

弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームから導かれる 準同型写像の構造

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科数物科学専攻 修士 2 年

絹野 凜

概要

結び目の領域交差交換 ([3]) を用いた領域選択ゲームと領域凍結交差交換 ([1]) をゲームとして考えたものの，“領域”の代わりに“弧”を選択する弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームについて，それぞれクリアできるための必要十分条件と，クリアの仕方が何通りあるのかを示す．また，結び目の数理論 IV にてご質問いただいた弧交差交換および弧凍結交差交換について改めて定義し，これらが結び目解消操作であることを示す．

1 準備

G を結び目射影図とする．つまり S^1 の平面へのはめこみとすると， G は各頂点の次数が 4 のグラフである．図 1 のように，両端点が同じ頂点である辺を**ループ**という．本稿では，ループのない射影図および図式のみを扱う．

$V(G)$ をグラフ G の頂点全体の集合， $E(G)$ をグラフ G の辺全体の集合とする． $A, B \in 2^{E(G)}$ または $A, B \in 2^{V(G)}$ に対して， A と B の和を対称差で定義する．つまり，

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$2^{E(G)}, 2^{V(G)}$ は，対称差を和とする $\mathbb{Z}_2$ -線型空間とみなすことができる．本稿では，集合 X の濃度を $|X|$ または $\#X$ と表すことにする．

注意 1. $X = E(G)$ または $V(G)$ ， $|X| < \infty$ とする． $A_1, A_2 \in 2^X$ ならば

$$|A_1 + A_2| \equiv |A_1| + |A_2| \pmod{2}.$$

G を結び目射影図とし， G の交点 v を 1 つ選ぶ． G に向きを与え，図 2 のように向きを保ったまま結び目射影図をつなぎかえて v をなくす操作のことを**スプライス**という．結び目射影図を 1 回スプライスすると，2 つの結び目射影図が重なったものになる．

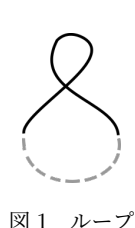


図 1 ループ

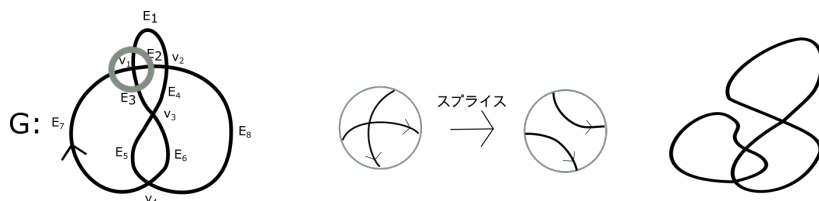


図 2 スプライス

G を結び目射影図とし, $E(G) = \{E_1, \dots, E_{2q}\}$, $V(G) = \{v_1, \dots, v_q\}$ とする. 接続行列 $A(G)$ を (i, j) 成分 m_{ij} が以下で定義される $2q \times q$ 行列とする.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_j \in \partial E_i) \\ 0 & (v_j \notin \partial E_i). \end{cases}$$

ただし, ∂E_i は E_i の 2 つの端点からなる集合を表す.

2 弧選択ゲームから導かれる準同型写像 φ の構造

2.1 弧選択ゲーム

領域選択ゲームの“領域”の代わりに“弧”を選択する弧選択ゲーム (図 3) のルールを次のように定義する ([4]).

- 結び目射影図の各頂点にオンとオフの切り替えられるランプを置く.
- 弧を選択すると, その弧の両端のランプのオンとオフが切り替わる.
- すべてのランプがオンになるとゲームクリアとなる.

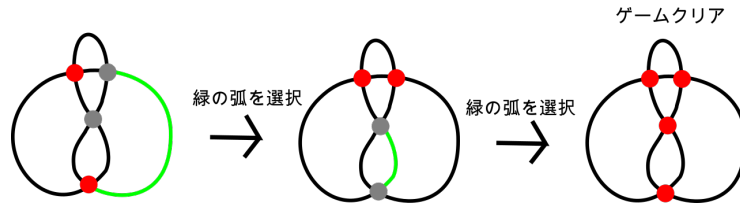


図 3 弧選択ゲームの例

2.2 弧選択ゲームから導かれる準同型写像 φ

G を結び目射影図とし, $V(G), E(G)$ をそれぞれ G の頂点の集合, 辺の集合とする. それぞれの頂点 v において, $d_v : 2^{E(G)} \rightarrow \mathbb{Z}$ を次のように定義する. $H \in 2^{E(G)}$ に対して,

$$d_v(H) := \#\{E_\alpha \in H \mid v \in \partial E_\alpha\}.$$

また, 写像 $\varphi : 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を以下のように定義する. $H \in 2^{E(G)}$ に対して,

$$\varphi(H) := \{v \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

命題 2.1. ([5, 命題 2.1]) φ は準同型写像である.

