

結び目のシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式

吉田 真治（京都大学数理解析研究所）

概要

結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式が Naruse 氏によって示された [4]. これを背景に Ishikawa 氏は結び目のカンドルコサイクル不変量のケーブル化公式を示した [1]. 本稿ではその一般化であるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式について、二面体カンドルの場合に得られた結果について述べる.

1 準備

この節ではカンドルの定義やシャドーコサイクル不変量の定義を復習する. 詳細は [2] 等を参照されたい. また定理の主張で扱うサテライト結び目を定義する.

1.1 カンドルとタングル図式の彩色

集合 X 上の二つの二項演算 $*, \bar{*} : X \times X \rightarrow X$ が

- (Q1) 任意の $x, y, z \in X$ に対し $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$
- (Q2) 任意の $x, y \in X$ に対し $(x * y) \bar{*} y = (x \bar{*} y) * y = x$
- (Q3) 任意の $x \in X$ に対し $x * x = x$

をみたすとき, $(X, *)$ をカンドルという. またこのとき $(X, \bar{*})$ を双対カンドルといい, $\bar{X}$ と表す. $x \in X$ に対し全単射 $S_x : X \rightarrow X$ を $S_x(y) = y * x$ で定める. このとき集合 $\{S_x | x \in X\}$ で生成される群をカンドル X の内部自己同型群といい $\text{Inn}(X)$ と表す. $\text{Inn}(X)$ が X に推移的に作用するとき, X を連結であるという. 任意の有限カンドル X は $\text{Inn}(X)$ による作用で軌道に分解することを繰り返すことで, 連結カンドルの非交和で表すことができる. $x \in X$ に $S_x \in \text{Inn}(X)$ を対応させる写像が単射のとき, X を忠実であるという.

例 1.1. n を正の整数とし, 集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に二項演算 $*$ を $x * y = 2y - x$ で定めるとこれはカンドルとなる. これを二面体カンドルといい R_n と書く. n が奇数のとき R_n は連結かつ忠実である.

例 1.2. $\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ 上の加群 X に二項演算 $*$ を $x * y = Tx + (1 - T)y$ で定めるとこれはカンドルとなる．これを Alexander カンドルという．特に $X = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[T, T^{-1}]/(T + 1)$ のとき X は二面体カンドルである．

$(X, *)$ をカンドルとする．集合 M が X -集合であるとは，二つの演算 $\triangleleft, \triangleleft: M \times X \rightarrow M$ が

$$(Q1)' \quad \text{任意の } w \in M, x, y \in X \text{ に対し } (w \triangleleft x) \triangleleft y = (w \triangleleft y) \triangleleft (x * y)$$

$$(Q2)' \quad \text{任意の } w \in M, x \in X \text{ に対し } (w \triangleleft x) \triangleleft x = (w \triangleleft x) \triangleleft x = w$$

をみたすときをいう．定義より任意のカンドル X は $\triangleleft = *$ により X -集合となる．

有限個の円周と線分の非交和 $\bigsqcup_n S^1 \sqcup \bigsqcup_m [0, 1]$ の $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ への埋め込みで線分の端点の像が $\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}$ に含まれるものをタングルという．特に S^1 の $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ への埋め込みを結び目という．またタングルの $\mathbb{R} \times [0, 1]$ への射影をタングル図式という．

X をカンドルとし， D をタングル図式とする． D の弧の集合から X への写像 $\mathcal{C}$ で各交点において図 1 の左図のような関係をみたすものを D の X -彩色という． D の全ての X -彩色の集合を $\text{Col}_X(D)$ と表す．

