

# Index polynomial invariants for twisted links

伊藤 大貴 (大阪大学大学院理学研究科)\*

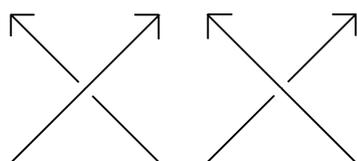
## 概要

twisted link は M. O. Bourgoin によって定義された virtual link の一般化である. 我々は向きと順序の付いた twisted link diagram に対して index polynomial を導入し, これが twisted link の不変量になることを示した. この不変量は L. H. Kauffman によって定義された virtual link の affine index polynomial の拡張になっている. 応用として, double covering が同じである異なる 2 つの twisted link の存在を示すことができる.

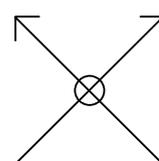
## 1 捩れ仮想絡み目

### 1.1 仮想絡み目

$m$  成分仮想絡み目図式 ( $m$ -component virtual link diagram) [5] とは, 向きと順序の付いた  $m$  個の  $S^1$  の  $\mathbb{R}^2$  へのはめこみであり, 交点が横断的に交わる 2 重点のみであるものをいう. 各 2 重点には, 実交叉 (classical crossing) と仮想交叉 (virtual crossing) の情報が与えられている.

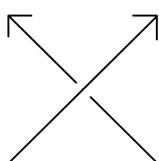


実交叉

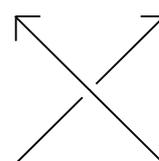


仮想交叉

さらに, 実交叉には弧の上下の情報から符号  $\pm 1$  が与えられる. 実交叉  $\tau$  の符号を  $\text{sign}(\tau)$  と表記する.



+1



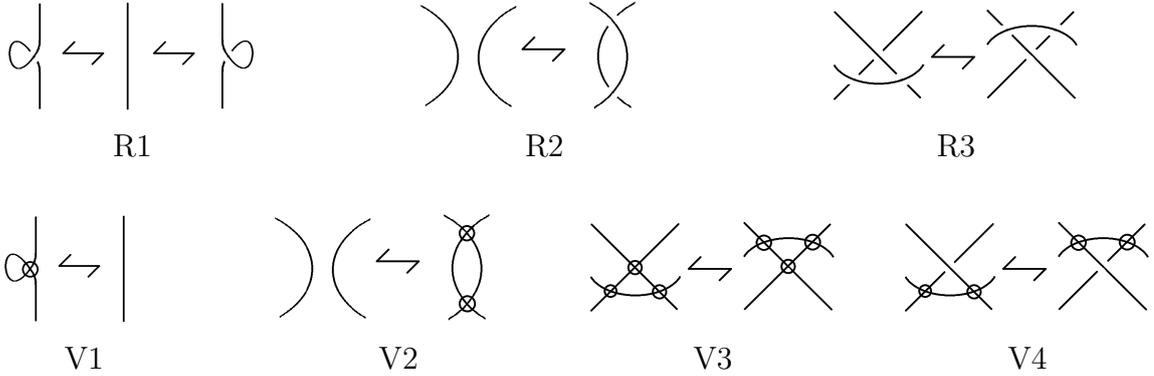
-1

---

\* e-mail: u063241a@ecs.osaka-u.ac.jp

下に図示した図式の実交叉と仮想交叉に関する局所変形 (R1~R3, V1~V4) を一般ライデマイスター変形 (**generalized Reidemeister move**) という.

$D$  と  $D'$  を  $m$  成分仮想絡み目図式とする.  $D$  と  $D'$  が有限回の一般ライデマイスター変形で移りあうとき,  $D$  と  $D'$  は仮想絡み目として同値であるといい,  $D \sim D'$  と表す. また,  $m$  成分仮想絡み目図式の関係  $\sim$  による同値類を  $m$  成分仮想絡み目 ( **$m$ -component virtual link**) [5] という.