命題 2.2. ([5, 命題 2.2]) 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $v \in \varphi(H)$,
- (2) 弧選択ゲームにおいて, H を選択することで v のランプのオン・オフが切り替わる.

2.3 準同型写像 φ の構造

G を結び目射影図とし, $E(G) = \{E_1, \dots, E_{2q}\}, V(G) = \{v_1, \dots, v_q\}$ とする.

2.3.1 φ の置き換え

$I_{E(G)} : 2^{E(G)} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2q}$ を以下のように与えられる同型写像とする.

$$\begin{aligned} I_{E(G)}(\{E_1\}) &= \mathbf{a}_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{2q}, \\ I_{E(G)}(\{E_2\}) &= \mathbf{a}_2 = (0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_2^{2q}, \\ &\vdots \\ I_{E(G)}(\{E_{2q}\}) &= \mathbf{a}_{2q} = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_2^{2q}. \end{aligned}$$

$I_{V(G)} : 2^{V(G)} \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$ を以下のように与えられる同型写像とする.

$$\begin{aligned} I_{V(G)}(\{v_1\}) &= \mathbf{f}_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_2^q, \\ I_{V(G)}(\{v_2\}) &= \mathbf{f}_2 = (0, 1, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_2^q, \\ &\vdots \\ I_{V(G)}(\{v_q\}) &= \mathbf{f}_q = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{Z}_2^q. \end{aligned}$$

準同型写像 $I_{V(G)} \circ \varphi \circ (I_{E(G)})^{-1} : \mathbb{Z}_2^{2q} \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$ を $\tilde{\varphi}$ で表す. 基底 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2q}\}$ と $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q\}$ に関して, $A(G)$ の定義から, $\tilde{\varphi}$ は $A(G)$ を表現行列にもつ $\mathbb{Z}_2$ -線形写像であることがわかる. (すなわち $x \in \mathbb{Z}_2^{2q}$ に対して, $\tilde{\varphi}(x) = xA(G)$.) したがって準同型写像 φ は, $\varphi = (I_{V(G)})^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ I_{E(G)}$ と表される.

2.3.2 $\text{Im}\varphi$

この節では, $\dim(\text{Im}\varphi)$ を G の頂点の数 q を用いて表し, その基底を与える.

命題 2.3. ([5, 命題 3.1]) $\dim(\text{Im}\varphi) < q$.

命題 2.4. ([5, 命題 3.2]) $i = 1, 2, \dots, q-1$ に対して

$$\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_q \in \text{Im}\tilde{\varphi}.$$

命題 2.5. ([5, 命題 3.3]) $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_q, \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_q, \dots, \mathbf{f}_{q-1} + \mathbf{f}_q$ は一次独立である.

命題 2.3, 命題 2.4, 命題 2.5 より次の定理が得られる.

定理 2.6. ([5, 定理 3.4]) $\dim(\text{Im}\varphi) = q-1$.

系 2.7. ([5, 系 3.5]) $\{\{v_1, v_q\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}\}$ は $\text{Im}\varphi$ の基底である.

系 2.7 より, 任意の $i, j (i \neq j)$ に対して $\{v_i, v_j\} \in \text{Im}\varphi$ であることもいえる. さらに系 2.7 と注意 1 より次の系が成り立つ.

系 2.8. ([5, 系 3.6]) $V \in 2^{V(G)}$ に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $V \in \text{Im}\varphi$,
- (2) V は偶数個の頂点の集合.

つまり, 弧選択ゲームがクリアできるための必要十分条件は, 偶数個のランプがオフであることである.

2.3.3 $\text{Ker}\varphi$

この節では, $\text{Ker}\varphi$ について考える. まず, 命題 2.2 より, 以下が導かれる.

命題 2.9. ([5, 命題 3.7]) 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $H \in \text{Ker}\varphi$,
- (2) 弧選択ゲームにおいて, H を選択したときにすべてのランプのオン・オフの状態が変わらない.