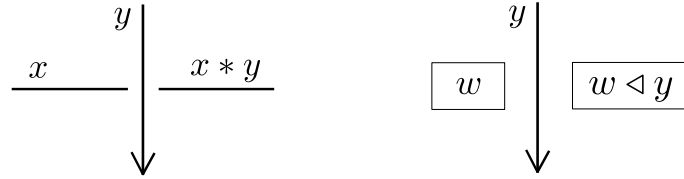


図 1: カンドル彩色とシャドー彩色

M を X -集合とする． D の X -彩色 $\mathcal{C}$ が与えられているとき， D の補空間の各領域に M の元を対応させる写像 $\mathcal{C}^s$ が図 1 の右図の関係をみたすとき， $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^s$ の組を D の M -シャドー X -彩色という． $\mathcal{C}^s$ は十分大きい $x > 0$ に対する $(x, 0)$ を含む非有界領域の色と $\mathcal{C}$ が与えられると，他の全ての領域の色が帰納的に定まる．

1.2 カンドルコサイクル

X をカンドルとし， A をアーベル群とする．写像 $\phi: X^2 \rightarrow A$ に対し $d_2\phi: X^3 \rightarrow A$ を

$$d_2\phi(x, y, z) = \phi(x, z) - \phi(x, y) - \phi(x * y, z) + \phi(x * z, y * z)$$

で定める． $d_2\phi$ をラック 3-コバンダリという．

X をカンドルとし， A をアーベル群とする．写像 $\theta: X^3 \rightarrow A$ が次の条件

$$(C1) \quad \text{任意の } w, x, y, z \in X \text{ に対し}$$

$$\theta(w, y, z) - \theta(w, x, z) + \theta(w, x, y) = \theta(w * x, y, z) - \theta(w * y, x * y, z) + \theta(w * z, x * z, y * z)$$

$$(C2) \quad \text{任意の } x, y \in X \text{ に対し } \theta(x, y, y) = 0$$

(C3) 任意の $x, y \in X$ に対し $\theta(x, x, y) = 0$

をみたすとき, θ をカンドル 3-コサイクルという.

X をカンドル, M を X -集合とし, A をアーベル群とする. 写像 $\theta : M \times X^2 \rightarrow A$ が次の条件

(C1)' 任意の $w \in M, x, y, z \in X$ に対し

$$\theta(w, y, z) - \theta(w, x, z) + \theta(w, x, y) = \theta(w \triangleleft x, y, z) - \theta(w \triangleleft y, x * y, z) + \theta(w \triangleleft z, x * z, y * z)$$

(C2)' 任意の $w \in M, x \in X$ に対し $\theta(w, x, x) = 0$

をみたすとき, θ をシャドーカンドル 2-コサイクルという.

例 1.3 ([3]). p を奇素数とし, 二面体カンドル R_p に対し写像 $\psi : R_p^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を

$$\psi(w, x, y) = (w - x) \frac{\bar{x}^p + (2\bar{y} - \bar{x})^p - 2\bar{y}^p}{p}$$

と定める. ただし $x \in R_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ へのリフトを $\bar{x}$ と表す. ψ は x, y のリフトの取り方によらず定まり, カンドル 3-コサイクルの公理をみたす. ψ を望月 3-コサイクルという.

1.3 シャドーコサイクル不変量

X をカンドル, M を X -集合とし, $\theta : M \times X^2 \rightarrow A$ をシャドーカンドル 2-コサイクルとする. 結び目 K の図式 D に対し, シャドー彩色 $(\mathcal{C}, r) \in \text{Col}_X(D) \times M$ についての各交点でのウェイト W_θ を図 2 のように定める.

$$W_\theta \left(\begin{array}{c} x \quad y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{w} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \quad x * y \end{array} \right) = \theta(w, x, y), \quad W_\theta \left(\begin{array}{c} y \quad x * y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \boxed{w} \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \quad x \end{array} \right) = \theta(w, x, y)^{-1}$$

図 2: 各交点におけるウェイト

また

$$\Psi_\theta(D, \mathcal{C}; r) = \prod_{\alpha: D \text{ の交点}} W_\theta(\alpha, \mathcal{C}; r) \in A$$

とおく. ψ が R_p の望月 3-コサイクルのときは $\Psi_\psi(D, \mathcal{C}; r)$ は非有界領域の色 r によらないので ([5]), これを $\Psi_\psi(D, \mathcal{C})$ と表す.

