# A virtualized skein relation for a multivariable polynomial invariant

名古屋市立大学
開　萌実（Hiraki Moemi）*

結び目の数理 IV　報告書

**概 要**

Virtual link diagram の Jones 多項式に関しての virtual skein relation が N.Kamada, Nakabo, Satoh によって [4] で紹介された. また Dye, Kauffman, Miyazawa が導入した virtual link の invariant である multivariable polynomial は Jones polynomial の精密化である ([1],[6]). この multivariable polynomial の almost classical virtual link に対する virtualized skein relation について報告する.

## 1　A multivariable poylnomial invariant

### 1.1　Alexander numbering

以降, $D$ を virtual link diagram とする.
ここで, $D$ の **semi-arc** とは, 2 つの classical crossing の間にある $D$ の component, または $D$ の classical crossing を持たない loop のことである. また, $D$ の **Alexander numbering** とは $D$ の各 crossing を構成する semi-arc に対しては図 1 にあるように $\mathbb{Z}$ を割り当てることである.

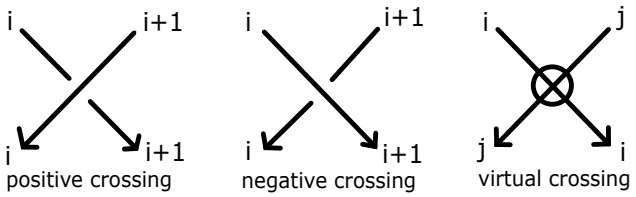



図 1: 各 crossing における numbering.

Alexander numbering をもつ例として以下の例 1.1 と例 1.2 がある.

**例 1.1.**

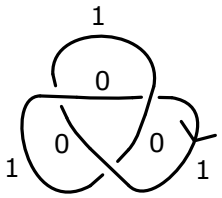



図 2: 三葉結び目における Alexander numbering.

**例 1.2.**

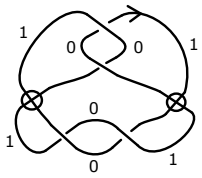



図 3: virtual link diagram の Alexander numbering.

*e-mail : m.hiraki@nsc.nagoya-cu.ac.jp

すべての classical link diagram は Alexander numbering を持つが, すべての virtual link diagram が Alexander numbering を持つとは限らない. 例 1.3 は Alexander numbering を持たない virtual link diagram である.

**例 1.3.**

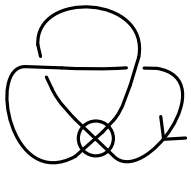


図 4: Alexander numbering を持たない virtual link diagram.

ここで, virtual link diagram $D$ が Alexander numbering を持つとき, $D$ を **almost classical** virtual link diagram という. また, virtual link $L$ が almost classical virtual link diagram を持つとき, $L$ を **almost classical** virtual link という.

## 1.2 cut system

An **oriented cut point** とは, 図 5 のように向きにそって Alexander numbering が 1 増えるような向きを持つ semi-arc 上の point である.

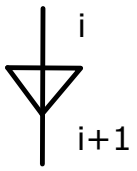



図 5: An oriented cut point.

$C$ を virtual link diagram の oriented cut point の集合とする. $C$ を伴う $D$ が Alexander numbering を持つとき, $C$ を $D$ の **cut system** という.

Virtual link diagram と cut system の例を以下に示す.

**例 1.4.**

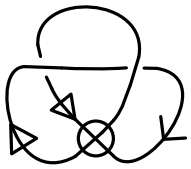


図 6: Alexander numbering of a virtual link diagram with cut system.

ここで注意として, almost classical virtual link diagram の cut system として空集合がとれる.

また, **oriented cut point move** とは図 7 のような local な変形である.

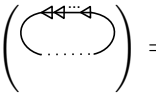
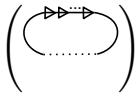
図 7: oriented cut point move

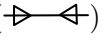
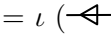
この oriented cut point move に関して以下のことが知られている.

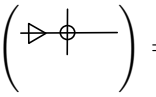
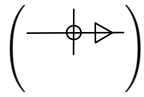
**定理 1.5.** *(N.Kamada* [3]*)*
$D$ を *virtual link diagram* とすると $D$ の 2 つの *cut system* は有限回の *oriented cut point move* で移り合う.

