

# 仮想絡み目の JKSS 不変量について

加藤 広太 (大阪大学大学院理学研究科)\*

## 概要

JKSS 不変量は, Jaeger, Kauffman, Saleur によって曲面上の絡み目図式に対して定義され, Sawollek により仮想絡み目の不変量として定式化された多項式型不変量である. この不変量は, 仮想絡み目図式のある部分集合の族から得られる分配関数と呼ばれる関数で定義される. 一方で, 仮想絡み目図式から得られる行列式によっても計算できることが知られているが, Sawollek の論文にはその証明が書かれていない. 今回は分配関数と行列式が一致することの証明を与える.

## 1 JKSS 不変量

グラフ  $G = (V, E)$  がオイラー向き付けされているとは, それぞれの頂点  $v$  の入次数と出次数が等しくなる向きが入っていることである.  $f: E \rightarrow \{1, 2\}$  が  $G$  のラベリングであるとは,  $G$  の部分グラフ  $f^{-1}(1)$ ,  $f^{-1}(2)$  が  $G$  から定まる向きでオイラー向き付けになっていることである.  $G$  のラベリングの集合を  $\mathcal{L}(G)$  と書き,  $f$  でラベリングされた  $G$  を  $G_f$  と書く.  $G_f$  では, 1 でラベリングされた辺を実線, 2 でラベリングされた辺を点線で表す (図 1).

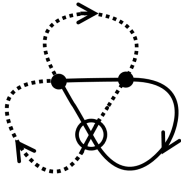


図 1  $G_f$  の例

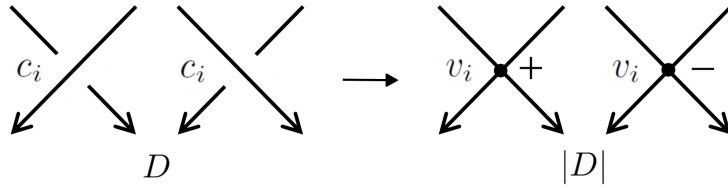


図 2

$D$  を有向仮想絡み目図式とし,  $D$  の交点を  $c_1, c_2, \dots, c_n$  とする.  $|D|$  を,  $D$  の古典的交叉を頂点化した図式とする. この図式は,  $\mathbb{R}^2$  上の有向仮想 4 価グラフである. 向きは  $D$  から自然に定める.  $D$  の交点  $c_i$  に自然に対応する  $|D|$  の頂点を  $v_i$  とし,  $v_i$  の符号  $\varepsilon_i$  を,  $c_i$  が正の交点ならば +, 負の交点ならば - とする (図 2).

$\Theta := \{\theta_{jk}(+), \theta_{jk}(-) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid j, k \in \{0, 1\}\}$  とし,  $|D|_f$  の頂点の重さ  $\langle v_i | f \rangle \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  を図 3 で定める.

\* e-mail : u288774i@ecs.osaka-u.ac.jp

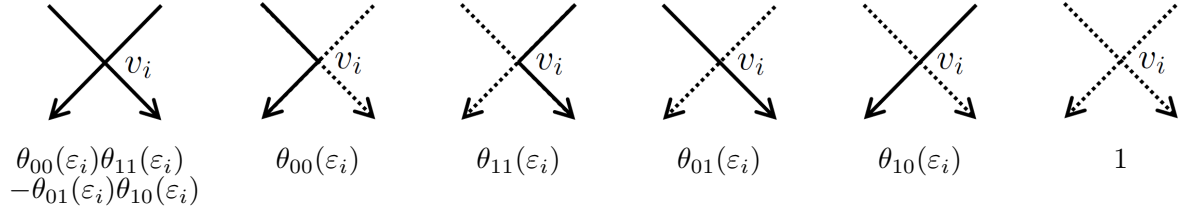


図 3

$|D|_f$  の頂点のうち、接続する 4 つの辺が全て 2 でラベリングしている頂点に対し、スムーズグ (図 4) を行う. これにより得られる  $f^{-1}(2)$  によるザイフェルト円周の数を  $s(|D|, f, 2)$  と書く.

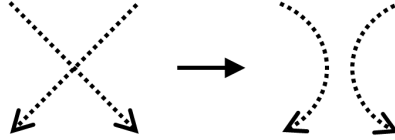


図 4

**定義 1.1** ([1]).  $D$  の交点数を  $n$  とする.  $D$  の分配関数 (**partition function**)  $Z(D) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  を,  $Z(D) = \sum_{f \in \mathcal{L}(|D|)} (-1)^{s(|D|, f, 2)} \prod_{i=1}^n \langle v_i | f \rangle$  で定義する.