そして

$$\Psi_\theta(K, r) = \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_X(D)} \Psi_\theta(D, \mathcal{C}; r) \in \mathbb{Z}[A]$$

と定める．これを K のシャドーコサイクル不変量という． $\Psi_\theta(K, r)$ は K の図式の取り方によらない結び目の不変量である．また次が成り立つ．

補題 1.4 ([2] 参照). X がカンドル, $\theta : M \times X^2 \rightarrow A$ がシャドーカンドル 2-コサイクル, f がラック 3-コバンダリ のとき $\Psi_\theta(K, r) = \Psi_{\theta+f}(K, r)$.

望月 3-コサイクル ψ については $\Psi_\psi(K, r)$ は非有界領域の色によらないので, 単に $\Psi_\psi(K)$ と表す.

1.4 サテライト結び目

3-タングルであり端点における向きが順に下, 上, 下となっているものを $(+, -, +)$ -型であるという.

定義 1.5. K を結び目とし, T を $(+, -, +)$ -型のタングルとする. K を一点で切断して得られる 1-タングル図式を $\check{D}$ とし, $\check{D}$ を 0 枠に沿って三重化した図式を $\check{D}^{(3)}$ とする. また $\check{D}^{(3)}$ には $(+, -, +)$ -型のタングルとなるよう向きを定める. このとき, $\check{D}^{(3)}$ と T を合成したタングルの閉包を $K^{(3)}(T)$ と表す. (図 3 参照)

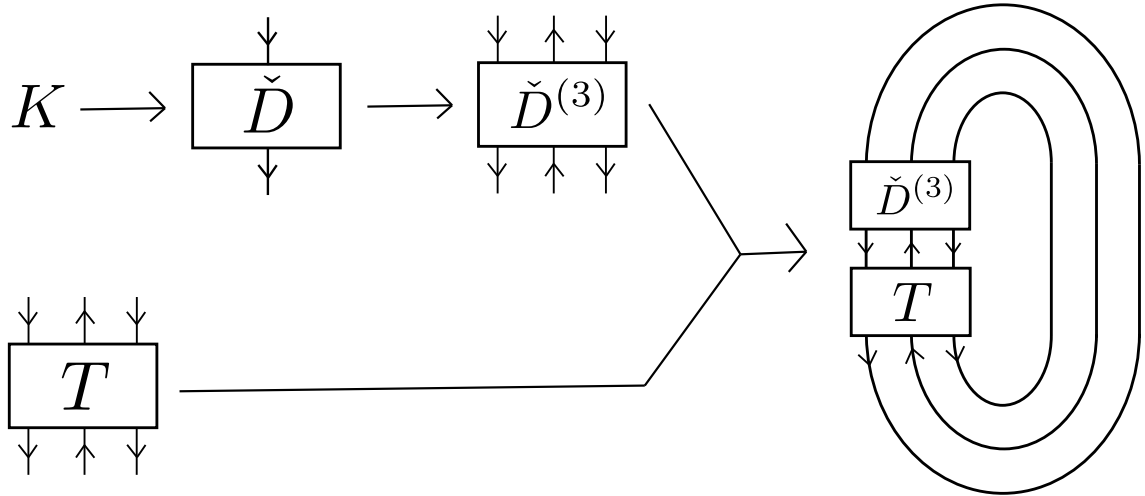


図 3: サテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ の構成

定義より $K^{(3)}(T)$ はサテライト結び目である.

2 主結果

この節では 1 節で定義したサテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ に対し, 二面体カンドルの望月 3-コサイクルで定義されるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を与える.