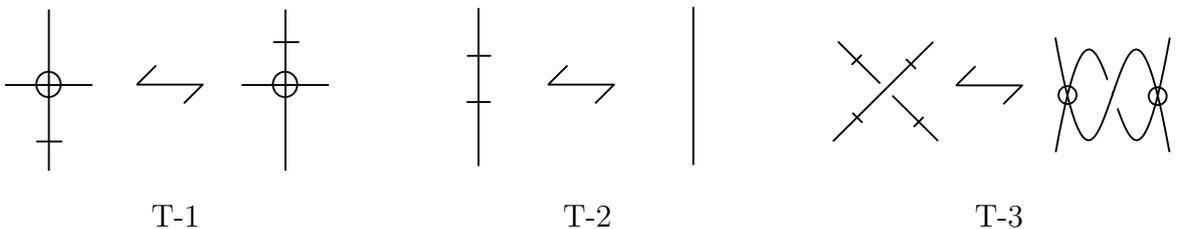
## 1.2 振れ仮想絡み目

$m$  成分振れ仮想絡み目図式 ( **$m$ -component twisted link diagram**) [1] とは,  $m$  成分仮想絡み目図式の弧上にバー (**bar**) の情報を付け加えたものである.



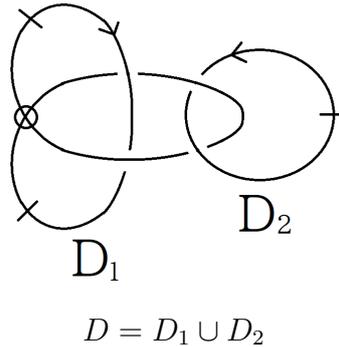
下に図示した図式の実交叉, 仮想交叉, バーに関する局所変形 (T1~T3) を合わせて拡張ライデマイスター変形 (**extended Reidemeister move**) という.

$D$  と  $D'$  を  $m$  成分振れ仮想絡み目図式とする.  $D$  と  $D'$  が有限回の拡張ライデマイスター変形で移りあうとき,  $D$  と  $D'$  は振れ仮想絡み目として同値であるといい,  $D \overset{t}{\sim} D'$  と表す. また,  $m$  成分振れ仮想絡み目図式の関係  $\overset{t}{\sim}$  による同値類を  $m$  成分振れ仮想絡み目 ( **$m$ -component twisted link**) [1] という.



また,  $m$  成分振れ仮想絡み目図式  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  の各  $D_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) は, 次のように2つの型に分けることができる.  $D_i$  の弧上のバーの個数が偶数個なら  $D_i$  は偶数型 (even type), 奇数個なら  $D_i$  は奇数型 (odd type) という. このとき, 各  $D_i$  に対して, 偶数型, 奇数型は拡張ライデマイスター変形で不変である.

ここで, 一方が偶数型で, 他方が奇数型であるような2成分振れ仮想絡み目図式の例を挙げる.  $D = D_1 \cup D_2$  を下図の2成分振れ仮想絡み目図式とすると,  $D_1$  は偶数型で,  $D_2$  は奇数型である.



## 2 インデックス多項式

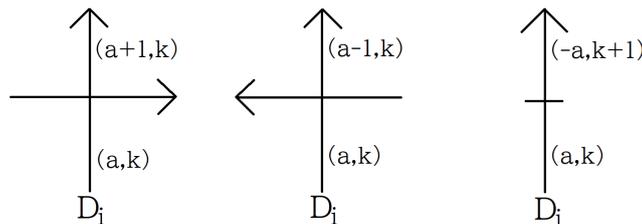
### 2.1 $n$ -彩色

以後,  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  を  $m$  成分振れ仮想絡み目図式とし,  $i \in \{1, \dots, m\}$  を固定して,  $D_i$  は偶数型であると仮定する.

$D_i$  の準弧 (semi arc) とは  $D_i$  を  $D$  の実交叉とバーで区切って得られる弧とする. 但し, 仮想交叉では区切らない. また,  $\mathcal{A}(D_i) := \{ D_i \text{ の準弧} \}$  とする.