### 1.3 A multivariable polynomial invariant

$(D, C)$ を virtual link diagram $D$ と $D$ の cut system $C$ のペアとする.
ここで, **cut point state diagram** of $(D, C)$ とは, $D$ の すべての classical crossing を splice して得られた, oriented cut point を持つ virtual link diagram のことである.
また $\iota$ を以下の条件を満たすような cut point state diagram の loop の集合から $\mathbb{Z}$ への写像とする.

(i) $\iota$  $= \iota$  $=$ r , ここで, oriented cut point は同じ向きに 2r 個存在する.

(ii) $\iota$  $= \iota$  $= \iota$ 

(iii) $\iota$  $= \iota$ 

$S$ をすべての $(D, C)$ の cut point state diagrams の集合としたとき, $\langle\langle D, C\rangle\rangle$ を以下のように定義する.

$$\langle\langle D, C\rangle\rangle \coloneqq \sum_{\sigma^c \in S} A^{\natural\sigma^c}(-A^2 - A^{-2})^{\sharp\sigma^c - 1} d_1^{\tau_1(\sigma^c)} d_2^{\tau_2(\sigma^c)} \cdots \ \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1, d_2 \cdots]$$

ここで $\natural\sigma^c \coloneqq (\sigma^c$の A − splice の数$) - (\sigma^c$の B − splice の数$)$

$\sharp\sigma^c \coloneqq (\sigma^c$の loop の数$)$

$\tau_i(\sigma^c) \coloneqq (\iota(l) = i$ となる$\sigma^c$の loop $l$ の数$)$

である.

この $\langle\langle D, C\rangle\rangle$ に対して以下のことが知られている.

**命題 1.6.** *(N.Kamada* [2]*)*
$\langle\langle D, C\rangle\rangle$ は $C$ の選択に依らない.

命題 1.6 より, 以降 $\langle\langle D, C\rangle\rangle$ を $\langle\langle D\rangle\rangle$ と書く.

このとき, $D$ の multivariable polynomial $X_D$ を以下のように定義する.

$$X_D \coloneqq (-A^3)^{-w(D)} \langle\langle D\rangle\rangle$$

$w(D) = (D$ の positive crossing の数$) -$ (D の negative crossing の数)

この multivariable polynomial $X_D$ について以下のことがわかっている.

**定理 1.7.** *(N.Kamada [2])*
$X_D$ は *Dye, Kauffman, Miyazawa* の定義された *multivariable polynomial invariant* と一致する.

**命題 1.8.** *(Nakamura, Nakanishi, Satoh [5], N.Kamada [2])*
$D$ が *almost classical virtual link diagram* のとき, $X_D \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ となる.

## 2 主結果と応用

### 2.1 主結果

**virtual skein triple** $(D_+, D_-, D_v)$ とは, $D_+$ の positive crossing $p$ を交差交換したものを $D_-$, $D_+$ の $p$ を virtual crossing に変えたものを $D_v$ とした virtual link diagrams の三対のことである.

$V_D$ を virtual link diagram $D$ の Jones 多項式とする. N.Kamada, Nakabo, Satoh が [4] において Jones 多項式に対して次の関係を示した.

**定理 2.1.** *(N.Kamada, Nakabo, Satoh [4])*
$(D_+, D_-, D_v)$ を *virtual skein triple* とする.
$D_+, D_-$ が *checkerboard colorable virtual link diagram* のとき以下の式が成り立つ.

$$A^3 V_{D_+} + A^{-3} V_{D_-} = (A^3 + A^{-3}) V_{D_v}$$

以下の定理 2.2 が主結果である.

**定理 2.2.** $(D_+, D_-, D_v)$ を *virtual skein triple* とし,
$D_+, D_-$ が *almost classical virtual link diagram* のとき以下の式が成り立つ.

$$(A^6 - d_1) X_{D_+} + (-A^{-6} + d_1) X_{D_-} = (A^6 - A^{-6}) X_{D_v}$$

**証明.** $D_+, D_-$ は almost classical virtual link diagram であるので, $D_+, D_-$ の cut system として空集合をとる. このとき, $D_v$ は図 8 のように 2 つの oriented cut point だけを持つような cut system を持ち, $D_v$ はそのような cut system をとるとする.