定理 2.1. $\psi : R_p^3 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を望月 3-コサイクルとする. K を結び目とし, T を $(+, -, +)$ -

型のタングルとする．このとき

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \Psi_\psi(K) \cdot \Psi_\psi(\bar{T})/p \in \mathbb{Z}[t]/(t^p - 1)$$

が成り立つ．ここで $\mathbb{Z}[t]/(t^p - 1)$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle t \mid t^p = 1 \rangle$ の群環である．また $\bar{T}$ は T の S^3 における閉包である．

定理を使った計算例を紹介する．図4のタングル T と結び目 K に対しサテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ のシャドーコサイクル不変量 $\Psi_\psi(K^{(3)}(T))$ を計算する．

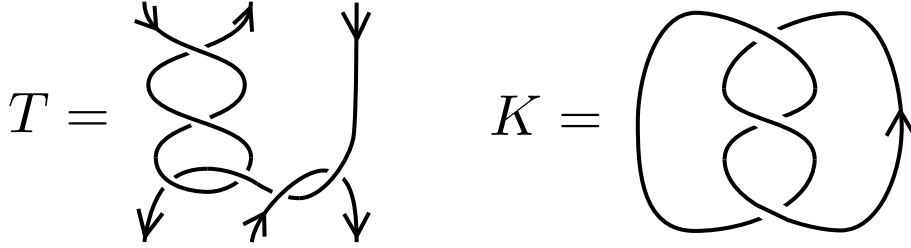


図4: タングル T と結び目 K の例

T の閉包は figure-8 knot である． $\bar{T}$ の図式が非自明な R_p -彩色を持つのは $p = 5$ のときに限る．そのことに注意してシャドーコサイクル不変量を計算すると

$$\Psi_\psi(\bar{T}) = \begin{cases} 5(1 + 2t^2 + 2t^3) & (p = 5 \text{ のとき}) \\ p & (p \neq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる．

K は trefoil knot の鏡像であり， K の図式が非自明な R_p -彩色を持つのは $p = 3$ のときに限る．そのことに注意してシャドーコサイクル不変量を計算すると

$$\Psi_\psi(K) = \begin{cases} 3(1 + 2t) & (p = 3 \text{ のとき}) \\ p & (p \neq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる．

定理 2.1 より， $K^{(3)}(T)$ のシャドーコサイクル不変量は $\Psi_\psi(\bar{T})$ と $\Psi_\psi(K)$ の積を p で割った値に等しい．よって

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \begin{cases} 3(1 + 2t) & (p = 3 \text{ のとき}) \\ 5(1 + 2t^2 + 2t^3) & (p = 5 \text{ のとき}) \\ p & (p \neq 3, 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

3 定理の証明の概要

この節では定理の証明の概要を述べる．詳細は [6] を参照されたい．

サテライト結び目 $K^{(3)}(T)$ の X -彩色 $\mathcal{C}$ が与えられたとする．まずは $\mathcal{C}$ を $\check{D}^{(3)}$ の X -彩色 $\mathcal{C}_{D^{(3)}}$ と T の X -彩色 $\mathcal{C}_T$ に分解する．このとき $\mathcal{C}_{D^{(3)}}$ は $\check{D}$ のあるカンドル W_i による彩色 $\mathcal{C}_D$ と同一視される．またこのとき X のシャドーカンドル 2-コサイクル ψ から W_i のシャドーカンドル 2-コサイクル ψ_i が得られ,

$$\Psi_\psi(\check{D}^{(3)}, \mathcal{C}_{D^{(3)}}; r) = \Psi_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}_D; r)$$

が成り立つ．よって $\Psi_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}_D; r)$ と $\Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T; r)$ によりサテライト結び目のシャドーコサイクル不変量が表示される．こうしてサテライト化公式が得られる．

3.1 カンドルの三重化

$\check{D}^{(3)}$ の X -彩色に対応する $\check{D}$ の X -彩色は次のようにして得られる．まずはカンドル X に対し次のようなカンドル $X^{(3)}$ を定義する．

