

研究集会「結び目の数理 IV」

講演アブストラクト集

12月23日(木)

門上 晃久 氏 (金沢大学大学院自然科学研究科)

Continued fractions of even type related to amphicheiral two bridge links

2橋結び目/絡み目がいつ両手型になるか?はよく知られている。両手型になる必要十分条件は、Schubert 表記 $S(p, q)$ なら $q^2 \equiv -1 \pmod{p}$ で、Conway 表記 $C(a_1, \dots, a_n)$ なら n が偶数で、全ての i で $a_i = a_{n+1-i}$ と取れることである。しかも、2橋結び目の場合は全ての a_i を偶数に取りつつ $a_i = a_{n+1-i}$ が成り立つようにできる。一方、2橋絡み目はそうではなく、 $C(3, 3) = C(4, -2, 2)$ のように、全ての a_i を偶数にすると、一般に $a_i = a_{n+1-i}$ は成立しない。主結果は、両手型2橋絡み目の Conway 表記に対し、全ての a_i を偶数に取る場合の形を、 n が小さいものから完全決定できる基本変形を示したこと、である。

佐藤 史弥 氏 (東北大学大学院情報科学研究科)

四角形の切り貼りとその合同類

対辺の内分点同士を結んだ線分で四角形を2つに切り分け、片方を裏返し、切った線分で再び貼りなおすという切り貼りについて調べています。切る角度を調整することで四角形同士が移り合います。例えば、1組の対辺に垂直に交わるような線分で平行四辺形を切ると等脚台形が得られます。この切り貼りは外周の長さや面積を変えない四角形同士の変形です。一般の四角形に対してこの切り貼りを研究しています。

福田 瑞季 氏 (東北大学 AIMR)

Weaving diagram の構成と同値類について

(小谷 元子 氏 (東北大学)、Sonia Mahmoudi 氏 (東北大学) との共同研究)

Weaving diagram とは2-周期な4-正則グラフに対し、各頂点に上下の情報を与えたもののことを言う。Weave を含む編み物の数学的モデル化は既にいくつか研究されており、例えば Grishanov-Meshkov-Omelchenko によって基本領域を用いて作られるトーラス上の絡み目に対してライデマイスターの定理が成り立つことが知られている。本講演では平面充填を用いた weaving の組み合わせ的構成法について説明した後、基本領域内の交点の情報を用いて同値関係について調べた結果を紹介する。

片山 拓弥 氏 (学習院大学理学部)

曲面の写像類群に含まれる純ブレイド群の最高次数について

ブレイド群は球面の二重分岐被覆と包含写像とを組み合わせることにより曲面の写像類群に埋め込まれることが Birman-Hilden, Paris-Rolfsen の仕事として知られている。講演者は球面のある種の拡大操作を用いて、ブレイド群の有限指数部分群である純ブレイド群の写像類群への単射準同型を定義した。以上が現状知られている、純ブレイド群を写像類群に埋め込む手法である。また、直角アルティン群は Koberda の結果により写像類群の部分群として自然に実現される特殊なアルティン群であるが、そのスペクトラムは曲面の組み合わせ論的情報をよく反映しており、写像類群のある種の大きさを表していると思うことができる。現状では、写像類群に含まれる(純)ブレイド群の最高次数を決定するほどにはスペクトラムの比較は有用であることが分かっている。本講演は大阪大学の久野恵理香氏との共同研究を含む。

柳田 幸輝 氏 (東京工業大学理学院)

Twisted Milnor pairings of Casson-Gordon type and non-slice knots

結び目の非スライス性を示す問題は歴史が長く、多くの研究がある。古典的には符号数や discriminants が計算の容易な slice 不変量としてあるが、応用できない結び目も多い。たいし、それらの高次化として、Casson-Gordon 不変量や Cochran-Orr-Teichner の理論などもあるが、具体的な計算は難しく計算例が乏しかった。本講演では捩れ Milnor ペアリングを Casson-Gordon の理論に適用して、与えられた結び目が非 slice であるための十分条件を与えた事を紹介する。このペアリングはコホモロジーのカップ積で記述できる為、その符号数の計算が比較的可能である。実際、スライスではない結び目の新しい例を与えた。

大倉 拓実 氏 (東京工業大学理学院)

