

Continued fractions of even type related to amphicheiral two bridge links

門上晃久（金沢大学大学院自然科学研究科）

2021 年 12 月 23 日発表

1 Introduction

以下、数学用語は英単語表記を基本とする。

[Kd] 内にある結果を報告する。[Kd] の主結果は、2-bridge link の link symmetric group [Wh, Hi] の決定である。ordered oriented link に対する *link symmetric group* とは、その link の invertibility や amphicheirality を併せた symmetry を表すものである。amphicheirality のみを考える場合、link の order や orientation を考えるのは不要に思えるが、symmetry の invariant への反映の仕方の多くは、（たとえ 1 成分の場合でも）ordered oriented link としてのものである。今回は link symmetric group そのものには立ち入らず、2-bridge link の amphicheirality の条件のみに注目する。link が *amphicheiral* とは、mirror image と equivalent のときをいう。例えば、2-bridge knot の 1 つである figure eight knot 4_1 は、以下の Figure 1 のように amphicheiral である。以後、図中の四角形内の数は half twist の数を表す。

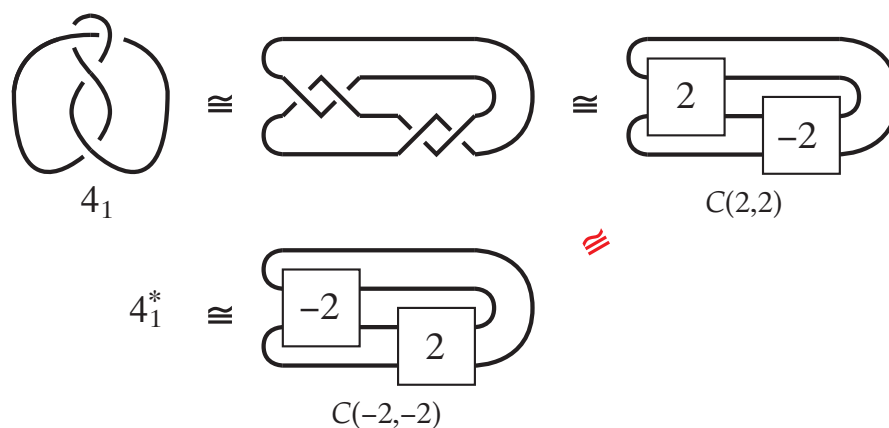


Figure 1: figure eight knot 4_1 の amphicheirality

4_1 の Conway form [Co] は $C(2, 2)$ であり、対称的な数の並びから直ちに amphicheiral であることがわかる。 $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ より、Schubert form [Sc] は $S(5, 2)$ で、この場合 $2^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$ から amphicheiral であることがわかる。

2-component 2-bridge link $6_2^2 = C(3, 3)$ の場合も同様に数の並びから直ちに amphicheiral であることがわかる。 $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ より、 $6_2^2 = S(10, 3)$ でもあり、 $3^2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$ から amphicheiral であることがわかる (Figure 2)。