定義 3.1. $X^{(3)} = X \times \bar{X} \times X$ とおく． $X^{(3)}$ の二項演算 $\ast' : X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow X^{(3)}$ を

$$(x_1, x_2, x_3) \ast' (y_1, y_2, y_3) = (x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3}, x_3^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 y_1 \bar{y}_2 y_3})$$

で定める．ここで $x^y = x \ast y$, $x^{\bar{y}} = x \ast \bar{y}$ であり, $w^{\bar{x}yz} = ((w^{\bar{x}})^y)^z$ のように表す．このとき $X^{(3)}$ はカンドルの公理をみたす．

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ のとき, $\mathbf{x} \ast \mathbf{y}$ は図 5 の右のタングル図式の X -彩色において, 上端の色が $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ となっているときの下端の色として現れる．

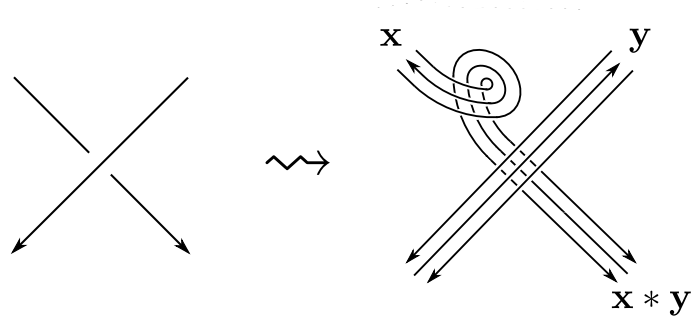


図 5: 交点の 0 枠に沿った三重化と X -彩色

$\mathcal{C}_{D^{(3)}} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$ とする. $\check{D}$ の弧 a を三重化して得られる $\check{D}^{(3)}$ の弧 a_1, a_2, a_3 について, $x_1 = \mathcal{C}_{D^{(3)}}(a_1), x_2 = \mathcal{C}_{D^{(3)}}(a_2), x_3 = \mathcal{C}_{D^{(3)}}(a_3)$ のとき $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in X^{(3)}$ とみなせる. このとき $X^{(3)}$ の定義より $\mathcal{C}_D \in \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ を $\mathcal{C}_D(a) = \mathbf{x}$ で定めることができる. この対応を $\gamma: \text{Col}_X(\check{D}^{(3)}) \rightarrow \text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ とおく. このとき γ は全単射である.

さらに $\text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ は $X^{(3)}$ の連結成分による彩色に帰着されるので, サテライト化公式を得るには $X^{(3)}$ の連結成分を求める必要がある.

例 3.2. X が有限かつ連結な Alexander カンドルのときに $X^{(3)}$ の連結成分を求める.

$W_{i,j} = \{x_{i,j} = (x+i, x+i+j, x+j) | x \in X\}$ とおくと集合として $X^{(3)} = \bigsqcup_{i,j \in X} W_{i,j}$ であり, $x_{i,j} \in W_{i,j}, y_{k,l} \in W_{k,l}$ に対し

$$x_{i,j} * y_{k,l} = (Tx + (1-T)y + i, Tx + (1-T)y + i + j, Tx + (1-T)y + j) \in W_{i,j}$$

であるので $W_{i,j}$ は $\text{Inn}(X^{(3)})$ の作用に関する $X^{(3)}$ の軌道である. また上式より $x_{i,j} * y_{i,j} = (x * y)_{i,j}$ が成り立つので, 自然な同型 $h_{i,j}: X \rightarrow W_{i,j}$ が $h_{i,j}(x) = x_{i,j}$ により定まる. ゆえに $X^{(3)}$ の連結成分は全て X と同型なカンドルである.

3.2 カンドルの三重化により得られるコサイクル

X のシャドーカンドル 2-コサイクルから $X^{(3)}$ のシャドーカンドル 2-コサイクルが次のように得られる.