**定理 1.2** ([1]).  $\Theta$  を,  $\theta_{00}(+) = 1 + x$ ,  $\theta_{01}(+) = y$ ,  $\theta_{10}(+) = -xy^{-1}$ ,  $\theta_{11}(+) = 0$ ,  $\theta_{00}(-) = 0$ ,  $\theta_{01}(-) = -x^{-1}y$ ,  $\theta_{10}(-) = y^{-1}$ ,  $\theta_{11}(-) = 1 + x^{-1}$  で与える. このとき,  $Z(D)$  は  $(-1)^m x^l$  倍 ( $m, l \in \mathbb{Z}$ ) の違いを除いて曲面上の絡み目の不変量になる.

同様の主張が仮想絡み目についても成り立つ. ここでは, [1] に倣って曲面上の絡み目に対しての主張を記した.

**定理 1.3** ([2]).  $w(D)$  を  $D$  のひねり数とする.  $\Theta$  を,  $\theta_{00}(+) = 1 - x$ ,  $\theta_{01}(+) = y$ ,  $\theta_{10}(+) = xy^{-1}$ ,  $\theta_{11}(+) = 0$ ,  $\theta_{00}(-) = 0$ ,  $\theta_{01}(-) = x^{-1}y$ ,  $\theta_{10}(-) = y^{-1}$ ,  $\theta_{11}(-) = 1 - x^{-1}$  で与える. このとき,  $(-1)^{w(D)} Z(D)$  は  $x^m$  倍 ( $m \in \mathbb{Z}$ ) の違いを除いて仮想絡み目の不変量になる.

定理 1.3 の不変量を **JKSS 不変量** と呼ぶ.

次に, 分配関数 ならびに JKSS 不変量の, 行列式を用いた計算方法を紹介する. 以下では, 行番号, 列番号をそれぞれ  $1_0, 1_1, 2_0, 2_1, \dots, n_0, n_1$  と数える.

例 1.4. 下の行列では, 4 となっている成分を “ $3_0$  行  $2_1$  列成分” と表す.

$$\begin{array}{c} 1_0 \quad 1_1 \quad 2_0 \quad 2_1 \quad 3_0 \quad 3_1 \\ \begin{array}{c} 1_0 \\ 1_1 \\ 2_0 \\ 2_1 \\ 3_0 \\ 3_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$2 \times 2$  行列  $M_i$  を,  $M_i := \begin{pmatrix} \theta_{00}(\varepsilon_i) & -\theta_{01}(\varepsilon_i) \\ -\theta_{10}(\varepsilon_i) & \theta_{11}(\varepsilon_i) \end{pmatrix}$  で定義する. そして,  $2n \times 2n$  行列  $M_D$  を,  $M_D := \text{diag}(M_1, \dots, M_n)$  とする. さらに,  $|D|$  の各頂点  $v_i$  で, 開正則近傍  $N(v_i, |D|)$  をとる. すると,  $N(v_i, |D|) - \{v_i\}$  は 4 つの開弧 (**open arc**) で構成される. この 4 つの開弧に, その位置に応じて  $i_0^-, i_1^-, i_0^+, i_1^+$  のラベルを付ける (図 5).

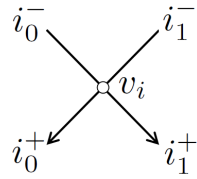


図 5 ラベルの付け方

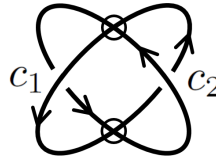


図 6

2 つの開弧  $i_a^-$  と  $j_b^+$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a, b \in \{0, 1\}$ ) が  $|D|$  上で同じ辺であるとき  $i_a \leftarrow j_b$  と書く. そして,  $2n \times 2n$  行列  $P_D = (p_{i_a j_b})$  を次で定義する.

$$p_{i_a j_b} = \begin{cases} 1 & (i_a \leftarrow j_b), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$U = (u_{i_a j_b}) := M_D - P_D$  とする.

定理 1.5 ([1]).  $Z(D) = \det U$

例 1.6. 有向仮想絡み目図式  $D$  (図 6) の 分配関数  $Z(D)$  と JKSS 不変量を, 2 つの方法で計算する.