準同型定理より次の系がわかる.

系 2.10. ([5, 系 3.8]) $\dim(\text{Ker}\varphi) = q + 1$.

結び目射影図 G から 1 つ弧を選び, 選んだ弧を e_X とする. 各 v_i に対して, v_i でスプライスし, e_X を含まない成分に対応する $E(G)$ の部分集合を B_i とする (図 4). また, $E(G)$ を B_0 とする.



図 4 $e_X = E_1$ とし v_1 でスプライスをした様子と B_1

例 2.1. 8 の字結び目の B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 は図 5 のようになる. ($e_X = E_1$ としている.)

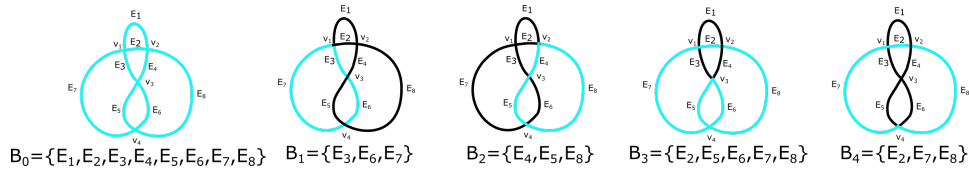


図 5 8 の字結び目の B_i

命題 2.11. ([5, 命題 3.9]) $\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ は $\text{Ker}\varphi$ の基底である.

証明. $\dim(\text{Ker}\varphi) = q + 1$ より, $\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ が一次独立であることを示せばよい. $\varepsilon_0 B_0 + \varepsilon_1 B_1 + \varepsilon_2 B_2 + \dots + \varepsilon_q B_q = \emptyset$ とする. $e_X \notin B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ で, $e_X \in B_0$ であるので, $\varepsilon_0 = 0$.

次に, v_i の近傍に注目する. v_i に接続する 4 つの弧を時計回りに $e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, e_{i4}$ とする. 図 6, 7 より, $e_{i1} \in B_i \Leftrightarrow e_{i3} \notin B_i$ かつ各 $j (\neq i)$ に対して $e_{i1} \in B_j \Leftrightarrow e_{i3} \in B_j$ が成り立つ. よって $\varepsilon_i = 0$.

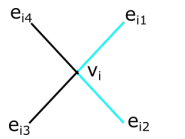


図 6 B_i の v_i の近傍

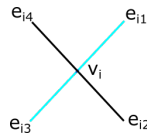


図 7 B_j の v_i の近傍

したがって $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_q = 0$ であるから, $\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ は一次独立である. よって, $\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ は $\text{Ker}\varphi$ の基底である. $\square$

系 2.12. ([5, 系 3.10]) クリアできる 1 つの解を H_X とし, 固定する. すべての解は $H_X + \sum_{i=0}^q \varepsilon_i B_i$ ($\varepsilon_i \in \{0, 1\}$) と表される. つまり, クリアの仕方は全部で 2^{q+1} 通りある.

3 弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像 ψ の構造

3.1 弧凍結選択ゲーム

弧凍結選択ゲーム (図 8) のルールを次のように定義する.

- 結び目射影図の各頂点にオンとオフの切り替えられるランプを置く.
- 弧を選択すると, その弧の両端以外のすべてのランプのオンとオフが切り替わる.
- すべてのランプがオンになるとゲームクリアとなる.

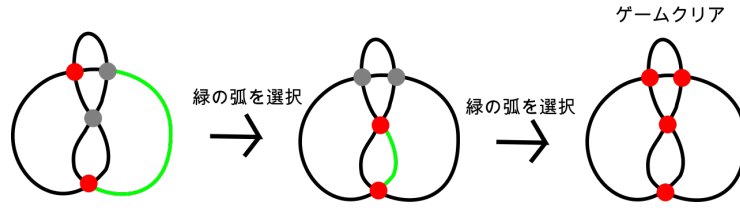


図 8 弧凍結選択ゲームの例

3.2 弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像 ψ

$G, E(G), V(G)$ および写像 $d_v : 2^{E(G)} \rightarrow \mathbb{Z}$ と $\varphi : 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を 2.2 節のように定義する. さらに, 写像 $\psi : 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を以下のように定義する. $H(\in 2^{E(G)})$ に対して,

$$\psi(H) := \begin{cases} \{v \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 0 \pmod{2}) \\ \{v \mid d_v(H) \equiv 0 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 1 \pmod{2}). \end{cases}$$

φ と ψ の定義を比較することによって, 以下がわかる.

