. 265–292, 2014.
- [6] Katsumi Ishikawa. On the classification of smooth quandles. *preprint*.
- [7] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.
- [8] Seiichi Kamada. *Surface-knots in 4-space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. An introduction.
- [9] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 119(161), No. 1, pp. 78–88, 160, 1982.
- [10] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs; Symmetry, knots, and cohomology*. SpringerBriefs in Mathematics.
- [11] Takefumi Nosaka. Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles. *Topology Appl.*, Vol. 193, pp. 1–30, 2015.
- [12] Mituhisa Takasaki. Abstraction of symmetric transformations. *Tôhoku Math. J.*, Vol. 49, pp. 145–207, 1943.
- [13] Kentaro Yonemura. Note on spherical quandles. *arXiv preprint arXiv:2104.04921*, 2021.
- [14] Kentaro Yonemura. Quandles over a hyperboloid of one sheet and the longitudinal mapping knot invariant for $SL(2, \mathbb{R})$. *preprint*, 2021.