まず, 定義 1.1 を使って計算する.  $|D|$  のラベリングは図 7 の 6 種類である.

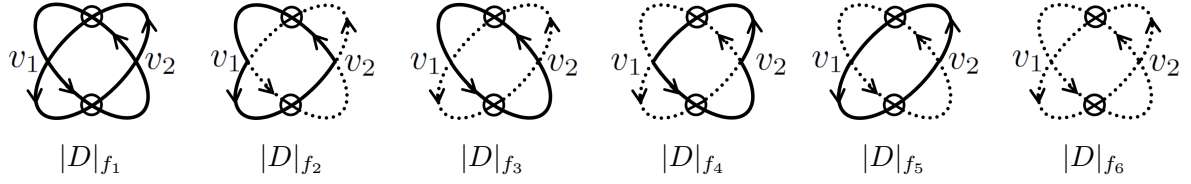


図 7

いま,  $\varepsilon_1 = +$ ,  $\varepsilon_2 = -$  なので,

$$\begin{aligned}
 Z(D) &= (-1)^{s(|D|, f_1, 2)} \prod_{i=1}^2 \langle v_i | f_1 \rangle + (-1)^{s(|D|, f_2, 2)} \prod_{i=1}^2 \langle v_i | f_2 \rangle + (-1)^{s(|D|, f_3, 2)} \prod_{i=1}^2 \langle v_i | f_3 \rangle \\
 &\quad + (-1)^{s(|D|, f_4, 2)} \prod_{i=1}^2 \langle v_i | f_4 \rangle + (-1)^{s(|D|, f_5, 2)} \prod_{i=1}^2 \langle v_i | f_5 \rangle + (-1)^{s(|D|, f_6, 2)} \prod_{i=1}^2 \langle v_i | f_6 \rangle \\
 &= (\theta_{00}(+) \theta_{11}(+) - \theta_{01}(+) \theta_{10}(+)) (\theta_{00}(-) \theta_{11}(-) - \theta_{01}(-) \theta_{10}(-)) \\
 &\quad - \theta_{00}(+) \theta_{11}(-) - \theta_{11}(+) \theta_{00}(-) - \theta_{01}(+) \theta_{01}(-) - \theta_{10}(+) \theta_{01}(-) + 1
 \end{aligned}$$

と計算できる. ゆえに JKSS 不変量は,  $(-1)^{w(D)} Z(D) = x^{-1} - y^{-2}$  である.

次に, 行列式を用いて計算する.  $\varepsilon_1 = +$ ,  $\varepsilon_2 = -$  であり,  $1_0 \leftarrow 2_1$ ,  $1_1 \leftarrow 2_0$ ,  $2_0 \leftarrow 1_1$ ,  $2_1 \leftarrow 1_0$  なので,

$$M_D = \begin{pmatrix} \theta_{00}(+) & -\theta_{01}(+) & 0 & 0 \\ -\theta_{10}(+) & \theta_{11}(+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{00}(-) & -\theta_{01}(-) \\ 0 & 0 & -\theta_{10}(-) & \theta_{11}(-) \end{pmatrix}, \quad P_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
 Z(D) &= \det \begin{pmatrix} \theta_{00}(+) & -\theta_{01}(+) & 0 & -1 \\ -\theta_{10}(+) & \theta_{11}(+) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \theta_{00}(-) & -\theta_{01}(-) \\ -1 & 0 & -\theta_{10}(-) & \theta_{11}(-) \end{pmatrix} \\
 &= (\theta_{00}(+) \theta_{11}(+) - \theta_{01}(+) \theta_{10}(+)) (\theta_{00}(-) \theta_{11}(-) - \theta_{01}(-) \theta_{10}(-)) \\
 &\quad - \theta_{00}(+) \theta_{11}(-) - \theta_{11}(+) \theta_{00}(-) - \theta_{01}(+) \theta_{01}(-) - \theta_{10}(+) \theta_{01}(-) + 1
 \end{aligned}$$

と計算できる. ゆえに JKSS 不変量は,  $(-1)^{w(D)} Z(D) = x^{-1} - y^{-2}$  である.

[1] によって定理 1.5 の証明が与えられているが, 本稿ではその別証明を与える.