命題 3.1. ([5, 命題 2.3]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して

- $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, $\psi(H) = \varphi(H)$,
- $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, $\psi(H) = V(G) \setminus \varphi(H) = V(G) + \varphi(H)$.

命題 3.2. ([5, 命題 2.4]) ψ は準同型写像である.

命題 3.3. ([5, 命題 2.5]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して, 次が成り立つ.

- $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ ならば, 弧凍結選択ゲームにおいて H を選択した結果は, 弧選択ゲームにおいて H を選択した結果と一致する.
- $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ ならば, 弧凍結選択ゲームにおいて H を選択した結果は, 弧選択ゲームにおいて H を選択し, さらにすべてのランプのオン・オフを切り替えたものと一致する.

命題 2.2, 命題 3.1, 命題 3.3 より次の命題がわかる.

命題 3.4. ([5, 命題 2.6]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $v \in \psi(H)$,
- (2) 弧凍結選択ゲームにおいて, H を選択することによって v のランプのオン・オフが切り替わる.

3.3 準同型写像 ψ の構造

G を結び目射影図とし, $E(G) = \{E_1, \dots, E_{2q}\}, V(G) = \{v_1, \dots, v_q\}$ とする. $\varphi: 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を 2.2 節のように定義する. また, $\psi: 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を 3.2 節のように定義する.

3.3.1 ψ の置き換え

$I_{V(G)}, I_{E(G)}$ を 2.3.1 節のように定義する.

命題 3.5. ([5, 命題 4.1]) $I_{E(G)}(H) = \sum_{i=1}^{2q} \varepsilon_i \mathbf{a}_i$ ($\varepsilon_i \in \{0, 1\}$) とすると

$$|H| \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2q} \varepsilon_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

$\tilde{\psi}: \mathbb{Z}_2^{2q} \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$ を $I_{V(G)} \circ \psi \circ (I_{E(G)})^{-1}$ で表される準同型写像とする. 命題 3.1 より, 次の命題がわかる.

命題 3.6. ([5, 命題 4.2]) $H \in 2^{E(G)}$ に対して

- $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ のとき $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi}$.
- $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ のとき $\tilde{\psi}(X) = (1, 1, \dots, 1) + \tilde{\varphi}(X)$.

3.3.2 $\text{Im}\psi$

この節では, $\dim(\text{Im}\psi)$ を G の頂点の数 q を用いて表し, その基底を与える. $\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ を 2.3.3 節で与えた $\text{Ker}\varphi$ の基底とする.

補題 3.7. ([5, 補題 4.3]) $i = 1, 2, \dots, q$ に対して $|B_i| \equiv 1 \pmod{2}$.

証明. v_i でスプライスすると, G は 2 成分になる. e_X を含まない方の頂点の数を r とすると, 弧の数は $2r$ である. これらに対応する G の弧の数は $2r + 1$ となるから, $|B_i| \equiv 1 \pmod{2}$. $\square$

補題 3.8. ([5, 補題 4.4]) $i = 1, 2, \dots, q$ に対して $\psi(B_i) = V(G)$.

証明. 補題 3.7 と命題 3.1 および $B_i \in \text{Ker}\varphi$ より, $\psi(B_i) = V(G) + \varphi(B_i) = V(G)$. $\square$

定理 3.9. ([5, 定理 4.5])

- (1) $q \equiv 1 \pmod{2}$ のとき $\dim(\text{Im}\psi) = q$.
- (2) $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき $\dim(\text{Im}\psi) = q - 1$.

系 3.10. ([5, 系 4.6])

- (1) $q \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, 任意の初期状態において弧凍結選択ゲームをクリアすることができる.
- (2) $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, 次の (2-1) と (2-2) は同値である.
 - (2-1) $V \in \text{Im}\psi$,
 - (2-2) V は偶数個の頂点の集合.

つまり, $q \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, 弧凍結選択ゲームは任意の初期状態においてクリアすることができる. また, $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, 弧凍結選択ゲームがクリアできるための必要十分条件は, 偶数個のランプがオフであることである.

3.3.3 $\text{Ker}\psi$

定理 3.9 と準同型定理より次の補題が導かれる.