$m$  成分振れ仮想絡み目図式  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  に対して, 彩色を次のように定義する.

**定義 2.1.**  $n$  を非負の整数とする. そのとき,  $D_i$  の  $n$ -彩色 ( $n$ -coloring) とは, 写像  $C_i : \mathcal{A}(D_i) \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$  で下図の条件を満たすものをいう. 但し, 下図の2重点は実交叉である. ( $D$  が仮想絡み目図式のときは, 第2成分を無視すると  $C_i : \mathcal{A}(D_i) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  となり, [6] や [2] に登場する彩色と思える.)





## 2.2 インデックス多項式

$m$  成分振れ仮想絡み目図式に対してインデックス多項式を定義するために,  $D_i$  の自己交叉を3つの集合  $T^{(C_i, D_i)}$ ,  $T_0^{(C_i, D_i)}$ ,  $T_1^{(C_i, D_i)}$  に, 以下のように分類する.

$$\begin{aligned} T^{(C_i, D_i)} &:= \{ \tau: D_i \text{ の自己交叉} \mid \text{図 } (\alpha) \text{ の条件を満たす} \}, \\ T_0^{(C_i, D_i)} &:= \{ \tau: D_i \text{ の自己交叉} \mid \text{図 } (0) \text{ の条件を満たす} \}, \\ T_1^{(C_i, D_i)} &:= \{ \tau: D_i \text{ の自己交叉} \mid \text{図 } (1) \text{ の条件を満たす} \}. \end{aligned}$$

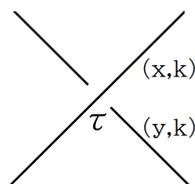


図 ( $\alpha$ )

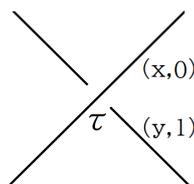


図 (0)

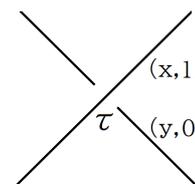


図 (1)

この  $T^{(C_i, D_i)}$ ,  $T_0^{(C_i, D_i)}$ ,  $T_1^{(C_i, D_i)}$  を用いて,  $D_i$  のインデックス多項式を以下で定義する.

**定義 2.4 (I).**  $D_i$  のインデックス多項式 (index polynomial)  $\phi^{(C_i, D_i)}(t)$ ,  $\psi_0^{(C_i, D_i)}(t)$ ,  $\psi_1^{(C_i, D_i)}(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^{d_i(D)} - 1)$  を

$$\phi^{(C_i, D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T^{(C_i, D_i)}} \text{sign}(\tau) (t^{W^{(C_i, D_i)}(\tau)} - 1),$$

$$\psi_0^{(C_i, D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T_0^{(C_i, D_i)}} \text{sign}(\tau) t^{W^{(C_i, D_i)}(\tau)}, \quad \psi_1^{(C_i, D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T_1^{(C_i, D_i)}} \text{sign}(\tau) t^{W^{(C_i, D_i)}(\tau)}$$

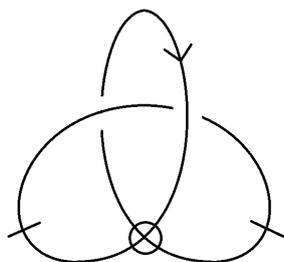
と定義する. 但し,  $W^{(C_i, D_i)}(\tau)$  は  $W^{(C_i, D_i)}(\tau)$  の代表元を1つ選んで  $\mathbb{Z}$  の元とみなす.

$\phi^{(C_i, D_i)}(t)$ ,  $\psi_0^{(C_i, D_i)}(t)$ ,  $\psi_1^{(C_i, D_i)}(t)$  は,  $W^{(C_i, D_i)}(\tau)$  の代表元の取り方に依らず, 一意的に定まる. 故に,  $\phi^{(C_i, D_i)}(t)$ ,  $\psi_0^{(C_i, D_i)}(t)$ ,  $\psi_1^{(C_i, D_i)}(t)$  は well-defined である.