定義 3.3. X 上のシャドーカンドル 2-コサイクル $\psi: M \times X^2 \rightarrow A$ に対し写像 $\psi_{\text{twist}}^{(3)}: M \times X^{(3)} \rightarrow A$, $\theta: M \times X^{(3)} \times X \rightarrow A$ および $\psi_{\text{cross}}^{(3)}: M \times X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow A$ を

$$\begin{aligned} \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) &= \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}, x_1) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_1) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1}, x_3^{\bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_1}) \\ &\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_1}, x_1, x_2^{\bar{x}_1}) - \psi(w, x_1^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) \\ &\quad + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_2^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, x_3^{x_2 \bar{x}_1}) \\ \theta(w, \mathbf{x}, y) &= \psi(w, x_1, y) - \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_2, y) + \psi(w^{x_1 \bar{x}_2}, x_3, y) \\ \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \theta(w, \mathbf{x}, y_1) - \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_2) + \theta(w^{y_1 \bar{y}_2}, \mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2}, y_3) \end{aligned}$$

で定める. さらに $\psi^{(3)}: M \times X^{(3)} \times X^{(3)} \rightarrow A$ を以下で定める.

$$\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi_{\text{twist}}^{(3)}(w, \mathbf{x}) + \psi_{\text{cross}}^{(3)}(w, \mathbf{x}^{\bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1}, \mathbf{y}).$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に対し $\mathbf{x}^{y_1 \bar{y}_2 \dots} = (x_1^{y_1 \bar{y}_2 \dots}, x_2^{y_1 \bar{y}_2 \dots}, x_3^{y_1 \bar{y}_2 \dots})$ などと表記する. このとき $\psi^{(3)}$ はシャドーカンドル 2-コサイクルである.

定義より $\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ の値は図 6 のタングルの M -シャドー X -彩色について, 図の全ての交点におけるウェイトの和をとったものに等しい.

γ による $\text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$ と $\text{Col}_{X^{(3)}}(\check{D})$ の対応において, $\psi^{(3)}$ の定義より次が成り立つ.

$$\psi^{(3)}(w, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = W_\psi \left(\begin{array}{c} \mathbf{x} \quad \mathbf{y} \\ \text{[Diagram: A box labeled } w \text{ is crossed by two strands. The top strand is labeled } \mathbf{x} \text{ and the bottom strand is labeled } \mathbf{y}. \text{ The strands cross each other, and the bottom strand is labeled } \mathbf{x} * \mathbf{y} \text{ at the bottom right.} \\ \mathbf{x} * \mathbf{y} \end{array} \right)$$

図 6: $\psi^{(3)}$ と図式のウェイトの関係

補題 3.4. 任意の $\mathcal{C}_{D^{(3)}} \in \text{Col}_X(\check{D}^{(3)})$, $r \in M$ に対し

$$\Psi_\psi(\check{D}^{(3)}, \mathcal{C}_{D^{(3)}}; r) = \Psi_{\psi^{(3)}}(\check{D}, \gamma(\mathcal{C}_{D^{(3)}}); r)$$

が成り立つ.

$X^{(3)}$ の連結成分が $\{W_i\}_{i \in I}$ であるとき, ある W_i に対し $\gamma(\mathcal{C}_{D^{(3)}}) \in \text{Col}_{W_i}(\check{D})$ であるので, 補題の右辺は $\psi^{(3)}$ を W_i に制限したコサイクル ψ_i を使って計算される.

以上を踏まえると, $K^{(3)}(T)$ のシャドーコサイクル不変量は (X, ψ) より定まる $(W_i, \psi_i)_{i \in I}$ により

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T), r) = \sum_{i \in I} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i} \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})} \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{X_i}(\check{D}; \mathbf{x}, \mathbf{y})} \Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T; r) \cdot \Psi_{\psi_i}(\check{D}, \mathcal{C}; r)$$

と表示される. ここで $\text{Col}_X(T; \mathbf{y}, \mathbf{x})$ は上端と下端の色がそれぞれ $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ である T の X -彩色の集合である.

3.3 二面体カンドルの場合

奇素数位数の二面体カンドル R_p の望月 3-コサイクル ψ に対し, サテライト化公式を具体的に決定する.