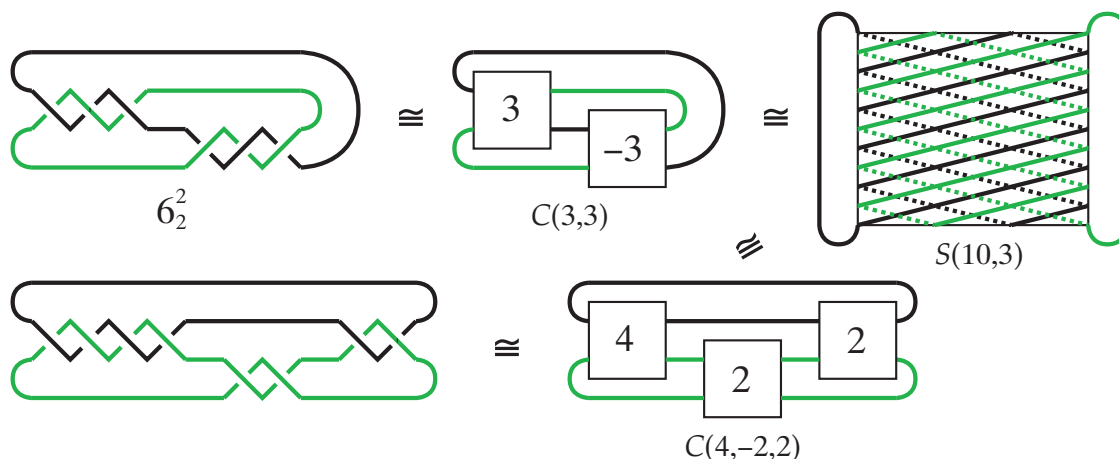


Figure 2: $6_2^2 = C(3, 3)$ の amphicheirality

2-bridge link は 2 つの 2-string trivial tangle の和でできる link のことである。1 つの 2-string trivial tangle は最も見易いものを想定してよいが、もう 1 つの 2-string trivial tangle は、3-ball の境界の S^2 上にある 2 つの string の境界の 4 点を集合として固定する範囲の自由度で考える。これを rational tangle という。rational tangle の表示法は大きく以下の 2 通りある。

(1) 2-string trivial tangle を 2 つの closed loop で twist する。 (Figure 3)

2 つの string の境界の 4 点のうち 1 点 A を固定し、他の 3 点が互いに入れ替わる変化をさせる。 S^2 上で境界の 4 点を 2 つずつに分ける simple closed loop α, β を特別に取り、それらに沿った twist を順に行うことで rational tangle を得る。

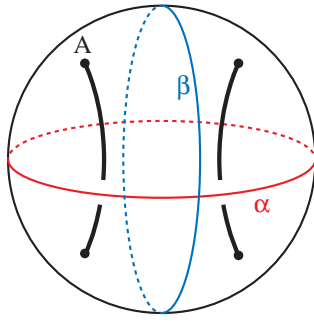


Figure 3: 2-string trivial tangle を twist する closed loop

(2) 2つの string を 3-ball の境界に交わらせずに乗せる。

1 辺の長さ 1 の正方形 2つを境界に沿って張り合わせると S^2 ができ、これを境界とする 3-ball で内部を埋めたとする。境界の正方形を xy 平面に置き、4 頂点が $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ にあるとする。そして、2つの正方形に表裏を指定する。ここでは p, q は互いに素で $p > 0, q > 0$ を仮定する。はじめの string を、 $(0, 0)$ から表の正方形上 $y = \frac{q}{p}x$ に沿わせ、辺にたどり着くと裏に回り傾きを $-\frac{q}{p}$ にして沿わせ、辺にたどり着くと表に回り、を繰り返して頂点で止める。使っていない頂点同士で平行にもう 1 つの string を沿わせる。これが rational tangle になる。Figure 2 に $p = 10, q = 3$ の例がある。 p, q の一方が負のときは、はじめに裏の正方形を沿わせる。

(1) の rational tangle を自明に閉じることで、Figure 4 のような 2-bridge link の Conway form $C(a_1, \dots, a_m)$ を得る。 a_i ($i = 1, \dots, m$) は 0 でない整数で、 α, β に沿った twist 数を表す。

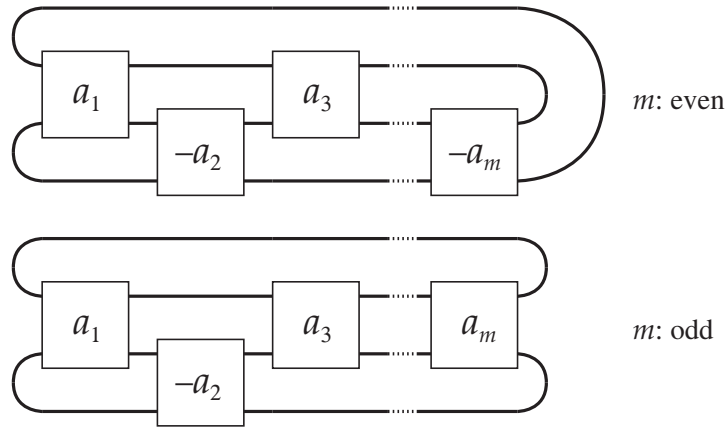


Figure 4: 2-bridge link の Conway form $C(a_1, \dots, a_m)$

(2) の rational tangle を自明に閉じることで、2-bridge link の Schubert form $S(p, q)$ を得る。

$$[a_1, \dots, a_m] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}} = \frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$$

$a_i, p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($i = 1, \dots, m$), $\gcd(p, q) = 1$ ($|p| \geq |q|$) とするとき、以下を得る。

Theorem 1.1. $C(a_1, \dots, a_m) \cong S(p, q)$.