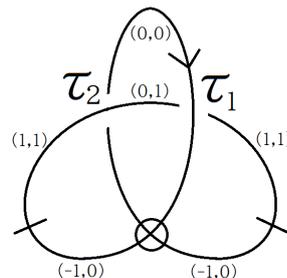
ここで,  $D_i$  のインデックス多項式の例を挙げる.

**例 2.5.**  $D = D_1$  を左下図の1成分振れ仮想絡み目図式とすると,  $d_1(D) = 0$  である.

また,  $C_1: \mathcal{A}(D_1) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$  を右下図の  $D_1$  の0-彩色とすると,  $W^{(C_1, D_1)}(\tau_1) = -1$ ,  $\tau_1 \in T_0^{(C_1, D_1)}$ ,  $W^{(C_1, D_1)}(\tau_2) = 1$ ,  $\tau_2 \in T_1^{(C_1, D_1)}$  であるから,  $\phi^{(C_1, D_1)}(t) = 0$ ,  $\psi_0^{(C_1, D_1)}(t) = t^{-1}$ ,  $\psi_1^{(C_1, D_1)}(t) = t$  である.



$D$



0-彩色

### 3 主結果

#### 3.1 主定理

まず,  $f, g \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^n - 1)$  の組  $(f, g)$  に対して,  $p$ -合同を次のように定義する.

$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^n - 1)$  に対して  $(f_1, f_2)$  と  $(g_1, g_2)$  が  $p$ -合同であるとは, ある整数  $k$  が存在して,  $(f_1, f_2) = (g_1 \cdot t^{pk}, g_2 \cdot t^{-pk})$  または  $(f_1, f_2) = (g_2 \cdot t^{pk}, g_1 \cdot t^{-pk})$  が成り立つことであり,  $(f_1, f_2) \stackrel{(p)}{\equiv} (g_1, g_2)$  と表す.

このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 3.1 (I).**  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  と  $D' = D'_1 \cup \dots \cup D'_m$  を  $D_i$  が偶数型である  $m$  成分振れ仮想絡み目図式とする. このとき,  $D \stackrel{t}{\sim} D'$  ならば, 次が成り立つ.

$$(1) d_i(D) = d_i(D').$$

任意の  $D_i$  の  $d_i(D)$ -彩色  $C_i$  と  $D'_i$  の  $d_i(D')$ -彩色  $C'_i$  に対して,

$$(2) \phi^{(C_i, D_i)}(t) = \phi^{(C'_i, D'_i)}(t).$$

$$(3) (\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(2)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t)).$$

故に,  $\phi^{(C_i, D_i)}(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^{d_i(D)} - 1)$  および  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t))$  の 2-合同類は振れ仮想絡み目の不変量になる.

#### 3.2 アファインインデックス多項式との関係

Kauffman は仮想結び目 (1 成分仮想絡み目)  $K$  に対して, アファインインデックス多項式不変量 (affine index polynomial invariant)  $P_K(t)$  [6] を定義した. この多項式不変量は, 仮想結び目と同様の構成方法で,  $m$  成分仮想絡み目に対しても定義できる.

$m$  成分仮想絡み目図式  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  に対して,  $D_i$  のアファインインデックス多項式不変量を  $P_{D_i}(t)$  と表記する.  $P_{D_i}(t)$  は  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^{d_i(D)} - 1)$  に値をもつ.

このとき, 本稿のインデックス多項式不変量は, Kauffman のアファインインデックス多項式不変量の拡張になっていることを, 次の命題 3.2 が保証する.

**命題 3.2 (I).**  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  を  $m$  成分仮想絡み目図式,  $P_{D_j}(t)$  をアファインインデックス多項式とする. そのとき, 次が成り立つ.