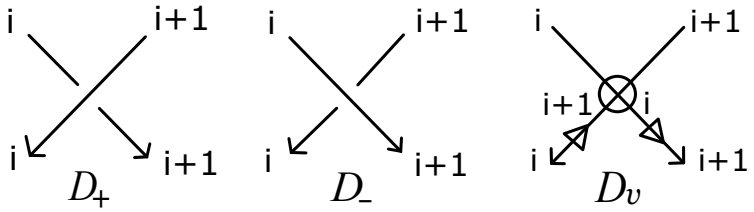



図 8: virtual skein triple における cut system

$S_+, S_-, S_v$ を それぞれ $D_+, D_-, D_v$ の 全ての state の集合とする.
ここで, $D$ が almost classical virtual link diagram ならば, $D$ は checkerboard colorable であるから, $S_\pm$ は図 9 にあるような arc のつながり方をしている cut point state の集合 $S'_\pm$ と $S''_\pm$ の非交和 $S_\pm = S'_\pm \sqcup S''_\pm$ である. よって, $S_v$ は図 9 にあるような $S_v$ の部分集合 $S'_v$ と $S''_v$ の非交和 $S_v = S'_v \sqcup S''_v$ である.

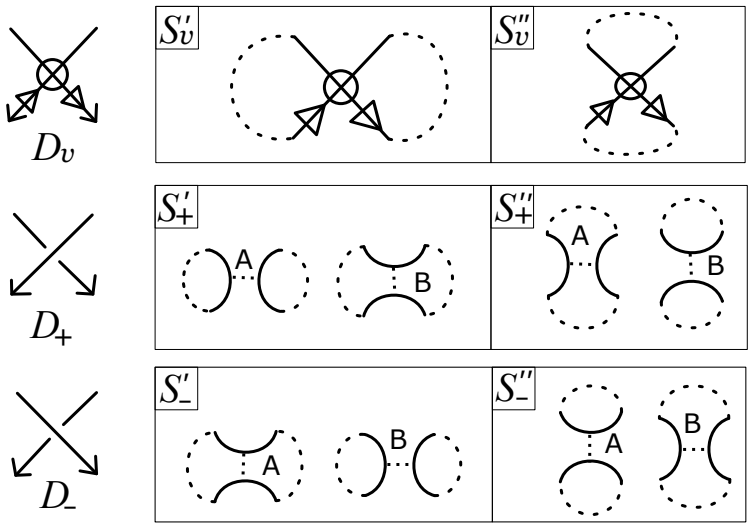



図 9:

ここで, state の部分集合 $S'$ に関して,

$$\langle\langle D|S'\rangle\rangle := \sum_{\sigma^c\in S'} A^{\sharp\sigma^c}(-A^2-A^{-2})^{\sharp\sigma^c-1}d_1^{\tau_1(\sigma^c)}d_2^{\tau_2(\sigma^c)}\cdots \in \mathbb{Z}[A^{\pm1},d_1,d_2\cdots] \text{ とおく.}$$

以下が成立する.

$$\begin{aligned}\langle\langle D_+|S'_+\rangle\rangle &= A(-A^2-A^{-2})\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle + A^{-1}\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle \\ &= -A^3\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle . \qquad (2.1)\\ \text{同様に,}\quad \langle\langle D_-|S'_-\rangle\rangle &= -A^{-3}\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle . \qquad (2.2)\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}d_1\langle\langle D_+|S''_+\rangle\rangle &= (A+A^{-1}(-A^2-A^{-2}))\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle \\ &= -A^{-3}\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle . \qquad (2.3)\\ \text{同様に,}\quad d_1\langle\langle D_-|S''_-\rangle\rangle &= -A^3\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle . \qquad (2.4)\end{aligned}$$

式 (2.1), 式 (2.2), 式 (2.3), 式 (2.4) を用いると,

$$\begin{aligned}&(-A^3+A^{-3}d_1)\langle\langle D_+\rangle\rangle - (-A^{-3}+A^3d_1)\langle\langle D_-\rangle\rangle \\ &= (-A^3+A^{-3}d_1)(\langle\langle D_+|S'_+\rangle\rangle + \langle\langle D_+|S''_+\rangle\rangle) - (-A^{-3}+A^3d_1)(\langle\langle D_-|S'_-\rangle\rangle + \langle\langle D_-|S''_-\rangle\rangle) \\ &= (-A^3+A^{-3}d_1)(-A^3\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle - A^{-3}d_1^{-1}\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle) - (-A^{-3}+A^3d_1)(-A^{-3}\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle - A^3d_1^{-1}\langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle) \\ &= (A^6-A^{-6})(\langle\langle D_v|S'_v\rangle\rangle + \langle\langle D_v|S''_v\rangle\rangle) \\ &= (A^6-A^{-6})\langle\langle D_v\rangle\rangle . \qquad (2.5)\end{aligned}$$