この結果により、Conway form と Schubert form が繋がる。 $[a_1, \dots, a_m]$ から p/q が唯一決まる一方で、 p/q から $[a_1, \dots, a_m]$ が唯一決まらない。Figure 2 において、 $C(3, 3) \cong C(4, -2, 2)$ である。 $C(3, 3)$ からは amphicheirality は即座にわかるが、 $C(4, -2, 2)$ からは直ちにはわからない。もちろん $S(10, 3)$ を経由すればよいのだが、

$C(4, -2, 2)$ から amphicheirality を直接知る術はないのか？

が今回の主旨である。

Assumption $|a_i| = 1 \implies a_{i-1}a_i > 0$ & $a_i a_{i+1} > 0$.

Definition 1.2. $[a_1, \dots, a_m]$, $(a_1, \dots, a_m)$ ($\forall a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; i = 1, \dots, m$) が *even type* $\iff \forall a_i : \text{even } (i = 1, \dots, m)$.

2 Basic properties

2-bridge link に関する基本結果を述べる。

Lemma 2.1.

- (1) 2-bridge knot/link は strongly invertible. i.e. $S(p, q) \cong S(-p, -q)$.
- (2) $S(p, q)^* \cong S(p, -q)$, $C(a_1, \dots, a_m)^* \cong C(-a_1, \dots, -a_m)$.
- (3) 2-component 2-bridge link は interchangeable.

Lemma 2.2.

(1) $[a_1, \dots, a_m] = p/q$: even type, m : even
 $\implies p$: odd, q : even, r : even, s : odd, $qr \equiv -1 \pmod{p}$, $S(p, q)$: knot, Seifert genus $g = m/2$.

(2) $[a_1, \dots, a_m] = p/q$: even type, m : odd
 $\implies p$: even, q : odd, r : odd, s : even, $qr \equiv 1 \pmod{2p}$, $S(p, q)$: 2-component link, Seifert genus $g = (m - 1)/2$ (Figure 5).

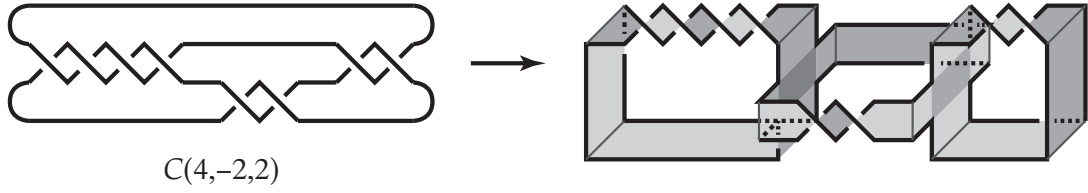


Figure 5: 2-bridge link の minimal genus Seifert surface

Theorem 2.3.

- (1) $S(p, q)$ 上 2-fold branched covering は $L(p, q)$.
- (2) $p : \text{odd}, S(p, q) \cong S(p', q') \iff p = p' \ \& \ q = q' \text{ or } qq' \equiv 1 \pmod{p}$.
- (3) $p : \text{even}, S(p, q) \cong S(p', q') \text{ as oriented links} \iff p = p' \ \& \ q = q' \text{ or } qq' \equiv 1 \pmod{2p}$.
- (4) $p : \text{even}, S(p, q) = K_1 \cup K_2 \text{ as an oriented link}, S(p', q') = K_1 \cup (-K_2) \iff p = p' \ \& \ q' \equiv q + p \pmod{2p} \text{ or } qq' \equiv 1 + p \pmod{2p}$.