任意の  $j \in \{1, \dots, m\}$  と  $D_j$  の  $C_j$ :  $d_j(D)$ -彩色に対して,

$$(1) \phi^{(C_j, D_j)}(t) = P_{D_j}(t).$$

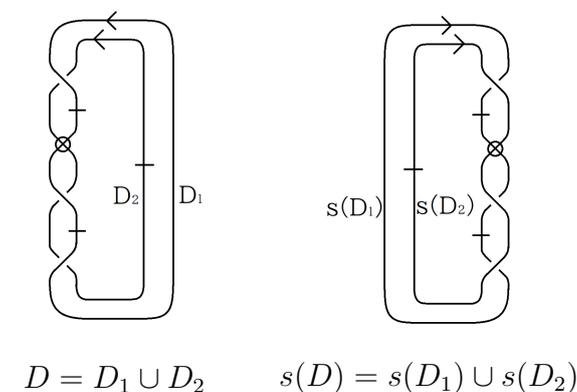
$$(2) \psi_0^{(C_j, D_j)}(t) = \psi_1^{(C_j, D_j)}(t) = 0.$$

### 3.3 二重被覆との関係

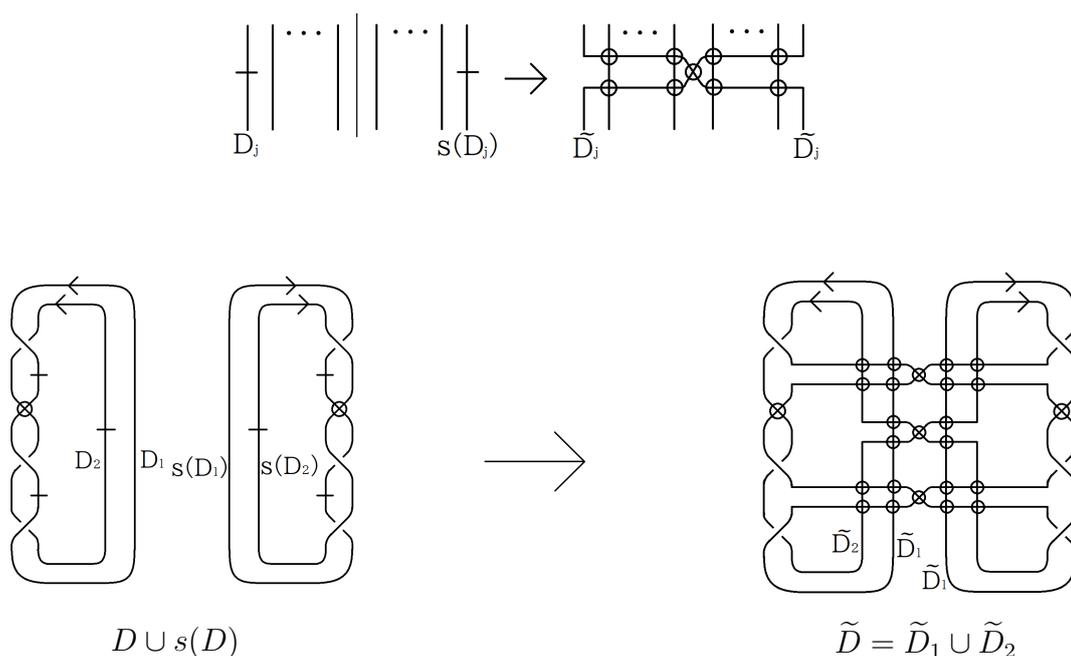
二重被覆 (double covering) [4] は, 順序の付いていない捩れ仮想絡み目から仮想絡み目に対応させる操作のことである. 応用として, 二重被覆を考えることで, 仮想絡み目の不変量から捩れ仮想絡み目の不変量が得られる. まず, 図式を用いた二重被覆の構成方法 [4] について説明する.

$D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  を  $m$  成分捩れ仮想絡み目図式とする. そのとき,  $D$  の二重被覆図式  $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \dots \cup \tilde{D}_m$  を次の手順で構成する.

- (1)  $D$  を  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$  内に入るように移動させる.  
 $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (-x, y)$  を  $y$  軸に関する鏡映,  $c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を全ての実交叉の上下の情報を入れ替える写像とし,  $s = c \circ r$  とする.  
 このとき,  $D \cup s(D)$  を  $\mathbb{R}^2$  内に描く.