8 交点以下の非ファイバー結び目の Heegaard 分解と Milnor ペアリング

結び目の基本群における Lin の表示 (又は Heegaard 分解) に関し、多くの例を与えたい。本研究ではひねり付きプレツェル結び目という結び目の族を導入し、その族に対して Lin の表示を計算するアルゴリズムを与えた。これにより 8 交点以下の非ファイバー結び目の Lin の表示をすべて計算できる。応用として、8 交点以下の非ファイバー結び目の Milnor ペアリングも全て計算できる。これについても紹介する。

吉川 修平 氏 (大阪市立大学大学院理学研究科)

Ribbon knots with different symmetric union presentations

対称和 (symmetric union) で表された結び目図式における同値関係である対称同値 (symmetric equivalence) の概念と共に、その不変量 refined Jones polynomial が Eisermann と Lamm により導入された。refined Jones polynomial が一致する対称同値でない例を構成した。

吉田 純 氏 (理化学研究所革新知能統合研究センター)

Chain-level MOY relations on Khovanov-Rozansky homology

(伊藤 昇 氏 (茨城工業高等専門学校)、中兼 啓太 氏 (Uppsala University) との共同研究)

Khovanov-Rozansky ホモロジーは、結び目の $\text{sl}(n)$ -不変量及び HOMFLY 多項式を圏化するものとして 2004 年に提案された。これは、マトリックスファクトリゼーションのホモトピー論を用いて記述され、その Reidemeister 移動による不変性は MOY 関係式の圏化が本質である。ところが、Khovanov-Rozansky のオリジナルの証明は、導来圏の同型射を用いて行われており、鎖複体のレベルでの具体的な記述はまだ知られていない。上記の困難について、今回この MOY 関係式の圏化を鎖複体に対して直接構成する方法が得られたので、それについて解説する。基本的なアイデアは、マトリックスファクトリゼーションを dg 加群の言葉で整理しなおし、代数トポロジーの手法を用いて KR ホモロジーを再構成することである。

12月24日(金)

木村 直記 氏 (早稲田大学基幹理工学部)

ルジャンドル結び目とラック彩色数

Kulkarni-Prathamesh は、ラック彩色を用いてルジャンドル結び目の不変量を得るために、ルジャンドルラックという概念を導入した。Ceniceros-Elhamdadi-Nelson はこの概念を一般化した。本講演では、この概念を更に一般化した 2-ルジャンドルラックを定義する。2-ルジャンドルラック彩色数を用いることで、Thurston-Bennequin 数が同じ値をとる位相的に自明なルジャンドル結び目たちを全て区別できることを報告する。また、2-ルジャンドルラック彩色数では区別できないルジャンドル結び目の組についても紹介する。

絹野 凜 氏 (奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科)

弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像の構造

弧選択ゲームとは、結び目の領域選択ゲームの領域の代わりに弧を選択するゲームであり、弧凍結選択ゲームとは、領域凍結交差交換を弧に適応させたゲームである。これらのゲームから導かれる準同型写像の構造に着目することで、ゲームがクリアできる条件と、クリアの仕方が何通りあるかを示す。

加藤 広太 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

仮想絡み目の JKSS 不変量について

JKSS 不変量は、Jaeger, Kauffman, Saleur によって曲面上の絡み目図式に対して定義され、Sawollek により仮想絡み目の不変量として定式化された多項式型不変量である。この不変量は、仮想絡み目図式のある部分集合の族から得られる分配関数と呼ばれる関数で定義される。一方で、仮想絡み目図式から得られる行列式によっても計算できることが知られているが、Sawollek の論文にはその証明は書かれていない。今回は分配関数と行列式が一致することの証明を与える。

伊藤 大貴 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

Index polynomial invariants for twisted links

twisted link は M. O. Bourgoin によって定義された、virtual link の一般化である。我々は向きと順序の付いた twisted link diagram に対して index polynomial を導入し、これが twisted link の不変量になることを示した。この不変量は L. H. Kauffman によって定義された virtual link の affine index polynomial の拡張になっている。応用として、double covering が同じである異なる 2 つの twisted link の存在を示すことができる。

開 萌実 氏 (名古屋市立大学大学院理学研究科)

A virtualized skein relation for multivariable polynomial invariant

Dye, Kauffman, Miyazawa が導入した仮想結び目の不変量である多変数多項式不変量は Jones 多項式の精密化である。一方、Kamada, Nakabo, Satoh によって正規仮想結び目に対する仮想スケイン関係式が導かれた。本講演では、多変数多項式不変量の仮想スケイン関係式に関して議論する。