補題 3.11. ([5, 補題 4.7])

- $q \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, $\dim(\text{Ker}\psi) = q$.
- $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, $\dim(\text{Ker}\psi) = q + 1$.

この節では, $\text{Ker}\psi$ の基底を求める. まず 3.2 節の命題 3.4 より以下が導かれる.

命題 3.12. ([5, 命題 4.8]) 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $H \in \text{Ker}\psi$,
- (2) 弧凍結選択ゲームにおいて, H を選択したときにすべてのランプのオン・オフの状態が変わらない.

命題 3.1 より, 次がわかる.

場合 1: $|H| \equiv 0 \pmod{2}$.

$\psi(H) = \varphi(H)$ であるから, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ かつ $H \in \text{Ker}\varphi$,
- (2) $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ かつ $H \in \text{Ker}\psi$.

場合 2: $|H| \equiv 1 \pmod{2}$.

$\psi(H) = V(G) + \varphi(H)$ であるから, 次の (3) と (4) は同値である.

- (3) $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ かつ $\varphi(H) = V(G)$,
- (4) $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ かつ $H \in \text{Ker}\psi$.

$\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ を 2.3.3 節で与えた $\text{Ker}\varphi$ の基底とし, $B_{1,i} := B_1 + B_i$ ($i = 2, 3, \dots, q$) とする.

補題 3.13. ([5, 補題 4.9]) $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}\}$ は一次独立である.

定理 3.14. ([5, 定理 4.10]) $q \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}\}$ は $\text{Ker}\psi$ の基底となる.

補題 3.15. ([5, 補題 4.11]) $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ かつ $\varphi(H) = V(G)$ となる H が存在する.

証明. $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき $(1, 1, 1, \dots, 1, 1) \in \text{Im}\tilde{\varphi}$ より, $\varphi(H') = V(G)$ となる H' が存在する.

$|H'| \equiv 1 \pmod{2}$ ならば, $H = H'$ とすることで, $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ かつ $\varphi(H) = V(G)$ となる H が得られる.

$|H'| \equiv 0 \pmod{2}$ ならば, $H = H' + B_1$ とする. $|B_1| \equiv 1 \pmod{2}$ と注意 1 より $|H| = |H' + B_1| \equiv |H'| + |B_1| \equiv 1 \pmod{2}$. また, $B_1 \in \text{Ker}\varphi$ より $\varphi(H) = \varphi(H' + B_1) = \varphi(H') + \varphi(B_1) = \varphi(H') = V(G)$. したがって, $|H'| \equiv 0 \pmod{2}$ のときも, $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ かつ $\varphi(H) = V(G)$ となる H が必ず存在する. $\square$

補題 3.15 を満たす H を B_X とする.

補題 3.16. ([5, 補題 4.12]) $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}$ は一次独立である.

定理 3.17. ([5, 定理 4.13]) $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}$ は $\text{Ker}\psi$ の基底となる.

定理 3.17 を示すために, $\text{Ker}\psi = \{H \in \text{Ker}\psi \mid |H| \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{H \in \text{Ker}\psi \mid |H| \equiv 1 \pmod{2}\}$,
 $A_0 := \{H \in \text{Ker}\psi \mid |H| \equiv 0 \pmod{2}\}$, $A_1 := \{H \in \text{Ker}\psi \mid |H| \equiv 1 \pmod{2}\}$ とする.

補題 3.18. ([5, 補題 4.14])

$$S\langle\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}\}\rangle = A_0.$$

補題 3.19. ([5, 補題 4.15]) A_0 の任意の元 B' に対して, $B' + B_X \in A_1$.

証明. (定理 3.17) まず $\text{Ker}\psi \supset S\langle\{B_0, B_{1,2}, \dots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$ を示す. $S := S\langle\{B_0, B_{1,2}, \dots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$
とかく. $H_s \in S$ とすると, $H_s = \alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_{1,2} + \dots + \alpha_q B_{1,q} + \alpha_{q+1} B_X$ をみたす $\alpha_1, \dots, \alpha_{q+1} \in \mathbb{Z}_2$
が存在する.