例 3.2 より, $(R_p)^{(3)}$ の連結成分は R_p と同型なカンドル $(R_p)_{i,j} (i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ からなる. 望月 3-コサイクル ψ から得られる $\psi^{(3)}$ を $(R_p)_{i,j}$ に制限したコサイクル $\psi_{i,j}$ は ψ にコホモロガスである. それは以下の補題より従う.

補題 3.5. 任意の $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に対し $\psi_{i,j} + \xi_{i,j}$ がカンドル 3-コサイクルとなるようなラック 3-コバンドリ $\xi_{i,j}$ が存在する.

補題 3.6. $K(2, p)$ を $(2, p)$ -トーラス結び目とする. このとき任意の $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に対し

$$\Psi_\psi(K(2, p)) = \Psi_{\psi_{i,j}}(K(2, p))$$

が成立する.

$(R_p)^{(3)}$ の連結成分 $\{(R_p)_{i,j}\}$ とその上のコサイクル $\{\psi_{i,j}\}$ が得られたことで, ψ で定義されるシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式を具体的に求めることができる.

R_p は忠実カンドルなので $\text{Col}_{R_p}(\check{D}; x, y) \neq \emptyset$ であるのは $x = y$ のときに限る. よって 3.2 節の最後の式より

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x \in R_p} \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_{R_p}(T; x_{i,j}, x_{i,j})} \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{R_p}(\check{D}; x, x)} \Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T) \cdot \Psi_\psi(\check{D}, \mathcal{C})$$

と表される. また R_p は連結なので各 x に対し $s(x) = 0 \in R_p$ となる $s \in \text{Inn}(R_p)$ を選ぶと s は $\text{Col}_{R_p}(\check{D}; x, x)$ から $\text{Col}_{R_p}(\check{D}; 0, 0)$ への全単射 s_* を誘導し, この対応において

$$\Psi_\psi(\check{D}, \mathcal{C}) = \Psi_\psi(\check{D}, s_*(\mathcal{C}))$$

が成り立つ. またこれは $\Psi_\psi(K) = p \cdot \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{R_p}(\check{D}; 0, 0)} \Psi_\psi(\check{D}, \mathcal{C})$ を導く. よって

$$\begin{aligned} \Psi_\psi(K^{(3)}(T)) &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x \in R_p} \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_{R_p}(T; x_{i,j}, x_{i,j})} \sum_{\mathcal{C} \in \text{Col}_{R_p}(\check{D}; 0, 0)} \Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T) \cdot \Psi_\psi(\check{D}, \mathcal{C}) \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \sum_{x \in R_p} \sum_{\mathcal{C}_T \in \text{Col}_{R_p}(T; x_{i,j}, x_{i,j})} \Psi_\psi(T, \mathcal{C}_T) \cdot \Psi_\psi(K)/p \end{aligned}$$

と変形できる. ここで集合として $\bigsqcup_{x,i,j \in R_p} \text{Col}_{R_p}(T; x_{i,j}, x_{i,j})$ は $\text{Col}_{R_p}(\overline{T})$ と同一視される. よって

$$\Psi_\psi(K^{(3)}(T)) = \Psi_\psi(\overline{T}) \cdot \Psi_\psi(K)/p$$

となり定理の主張が示される.

参考文献

- [1] K.Ishikawa, *Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots*, Master thesis, Kyoto University, January, 2016.
- [2] S.Kamada, *Surface-Knots in 4-Space : an Introduction*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature Singapore Pte Ltd. (2017)
- [3] T.Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287-330.
- [4] 成瀬透, ”曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 1 月. <http://hdl.handle.net/2433/194277>
- [5] S.Satoh. *A note on the shadow cocycle invariant of a knot with a base point*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007) No.7, 959-967.
- [6] 吉田真治, ”結び目のシャドーコサイクル不変量のサテライト化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2022 年 1 月.