## 2 別証明

$\mathfrak{S}_{2n}$  を  $1_0, 1_1, 2_0, 2_1, \dots, n_0, n_1$  からなる  $2n$  次対称群とする.  $\mathfrak{S}_{2n}$  の部分集合  $\mathfrak{S}_{2n}^D$  を  $\mathfrak{S}_{2n}^D := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid \forall i_a, \sigma(i_a) = i_0, i_1 \text{ または } i_a \leftarrow \sigma(i_a)\}$  とする. また,  $\mathfrak{S}_{2n}^D$  の部分集合  $X$  を  $X :=$

$\{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid \exists i, \text{ s.t. } \sigma(i_0) = i_1 \text{ かつ } \sigma(i_1) = i_0\}$  とする. ここで,  $g_U : \mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  を,

$$g_U(\sigma, i) = \begin{cases} u_{i_0 i_0} u_{i_1 i_1} - u_{i_0 i_1} u_{i_1 i_0} & (\text{if } \sigma(i_a) = i_a \ (a = 0, 1)) \\ u_{i_0 \sigma(i_0)} u_{i_1 \sigma(i_1)} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義する.

**補題 2.1.**  $\det U = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n g_U(\sigma, i)$  が成り立つ.

$|D|$  の辺集合の部分集合  $E'$  を  $E' := \{e \in E \mid e \text{ は } |D| \text{ のループ辺}\}$  で定義する. ただし, ループ辺とは, 両端が同じ頂点に接続する辺のことである.  $\mathcal{L}(|D|)$  の部分集合  $\mathcal{L}_1(|D|)$  を  $\mathcal{L}_1(|D|) := \{f \in \mathcal{L}(|D|) \mid \forall e \in E', f(e) = 1\}$  と定義する. 特に  $E' = \emptyset$  のとき  $\mathcal{L}_1(|D|) = \mathcal{L}(|D|)$  である. また,  $v_i$  に接続するループ辺の集合を  $E'_i$  とする. 任意の  $f \in \mathcal{L}(|D|)$ ,  $E''_i \subset E'_i$  に対し,  $f_{E''_i} : E \rightarrow \{1, 2\}$  を,

$$f_{E''_i}(e) := \begin{cases} 2 & (\text{if } e \in E''_i), \\ f(e) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. 特に,  $E''_i = \emptyset$  のとき  $f_{E''_i} = f$  である. また, 一般に  $f_{E''_i} \in \mathcal{L}(|D|)$  である. ここで,  $h : \mathcal{L}_1(|D|) \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  を,

$$h(f, i) := \sum_{E''_i \subset E'_i} (-1)^{s(|D|, f_{E''_i}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{E''_i} \rangle$$

で定義する. 特に,  $E'_i = \emptyset$  のとき  $h(f, i) = \langle v_i | f \rangle$  である.

**例 2.2.** 図 8 の場合で  $h(f, i)$  を計算する.

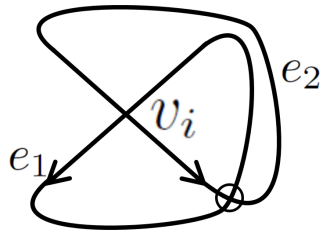


図 8

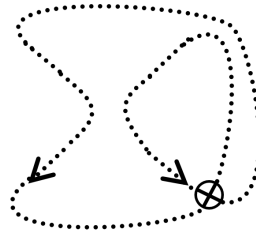


図 9

$E'_i = \{e_1, e_2\}$  とすると,

$$\begin{aligned} h(f, i) &= (-1)^{s(|D|, f_{\emptyset}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\emptyset} \rangle + (-1)^{s(|D|, f_{\{e_1\}}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\{e_1\}} \rangle \\ &\quad + (-1)^{s(|D|, f_{\{e_2\}}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\{e_2\}} \rangle + (-1)^{s(|D|, f_{\{e_1, e_2\}}, 2) - s(|D|, f, 2)} \langle v_i | f_{\{e_1, e_2\}} \rangle \\ &= \langle v_i | f \rangle - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1 \\ &= (\theta_{00}(\varepsilon_i) \theta_{11}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i) \theta_{10}(\varepsilon_i)) - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1 \end{aligned}$$

となる.  $|D|_{f_{\{e_1, e_2\}}}$  上で,  $v_i$  がスムージングされて 図 9 の 1 つのザイフェルト円周ができることに注意である.