$\alpha_{q+1} = 0$ のとき, 補題 3.18 より

$$H_s = \alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_{1,2} + \dots + \alpha_q B_{1,q} \in S\langle\{B_0, B_{1,2}, \dots, B_{1,q}\}\rangle = A_0 \subset \text{Ker}\psi.$$

$\alpha_{q+1} = 1$ のとき, $H_s = B' + B_X$ (ただし, $B' := \alpha_1 B_0 + \alpha_2 B_{1,2} + \dots + \alpha_q B_{1,q}$). 補題 3.19 より
 $H_s \in A_1 \subset \text{Ker}\psi$.

よって, $\text{Ker}\psi \supset S\langle\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$.

補題 3.16 より $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}$ は一次独立で, 補題 3.11 より $\dim(\text{Ker}\psi) = q + 1$ である
から, $\text{Ker}\psi = S\langle\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}\rangle$. よって, $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}$ は $\text{Ker}\psi$ の基
底である. $\square$

定理 3.14 と定理 3.17 より次がわかる.

系 3.20. ([5, 系 4.16]) クリアできる 1 つの解を H_X とし, 固定する.

- $q \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, すべての解は $H_X + \varepsilon_0 B_0 + \sum_{i=2}^q \varepsilon_i B_{1,i} (\varepsilon_i \in \{0, 1\})$ と表されるので, ク
リアの仕方は全部で 2^q 通りある.
- $q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, すべての解は $H_X + \varepsilon_0 B_0 + \varepsilon_1 B_X + \sum_{i=2}^q \varepsilon_i B_{1,i} (\varepsilon_i \in \{0, 1\})$ と表される
ので, クリアの仕方は全部で 2^{q+1} 通りある.

4 結び目図式における弧交差交換と弧凍結交差交換

結び目図式のある交差点の上下を入れ替える操作を**交差交換**という. 結び目図式のある局所変形につい
て, その局所変形を有限回行うことで任意の結び目図式を自明な結び目の図式に変形することができる
とき, その局所変形を**結び目解消操作**という. 結び目図式 D に対し, 交差点を避けてある 1 点, すなわち**基
点**をとる. D を基点から向きに沿って 1 周たどっていくとき, すべての交差点において常に先に上側を通
るように基点をとることができるとき, D は**単調である**という. 結び目図式を交差交換することで, 単調な
図式に変形することができるので, 交差交換は結び目解消操作である.

結び目図式から交差点 (とその近傍) を除いたものの各連結成分を**弧**という. 弧は結び目図式を 4 価グラ
フとみなしたときの辺にあたるもの, と言ってもよい. (この論文における弧は, 通常結び目図式の弧と呼
ばれるものと異なり, semi-arc 等と呼ばれるものである.) ある弧 e で**弧交差交換**をするとは, 図 9 のよう
にその弧の両端の交差点において交差交換をすることである. また, ある弧 e で**弧凍結交差交換**をする
とは, 図 10 のようにその弧の両端以外のすべての交差点において交差交換することである. この章では結び
目射影図の弧選択ゲームと弧凍結選択ゲームの応用として, 弧交差交換と弧凍結交差交換が結び目解消操作
であることを示す.

系 3.10 より, 次の定理がわかる.

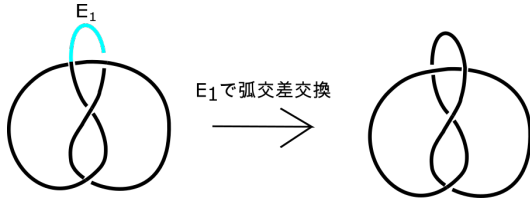


図9 弧交差交換

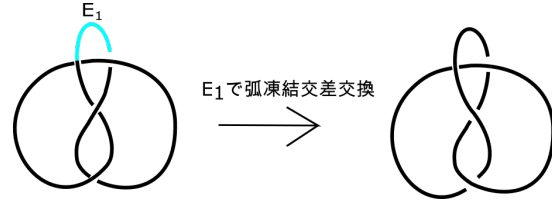


図10 弧凍結交差交換

定理 4.1. 結び目図式の交差点の数を q とする.

- $q \equiv 1 \pmod{2}$ ならば, 任意の交差点での交差交換が弧凍結交差交換によって実現できる. つまり, 有限回の弧凍結交差交換を行うことによって, 任意の交差点のみを交差交換することができる.
- $q \equiv 0 \pmod{2}$ ならば, どの交差点での交差交換も弧凍結交差交換によって実現できない.

系 2.8 より, 次の定理がわかる.

定理 4.2. どの交差点での交差交換も, 弧交差交換によって実現できない.