ここで, $w(D_+)=w(D_v)+1$ , $w(D_-)=w(D_v)-1$ であるので, 式 (2.5) より主結果である式 (2.6) が得られる.

$$(A^6-d_1)X_{D_+} + (-A^{-6}+d_1)X_{D_-} = (A^6-A^{-6})X_{D_v}. \qquad (2.6)$$

□

### 2.2 応用

ここでは先ほどの定理の応用を 2 つ挙げる.

**系 2.3.**
$D_+, D_-$ が *almost classical virtual link diagram* のとき, $X_{D_v} \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, d_1]$ となる.

ここで, $\mathrm{Exp}(X_D)$ を $X_D$ の $d_i$ を含まない項の $A$ の指数の集合とし, $\mathrm{Exp}(X_D|d_i)$ を $X_D$ の $d_i$ を含む項の $A$ の指数の集合とする. このとき以下のことがわかる.

**系 2.4.** *(Satoh, Tomiyama* [7]*)*
$(D_+, D_-, D_v)$ を *virtual skein triple,*
$D_+, D_-$ を $n$ 成分の *almost classical virtual link diagram* としたとき以下が成り立つ.

$$\mathrm{Exp}(X_{D_v}) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z} & (n : odd) \\ 4\mathbb{Z}+2 & (n : even) \end{cases}$$

$$\mathrm{Exp}(X_{D_v}|d_1) \subset \begin{cases} 4\mathbb{Z}+2 & (n : odd) \\ 4\mathbb{Z} & (n : even) \end{cases}$$

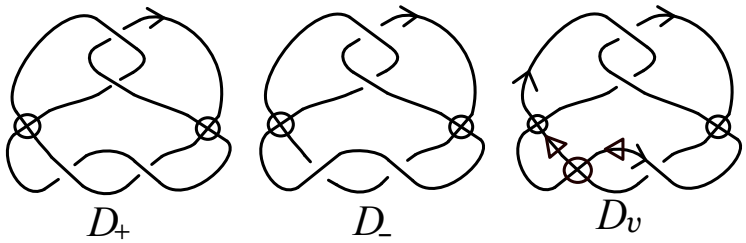



図 10:

具体例として図 10 を計算すると multivariable polynomial invariant はそれぞれ以下のようになる.

$$X_{D_+} = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}$$
$$X_{D_-} = 1$$
$$X_{D_v} = A^8 - A^4 + 1 + (-A^2 + A^{-2})d_1$$

この計算結果は, 系 2.3 と 系 2.4 を満たしていることがわかる.

## 参考文献


[1] H. A. Dye and Louis H. Kauffman, *Virtual Crossing Number and the Arrow Polynomial* (2009), available at 0810.3858.

[2] N.Kamada, *A multivariable polynomial invariant of virtual links and cut systems*, Topology and its Applications **301** (2021), 107518, DOI https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107518. Special issue for the proceedings of the Third PPICTA.

[3] N.Kamada, *Cyclic coverings of virtual link diagrams* (2019), available at 1903.03306.

[4] N.Kamada and Nakabo and Satoh, *A virtualized skein relation for Jones polynomials*, Illinois Journal of Mathematics - ILL J MATH **46** (2002), DOI 10.1215/ijm/1258136203.

[5] Y. Miyazawa, *A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **17** (2008), no. 11, 1311-1326, DOI 10.1142/S0218216508006658. cited By 34.

[6] Nakamura and Nakanishi and Satoh and Tomiyama, *Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots*, Journal of Knot Theory and its Ramifications **10** (2012), DOI 10.1142/S0218216512500952.

[7] Satoh and Tomiyama, *On the crossing numbers of a virtual knot*, Proceedings of the American Mathematical Society **140** (2012), DOI 10.1090/S0002-9939-2011-10917-1.