**補題 2.3.**  $Z(D) = \sum_{f \in \mathcal{L}_1(|D|)} (-1)^{s(|D|, f, 2)} \prod_{i=1}^n h(i, f)$  が成り立つ.

**補題 2.4.**  $\mathcal{L}_1(|D|)$  と  $\mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X$  の間にある 1 対 1 対応があり, 次の条件 (\*) を満たす.

• 対応する  $f \in \mathcal{L}_1(|D|)$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X$  について,  $h(f, i)$ ,  $g_U(\sigma, i) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  が  $-1$  倍の違いを除いて一致する. . . . (\*)

(補題 2.4 の証明)

条件 (\*) を満たす 一対一対応を構成する. まず, 各  $f \in \mathcal{L}_1(|D|)$  に対し,  $\sigma : \{1_0, \dots, n_1\} \rightarrow \{1_0, \dots, n_1\}$  を構成する. 各  $i$  で  $N(v_i, |D|_f) - \{v_i\}$  の 4 つの開弧のラベリングによって以下の 3 つの場合に分け,  $\sigma(i_0)$  と  $\sigma(i_1)$  を定める. ( $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a, b, c \in \{0, 1\}$ )

(1) 4 つの開弧が全て 2 でラベリングされているとき.  $j_a^+, k_b^+$  を  $i_0 \leftarrow j_a$ ,  $i_1 \leftarrow k_b$  なる開弧とし,  $\sigma(i_0) = j_a$ ,  $\sigma(i_1) = k_b$  と定める.

(2) 2 つの開弧のみが 2 でラベリングされているとき.  $i_a^-, i_b^+$  が 2 でラベリングされているとする. まず,  $j_c^+$  を  $i_a \leftarrow j_c$  なる開弧とし,  $\sigma(i_a) = j_c$  とする. 次に,  $a \neq b$  のとき  $\sigma(i_b) = i_a$  とし,  $a = b$  のとき  $c \neq a$  なる  $c$  で  $\sigma(i_c) = i_c$  と定める.

(3) 4 つの開弧が全て 1 でラベリングされているとき.  $\sigma(i_0) = i_0$ ,  $\sigma(i_1) = i_1$  と定める.

実際には, 図 10 のように  $N(v_i, |D|_f)$  と  $\sigma$  が対応している. (図 10 では 2 でラベリングされた  $i_c^-$  が  $j_a^+$  (または  $k_b^+$ ) と同じ辺であるとき,  $i_c^-$  の上側に  $j_a^+$  (または  $k_b^+$ ) と書いている.)

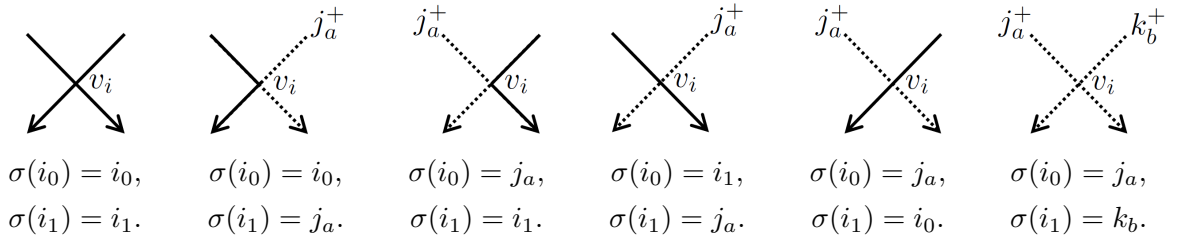


図 10

**Claim 2.5.** 上で構成した,  $f$  に対応する  $\sigma$  について  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X$  が成り立つ.

逆の対応を構成する. 各  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X$  に対し, 写像  $f : \{i_a^-, i_a^+ \mid i \in \{1, \dots, n\}, a \in \{0, 1\}\} \rightarrow \{1, 2\}$  を, 各  $i$  で以下の 3 つの規則で定める.

規則 1.  $\sigma(i_a) = i_b$  のとき,  $f(i_a^-) = 1$ ,  $f(i_b^+) = 1$  とする.

規則 2.  $\sigma(i_a) = j_b$  ( $i \neq j$ ) のとき,  $f(i_a^-) = 2$  とする.

規則 3.  $f(i_0^+), f(i_1^+)$  のうち, 規則 1, 2 で値の定まらなかったものがあるとき, その値を 2 とする.