Theorem 2.3 より、以下を得る。

Corollary 2.4. $S(p, q) : \text{amphicheiral} \iff q^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Remark $q^2 \equiv -1 \pmod{p} \iff s(q, p) = 0$. ($s(q, p)$ は Dedekind sum)

3 Main Theorems

以下が Main Theorem である：

Main Theorem 1

$L : \text{amphicheiral 2-bridge knot/link}$

$\iff \exists m : \text{even} \ \& \ \exists a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ (i = 1, \dots, m)$
s.t. $\forall a_i = a_{m+1-i} \ \& \ L \cong C(a_1, \dots, a_m) : \text{symmetric form.}$

特に、 $L : \text{knot} \implies \forall a_i : \text{even}$ と取ることができる。

表面上 2-bridge link に無関係な表現にすると次のようになる：

Main Theorem 1'

$p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \text{s.t. } p \text{ or } q : \text{even}, q^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

$\iff \exists m : \text{even} \ \& \ \exists a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ (i = 1, \dots, m) \quad \text{s.t. } \forall a_i = a_{m+1-i} \ \& \ [a_1, \dots, a_m] = p/q$.

Main Theorem 2 を述べるための準備をする。

m : odd として、 $m = 2g + 1$ とする。

$$\mathcal{E}_m = \{(a_1, \dots, a_m) : \text{even type}\},$$

$$\mathcal{E}_m^+ = \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{E}_m \mid a_1 > 0\}, \mathcal{E}_m^- = \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{E}_m \mid a_1 < 0\},$$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{E}_{2g+1}, \mathcal{E}^{\pm} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{E}_{2g+1}^{\pm}$$

とするとき、以下を (A1)–(A6) により生成する集合とする：

$$\mathcal{A}_g^{\pm} \subset \mathcal{E}_{2g+1}^{\pm}, \mathcal{A}_g = \mathcal{A}_g^+ \cup \mathcal{A}_g^- \subset \mathcal{E}_{2g+1}, \mathcal{A} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{A}_g$$

$$(A1) : \mathcal{A}_0^+ = \{(2)\}, \mathcal{A}_0^- = \{(-2)\}.$$

$$(A2) : (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}_g \longleftrightarrow (a_m, \dots, a_1) \in \mathcal{A}_g.$$

$$(A3) : (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}_g^+ \longleftrightarrow (-a_1, \dots, -a_m) \in \mathcal{A}_g^-.$$

$$(A4) : (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}_g^+ \longleftrightarrow (a_1 + 2, a_2, \dots, a_m, -2, 2) \in \mathcal{A}_{g+1}^+.$$

$$(A5) : (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}_g^+ \longleftrightarrow (2, a, a_1, \dots, a_m, -a - 2, 2) \in \mathcal{A}_{g+2}^+, \text{ where } a \neq -2.$$

$$(A6) : (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}_g^- \longleftrightarrow (2, a, a_1, \dots, a_m, -a, 2) \in \mathcal{A}_{g+2}^+.$$

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{E}$, $C(\mathbf{a}) = C(a_1, \dots, a_m)$ の記号を用いる。

Main Theorem 2

$\mathbf{a} \in \mathcal{E}$, $C(\mathbf{a})$: amphicheiral $\iff \mathbf{a} \in \mathcal{A}$.

いずれの定理の証明も

$$(\star) \quad \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

をただただ用いるのが基本である。

Example

$$(1) \mathbf{a}_g = (2g + 2, \underbrace{-2, 2}_1, \dots, \underbrace{-2, 2}_g) \in \mathcal{E}_g^+, \quad L_g = C(\mathbf{a}_g).$$

$$\mathbf{a}_0 = (2) \xrightarrow{(A4)} \mathbf{a}_1 = (4, -2, 2) \xrightarrow{(A4)} \cdots \xrightarrow{(A4)} \mathbf{a}_g \in \mathcal{A}_g^+.$$

$$L_g = C(2g + 1, 2g + 1).$$

$$(2) \mathcal{A}_1^+ = \{(4, -2, 2), (2, -2, 4)\},$$

$$\mathcal{A}_2^+ = \{(6, -2, 2, -2, 2), (4, -2, 4, -2, 2), (2, -2, 2, -2, 6), \\ (2, -2, 4, -2, 4), (2, a, 2, -a - 2, 2) (a \neq -2), (2, a, -2, -a, 2)\}.$$

4 Problems

最後に、思い付くままいくつか問題を挙げておく。

Problem 1 (A1) を他に置き換えると何が起きるか？ $q^2 \pmod{p}$ を保つのか？

Problem 2 Main Theorem 2 中の変形はもっと統一的に簡潔に述べられないか？

Problem 3 even amphicheiral form ($\mathcal{A}$ の元) と symmetric form の間の翻訳はどのようなになるのか？