- (2) 全ての  $D_j$  のバーと, それに対応する  $s(D_j)$  のバーを下図のように切り開いて,  $D_j$  と  $s(D_j)$  をつなげたものを  $\tilde{D}_j$  とする.



(1)(2)の手順で構成した仮想絡み目図式を  $D$  の二重被覆図式 (double covering diagram)  $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \dots \cup \tilde{D}_m$  と定義する.

$D_i$  が偶数型ならば,  $\tilde{D}_i$  は順序の付いていない2成分の仮想絡み目図式となり,  $D_i$  が奇数型ならば,  $\tilde{D}_i$  は1成分の仮想絡み目図式となる.  $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \dots \cup \tilde{D}_m$  は, 一般には順序付き仮想絡み目図式とはならず,  $m$  分割された仮想絡み目図式である. すなわち,  $\tilde{D}$  の各成分には  $1, 2, \dots, m$  のラベルが与えられていて,  $i$  のラベルが付いた成分の和が  $\tilde{D}_i$  である.

$m$  成分振れ仮想絡み目図式  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  と  $D' = D'_1 \cup \dots \cup D'_m$  に対して,  $\tilde{D}$  と  $\tilde{D}'$  が  $m$  分割を保って有限回の一般ライデマイスター変形に移りあうとき,  $\tilde{D} \stackrel{v}{\sim} \tilde{D}'$  と表す. そのとき, 次の命題が成り立つ.

**命題 3.3** (cf. N.Kamada, S.Kamada [4]).  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  と  $D' = D'_1 \cup \dots \cup D'_m$  を  $m$  成分振れ仮想絡み目図式とする. そのとき,  $D \stackrel{t}{\sim} D'$  ならば  $\tilde{D} \stackrel{v}{\sim} \tilde{D}'$  が成り立つ.

故に,  $m$  成分振れ仮想絡み目図式に対して二重被覆をとって得られる仮想絡み目図式は, 振れ仮想絡み目の不変量になる.

また, インデックス多項式と二重被覆との関係について, 次の定理が成り立つ.

**定理 3.4 (I).**  $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$  と  $D' = D'_1 \cup \dots \cup D'_m$  を  $D_i$  が偶数型である  $m$  成分振れ仮想絡み目図式とする. そのとき,  $\tilde{D} \stackrel{v}{\sim} \tilde{D}'$  ならば, 次が成り立つ.

$$(1) d_i(D) = d_i(D').$$

任意の  $D_i$  の  $d_i(D)$ -彩色  $C_i$  と  $D'_i$  の  $d_i(D')$ -彩色  $C'_i$  に対して,

$$(2) \phi^{(C_i, D_i)}(t) = \phi^{(C'_i, D'_i)}(t).$$

$$(3) (\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t)).$$

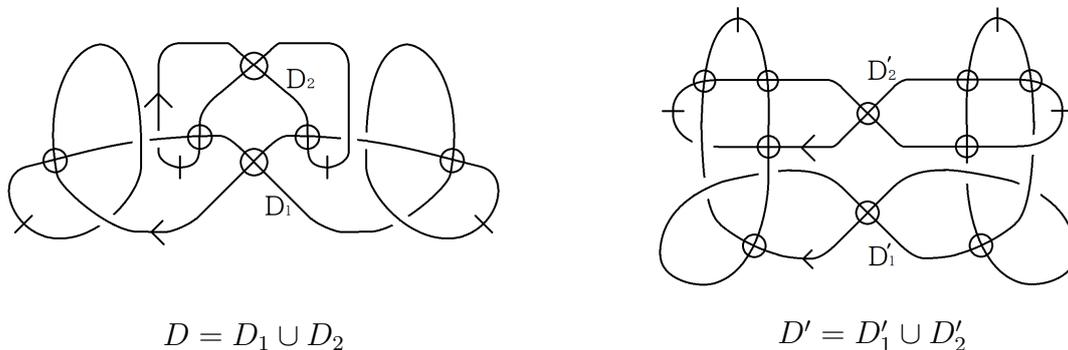
定理 3.4 (1) と (2) より,  $d_i(D)$  と  $\phi^{(C_i, D_i)}(t)$  は, 二重被覆図式より弱い不変量であることが言える.