例 2.6.  $\sigma(i_0) = i_1, \sigma(i_1) = j_a$  ( $i \neq j$ ) のとき,  $f(i_0^-), f(i_0^+), f(i_1^-), f(i_1^+)$  の値を定める. まず, 規則 1 より  $f(i_0^-) = 1, f(i_1^+) = 1$  と定める (図 11 ①). 次に, 規則 2 より  $f(i_1^-) = 2$  と定める (図 11 ②). そして, 規則 3 より  $f(i_0^+) = 2$  と定める (図 11 ③).

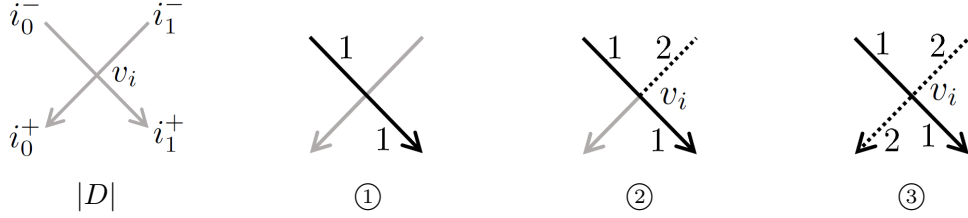


図 11

**Claim 2.7.** 任意の  $i_a, i_a \leftarrow j_b$  なる  $j_b$  に対し,  $f(i_a^-) = f(j_b^+)$  が成り立つ. よって,  $f$  によって  $|D|$  の辺集合  $E$  から  $\{1, 2\}$  への写像  $f$  を定めることができ, この  $f$  について,  $f \in \mathcal{L}_1(|D|)$  が成り立つ.

また, この対応は上で構成した  $\mathcal{L}_1(|D|)$  から  $\mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X$  への対応の逆の対応になっている. 以下では,  $f, \sigma$  はこの対応で対応する組とする.

この一対一対応が, 条件 (\*) を満たすことを示す. 図 12 の 16 種類の頂点で,  $h(f, i), g_U(\sigma, i) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  が  $-1$  倍を除いて一致することを示せば良い.