命題 3.1 より, 次の命題がわかる.

命題 4.3. 弧交差交換をする弧の集合を H とする.

- $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, 弧交差交換をして得られる図式は弧凍結交差交換をして得られる図式と一致する.
- $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ のとき, 弧交差交換をして得られる図式は弧凍結交差交換をして得られる図式の鏡像と一致する.

定理 4.1 と命題 4.3 より, $q \equiv 1 \pmod{2}$ のときは弧交差交換および弧凍結交差交換が結び目解消操作であることがわかる. さらに次のように q の偶奇に依らず, 弧交差交換が結び目解消操作であることを証明できる.

定理 4.4. 弧交差交換は結び目解消操作である. 特に, ライデマイスター移動を用いずに単調な図式にすることができる.

証明. 交差点を1つ選び, v_0 とする. v_0 から向きに沿って結び目をたどり, 道に $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_{2q} v_{2q} (v_{2q} = v_0)$ とラベルをつける. ただし, v_i は交差点, e_i は v_{i-1} と v_i を結ぶ弧とする. v_0 以外の交差点には2つずつラベルがつき, v_0 には v_0, v_{2q} ともう一つのラベルがついている. ここで, v_0 以外の交差点 v に対して $v = v_i = v_j (i < j)$ となっているとする. $e_i e_{i+1}$ が $e_j e_{j+1}$ より下にある場合, つまり図11のいずれかの形になっているとき, $H_i = \{e_1, \dots, e_i\}$ で弧交差交換を行う. この操作を $v_i = v_j (i < j)$ と図11を満たす v_0

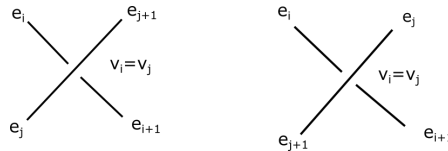


図11 $e_i e_{i+1}$ が $e_j e_{j+1}$ より下にある場合

以外のすべての交差点に対して行くと, 単調な図式が得られる. したがって, 弧交差交換は結び目解消操作である. $\square$

補題 4.3 と定理 4.4 より次の定理が導かれる.

定理 4.5. 弧凍結交差交換は結び目解消操作である. 特に, ライデマイスター移動を用いずに単調な図式 (またはその鏡像) にすることができる.

注意 2. ライデマイスター移動も許せば, 図 13 のように弧交差交換によって図 12 の Δ 変形が実現できる.

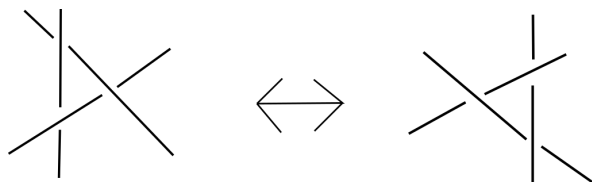


図 12 Δ 変形



図 13 弧交差交換を用いた Δ 変形

注意 3. ライデマイスター移動も許せば, 図 14 のように弧凍結交差交換によって図 12 の Δ 変形が実現できる.

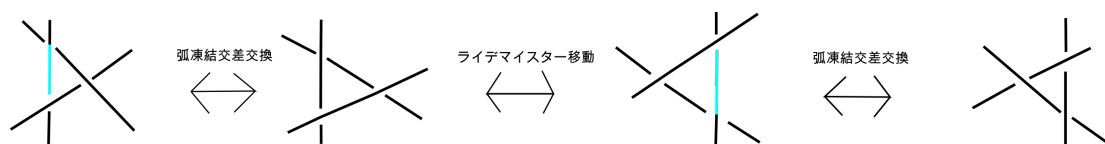


図 14 弧凍結交差交換を用いた Δ 変形

Δ 変形は結び目解消操作 [2] なので, 弧交差交換および弧凍結交差交換も結び目解消操作である.

参考文献

- [1] A. Inoue and R. Shimizu: A subspecies of region crossing change, region freeze crossing change, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 14, 1650075, 9pp.
- [2] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, Math. Ann. **284** (1989), no. 1, 75–89.
- [3] A. Shimizu: Region crossing change is an unknotting operation, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no.3, 693–708.
- [4] 松本知子: 結び目理論によるパズル解析, 2012 年山口大学理学部数理科学科卒業論文.
- [5] 絹野凜: 弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像の構造とゲームの攻略法, 2022 年奈良女子大学修士論文.