しかし,  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$  ならば  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(2)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$  は必ずしも成り立つとは限らないので,  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t))$  は, 二重被覆図式で得られない不変量の可能性がある. 実際,  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t))$  が二重被覆図式で得られない不変量であることを示したものが, 次の定理 3.5 である.

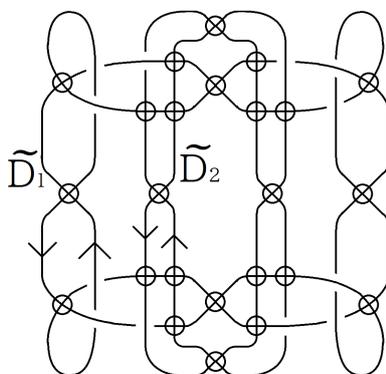
**定理 3.5 (I).**  $\tilde{D} \stackrel{v}{\sim} \tilde{D}'$  であって  $D \not\stackrel{t}{\sim} D'$  であるような  $D$  と  $D'$  が存在する.

**証明.**  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$  かつ  $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(2)}{\not\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$  であるような振れ仮想絡み目図式  $D$  と  $D'$  が存在すればよい.

$D = D_1 \cup D_2$ ,  $D' = D'_1 \cup D'_2$  を下図の 2 成分振れ仮想絡み目図式とする. このとき,  $D_1$ ,  $D'_1$  は偶数型である.



$D$  と  $D'$  の二重被覆図式は下図の仮想絡み目図式と同値である.



故に,  $\tilde{D} \sim \tilde{D}'$  が成り立つ.

このとき, ある  $D_i$  の  $d_i(D)$ -彩色  $C_i$  と  $D'_i$  の  $d_i(D')$ -彩色  $C'_i$  を与えると  $d_1(D) = d_1(D') = 2$ ,  $(\psi_0^{(C_1, D_1)}(t), \psi_1^{(C_1, D_1)}(t)) = (2t, 0)$ ,  $(\psi_0^{(C'_1, D'_1)}(t), \psi_1^{(C'_1, D'_1)}(t)) = (2, 0)$  である.

故に,  $(\psi_0^{(C_1, D_1)}(t), \psi_1^{(C_1, D_1)}(t)) \stackrel{(2)}{\neq} (\psi_0^{(C'_1, D'_1)}(t), \psi_1^{(C'_1, D'_1)}(t))$  である.  
従って,  $D \not\sim D'$  が成り立つ.

□

## 参考文献

- [1] M. O. Bourgin, *Twisted link theory*, *Algebr. Geom. Topol.* 8 (2008), 1249–1279.
- [2] Z. Cheng, H. Gao, *A polynomial invariant of virtual links*, *J. of Knot Theory and Its Ramifications*, 22(12) (2013), 1341002 (33 pages).
- [3] N. Kamada, *index polynomial invariants of twisted links*, *J. of Knot Theory and Its Ramifications*, 22 (2013), 1340005 (16 pages).

- [4] N. Kamada, S. Kamada, *Double coverings of twisted links*, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 25 (2016), 1641011 (22 pages).
- [5] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. 20 (1999), 663–690.
- [6] L. H. Kauffman, *An affine index polynomial invariant of virtual knots*, J. of Knot Theory and Its Ramifications, 22(4) (2012), 413–464.
- [7] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, *Writhe polynomials and shell moves for virtual knots and links*, European J. Combin. 84 (2020), 103033 (24 pages).
- [8] M. Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. 1 (4) (2010), 399–411.
- [9] S. Satoh, K. Taniguchi, *The writhes of a virtual knot*, Fund. Math. 225 (1) (2014), 327–342.