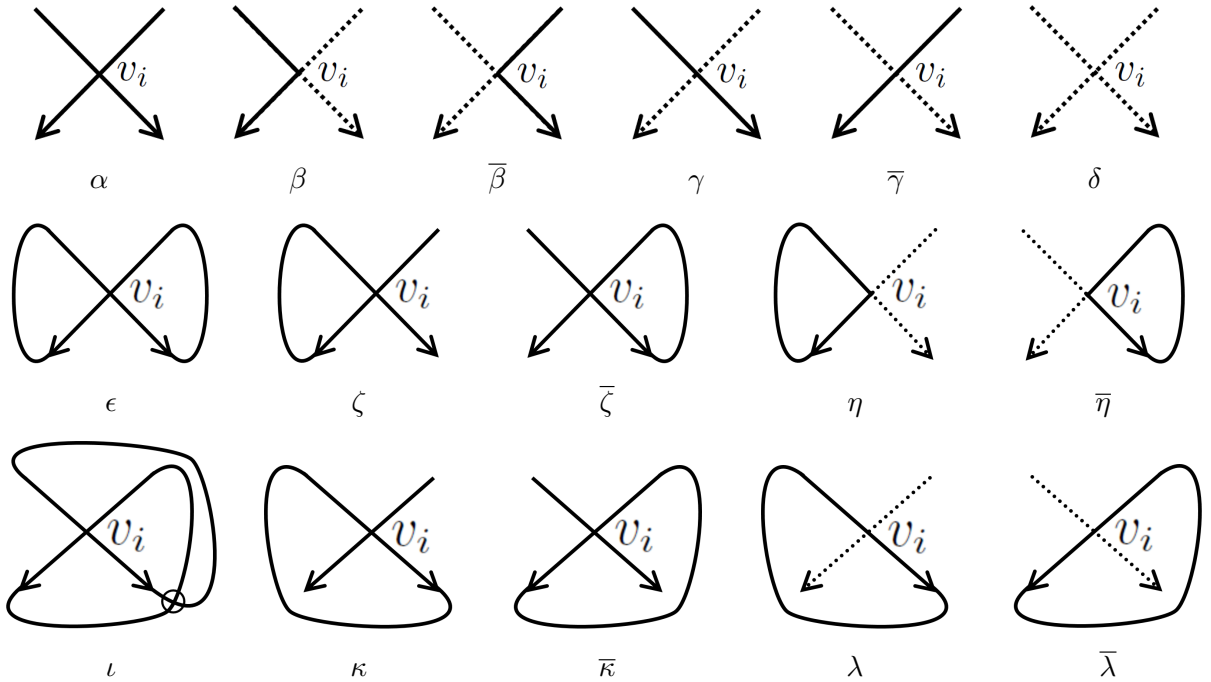


図 12  $\alpha \sim \delta$  はループ辺を持たない.  $\zeta, \bar{\zeta}, \eta, \bar{\eta}, \kappa, \bar{\kappa}, \lambda, \bar{\lambda}$  は 1 つのみの,  $\epsilon, \iota$  は 2 つのループ辺を持つ.

ここでは、図 12 の  $\iota$  の場合について示す。まず、 $h$  の定義から  $h(f, i) = \theta_{00}(\varepsilon_i)\theta_{11}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i)\theta_{10}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1$  となる。一方、この  $f$  に対応する置換  $\sigma$  について、 $\sigma(i_0) = i_0$ ,  $\sigma(i_1) = i_1$  である。よって、 $g_U(\sigma, i) = u_{i_0 i_0} u_{i_1 i_1} - u_{i_0 i_1} u_{i_1 i_0}$  となる。いま、 $v_i$  の符号は  $\varepsilon_i$  であり、 $i_0 \leftarrow i_1$ ,  $i_1 \leftarrow i_0$  より、

$$\begin{aligned} g_U(\sigma, i) &= (\theta_{00}(\varepsilon_i) - p_{i_0 i_0})(\theta_{11}(\varepsilon_i) - p_{i_1 i_1}) - (-\theta_{01}(\varepsilon_i) - p_{i_0 i_1})(-\theta_{10}(\varepsilon_i) - p_{i_1 i_0}) \\ &= (\theta_{00}(\varepsilon_i) - 0)(\theta_{11}(\varepsilon_i) - 0) - (-\theta_{01}(\varepsilon_i) - 1)(-\theta_{10}(\varepsilon_i) - 1) \\ &= \theta_{00}(\varepsilon_i)\theta_{11}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i)\theta_{10}(\varepsilon_i) - \theta_{01}(\varepsilon_i) - \theta_{10}(\varepsilon_i) - 1 \end{aligned}$$

となり、これは  $h(\sigma, i)$  と  $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  として一致している。

他の場合も同様にして計算すると、

$$h(f, i) = \begin{cases} g_U(\sigma, i) & (\text{if } \alpha, \gamma, \bar{\gamma}, \delta, \epsilon, \zeta, \bar{\zeta}, \iota, \kappa, \bar{\kappa}, \lambda, \bar{\lambda}), \\ -g_U(\sigma, i) & (\text{if } \beta, \bar{\beta}, \eta, \bar{\eta}), \end{cases}$$

となる。よって、補題 2.4 が示された。(Claim 2.5 と Claim 2.7 の証明は省略する。)  $\square$

ところで、定理 1.5 を示すには、補題 2.1 と補題 2.3 より、

$$\sum_{f \in \mathcal{L}_1(|D|)} (-1)^{s(|D|, f, 2)} \prod_{i=1}^n h(i, f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \setminus X} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n g_U(\sigma, i)$$

を示せば良い。さらに、補題 2.4 より、

$$(-1)^{s(|D|, f, 2)} \prod_{i=1}^n h(i, f) = \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n g_U(\sigma, i)$$

を示せば良い。ここでさらに、補題 2.4 より、頂点  $v_i$  に接続するループ辺によらず、

$$h(f, i) = \begin{cases} g_U(\sigma, i) & \left( \text{if } \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} v_i, \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \end{array} v_i, \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \end{array} v_i, \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \end{array} v_i \right), \\ -g_U(\sigma, i) & \left( \text{if } \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \end{array} v_i, \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \end{array} v_i \right), \end{cases}$$

が成り立つ。そこで、 $|D|_f$  において  $\# \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} v_i \right\} + \# \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \end{array} v_i \right\} = M_f$  とする。このとき、

$(-1)^{s(|D|, f, 2)} \prod_{i=1}^n h(f, i) = (-1)^{M_f} (-1)^{s(|D|, f, 2)} \prod_{i=1}^n g_U(\sigma, i)$  が成り立つ。よって、 $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{M_f} (-1)^{s(|D|, f, 2)}$  を示せば定理 1.5 が示される。