Problem 4 Main Theorem 2 の純数論的証明はあるか？今回でも行列を使った意味では十分代数的・数論的だが、link の向きや、linking number を気にして、algebraically split (linking number 0) の可能性を排除するために Alexander polynomial を使っている。

Problem 5 Problem 4 に関連して、数論において（実用的な意味合いで）、link の成分数や linking number に対応する概念は何か？link の成分数なら、permutation に対応させて、各数の orbit で述べることはできる。一方、linking number は even form なら、奇数項の和で述べられるが、数論上自然な意味はあるのか？

Acknowledgement 講演の機会を与えていただいた早稲田大学の主催者の方々に感謝致します。

amphicheirality の内容での講演はこれまで幾度かしてきましたが、[Kd] の内容そのものは一度も講演しませんでした。理由は、2-bridge knot/link の symmetry はこれまで研究され尽くされていて、今更その話題を扱っても新奇性に訴えないと当時は感じたからです。偶数連分数展開は新しいとは思ってはいましたが、そのことを伝えるのは難しいとも感じていました。今回この発表を行おうと思ったのは、地引芳紀氏 [Jb] の講演を拝聴して、内容が偶数連分数展開の話だったことから [Kd] の結果を思い起こし、発表の価値があると感じたからです。ただ今回も、[Kd] の主結果である link symmetric group の話ではありませんでした。地引氏含む数論では無限長の周期的展開を扱っているので [KL, SW]、2 次の無理数の話なのが相違点ではあります。発表年から、偶数連分数展開は数論でも意外と最近の話題と言えるでしょう。しかし Euclid 以来 2000 年以上の連分数展開の歴史のどこかで類似の結果がないとも限らないとも考えています。何かご存知の方は是非お教え下さい。

講演中や講演後に平澤美可三先生、作間誠先生からコメントをいただきました。豊富なコメントで全ては書ききれないですが、3つ抽出して、順に書きますと、

平澤先生より (1) Seifert surface の張り方から symmetry が見えないか？

作間先生より (2) Main Theorem 1 は既にある結果である [Sa2]。

作間先生より (3) (1) 同様、symmetry が見える diagram 表示を知りたい [Sa1, Sa3]。でした。

以前、和久井道久先生 [Wa] に [Kd] について触れていただいたことがありました。Main Theorem 1 の逆方向はすぐわかるが、順方向の証明のある文献が見当たらない中で、見つけていただきました。

References

- [Sa3] S. Aimi, D. Lee, S. Sakai and M. Sakuma, *Classification of parabolic generating pairs of Kleinian groups with two parabolic generators*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **52** (2020), 477–511.
- [Co] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their related properties*, In: Computational problems in Abstract Algebra (Oxford, 1967) (1970), 329–358, Pergamon Press.
- [Hi] J. Hillman, *Symmetries of knots and links, and invariants of abelian coverings (Part I)*, Kobe J. Math., **3** (1986), 7–27.
- [Jb] 地引芳紀, 実 2 次無理数の偶数連分数展開について／通常連分数と偶数連分数の間の変換について, 北陸数論セミナー 2021 年 3 月 4 日／11 月 18 日.
- [Kd] T. Kadokami, *The link-symmetric groups of 2-bridge links*, J. Knot Theory Ramif. **20** (8) (2011), 1129–1144.
- [KL] C. Kraaikamp and A. Lopes, *The theta group and the continued fraction expansion with even partial quotients*, Geometriae Dedicata **59** no.3, (1996), 293–333.
- [Sa1] M. Sakuma, *On strongly invertible knots*, Algebraic and Topological Theories –to the memory of Dr. Takehiro MIYATA (1985), 176–196.
- [Sa2] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Japan. J. Math., **21**, No.2 (1995), 393–439.
- [Sc] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z., **65** (1956), 133–170.
- [SW] I. Short and M. Walker, *Even-integer continued fractions and the Faray tree*, Symmetries in Graphs, Maps, and Polytopes Workshop (2016), 287–300. arXiv: 1508.01373.
- [Wa] 和久井道久, 結び目と連分数, 金沢大学 2016 年 11 月.
http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/Knots_and_ContiFrac.pdf
- [Wh] W. Whitten, *Symmetries of links*, Trans. Amer. Math. Soc., **135** (1969), 213–222.