$s = s(|D|, f, 2)$  とし,  $|D|_f$  の  $f^{-1}(2)$  によるサイフェルト円周をそれぞれ  $C_1, \dots, C_s$  とする. サイフェルト円周  $C_t$  ( $t \in \{1, \dots, s\}$ ) が通過する頂点のみで, 補題 2.4 で  $f$  から  $\sigma$  を構成したのと同様に写像  $\tau_t$  を構成する. ただし, スムージングを行った頂点では,  $C_t$  が通過する辺でのみ写像を構成する. すると,  $\tau_t$  は巡回置換となる. また,  $\sigma, \tau_t$  の定め方から  $\sigma = \prod_{t=1}^s \tau_t$  となる.

例 2.8. 図 13 の  $|D|_f$  を用いる.

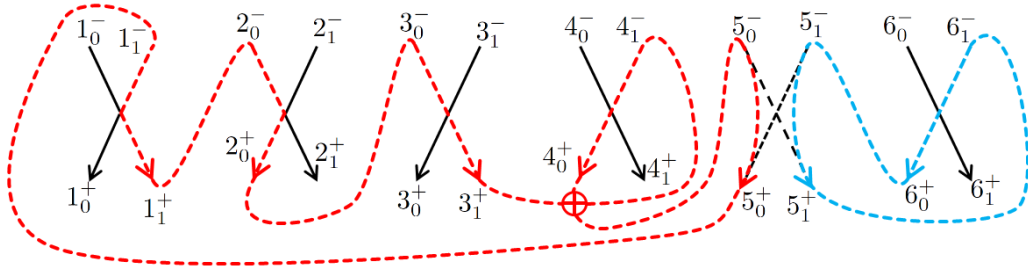


図 13  $C_1$  を赤の点線,  $C_2$  を青の点線で表す.

図 13 に対応する置換は,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 & 4_0 & 4_1 & 5_0 & 5_1 & 6_0 & 6_1 \\ 1_0 & 5_0 & 1_1 & 2_1 & 2_0 & 3_0 & 4_1 & 3_1 & 4_0 & 6_0 & 6_1 & 5_1 \end{pmatrix}$$

である. 一方,

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 & 4_0 & 4_1 & 5_0 \\ 1_0 & 5_0 & 1_1 & 2_1 & 2_0 & 3_0 & 4_1 & 3_1 & 4_0 \end{pmatrix} = (1_1 \ 5_0 \ 4_0 \ 4_1 \ 3_1 \ 3_0 \ 2_0)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 5_1 & 6_0 & 6_1 \\ 6_0 & 6_1 & 5_1 \end{pmatrix} = (5_1 \ 6_0 \ 6_1)$$

である. この  $|D|_f$  で  $\sigma = \tau_1 \tau_2$  となっていることが確認できた.

$|D|_f$  で  $\# \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \text{---} \\ \text{---} \end{array} v_i \right\} = K_f$ ,  $\# \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \text{---} \\ \text{---} \end{array} v_i \right\} + \# \left\{ \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ \text{---} \diagdown \text{---} \\ \text{---} \end{array} v_i \right\} = L_f$  とする. このとき, 巡回置換  $\tau_1, \dots, \tau_t$  の長さの和は, その構成方法から  $2K_f + 2L_f + M_f$  となる. また, 巡回置換は (巡回置換の長さ)  $- 1$  個の互換の積で表される. よって,  $\sigma$  は  $2K_f + 2L_f + M_f - s$  個の互換の積で表される. ゆえに,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma) &= (-1)^{2K_f + 2L_f + M_f - s} \\ &= (-1)^{2K_f} (-1)^{2L_f} (-1)^{M_f} (-1)^{-s} \\ &= (-1)^{M_f} (-1)^{s(|D|, f, 2)} \end{aligned}$$

となる. これで定理 1.5 の証明を終了する.

## 参考文献

- [1] F. Jaeger, L. H. Kauffman, H. Saleur, *The Conway Polynomial in  $\mathbb{R}^3$  and in Thickened Surfaces: A New Determinant Formulation*, Journal of Combinatorial Theory, Series **B61**, 237–259 (1994).
- [2] J. Sawollek, *On Alexander-Conway Polynomials for Virtual Knots and Links*, arXiv: math/9912173v2 (math. GT) (2001).
- [3] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20**, 663–690 (1999).