吉田 真治 氏 (京都大学数理解析研究所)

シャドーコサイクル不変量のサテライト化公式

シャドーコサイクル不変量はカンドル 3-コサイクルを用いて構成される絡み目の不変量である。本講演では、サテライト結び目のシャドーコサイクル不変量とその companion knot と pattern knot のシャドーコサイクル不変量との関係について、pattern knot が特定の向きの 3-tangle の閉包の場合に紹介する。

米村 拳太郎 氏 (九州大学大学院数理学府)

一葉双曲面上のカンドルと longitudinal map

2次元実特殊線形群の双曲型の元の共役類上にカンドルを定義することが出来ます。そのカンドルと、Clark-Saitoによって定義された longitudinal map の関係について述べます。

上田 涼太郎 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

Multiple conjugation quandle coloring quivers of handlebody-links

古典絡み目の不変量である quandle coloring quiver が S.Nelson 氏と K.Cho 氏によって定義された。我々は multiple conjugation quandle (MCQ) を用いた彩色を考えることで、Nelson-Cho の quandle coloring quiver の類似の概念として、quiver に値をもつハンドル体絡み目の不変量を構成した。この不変量の定義と性質について講演する。

谷口 雄大 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

Quandle twisted Alexander invariants and homology groups

Quandle twisted Alexander invariant は Ishii-Oshiro によって導入された quandle と quandle homomorphism の組に対する不変量であり、結び目の twisted Alexander polynomial を復元することができる。本講演では quandle twisted Alexander invariant と Andruskiewitsch-Graña により構成された quandle の homology group との関係について得られた結果について報告する。

高野 暁弘 氏 (東京大学大学院数理科学研究科)

The Long-Moody construction and twisted Alexander invariants

Long-Moody 構成とは、組み紐群と自由群の半直積の表現から組み紐群の新しい表現を作る方法である。その構成によって出来た表現を行列表示すると、ねじれ Alexander 不変量の定義に使われる表現でねじった Alexander 行列が現れることが分かる。本講演では、組み紐を固定したとき”良い”表現を選ぶと、その組み紐の閉包のねじれ Alexander 不変量が Long-Moody 構成を用いて記述できることを示す。

長坂 篤英 氏 (東京大学大学院数理科学研究科)

重み付きグラフの変形と結び目理論への応用について

有向グラフの表現である重みつきグラフの分類において、そのゼータ関数は不変量として活躍する。本講演ではゼータ関数の値を保存する操作としてグラフの変形操作を定義する。その応用として適切な有限表示群から重みつきグラフを構成できる事を紹介し、和田氏によって定義された twisted Alexander 不変量と重み付きグラフが関係すると言う合田氏の結果を捉える。特に結び目群において表示を Wirtinger 表示のみに限定した場合には適切な仮定の下では石井氏、大城氏により定義された Alexander pair により重みが統制できる事を述べる。

福田 大能 氏 (埼玉大学大学院理工学研究科)

Celtic diagrams with various grid types

ケルト人の装飾に使われていたデザインを数学的に定義し、それを diagram(Celtic diagram という)とする絡み目を Celtic link という。Celtic diagram は正三角形や、正方形、正六角形の格子 (grid) から誘導されるが、本研究ではある grid から誘導された Celtic diagram を別の grid 上で描く場合どのように描かれるかを調べた。また、バリアのない高さ 2 の正方形 grid 上で描かれる Celtic diagram の Alexander-Conway 多項式の帰納的算出方法は既出であるが、正三角形、正六角形の grid における場合は未解決であった。本研究ではこの 2つの grid タイプにおける Alexander-Conway 多項式の帰納的な計算方法についても紹介する。

12月25日(土)

新井 克典 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

有向絡み目の dual graph diagram

dual graph diagram は、D.Needell 氏と S.Nelson 氏によって導入された有向絡み目の表示方法である。しかし、与えられた dual graph diagram が有向絡み目を表さない場合がある。本講演では連結な dual graph diagram が、有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与える。

炭本 貴裕 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

完全グラフの book representation の分類

book representation とはグラフの \mathbb{R}^3 への特殊な埋め込みのことである。6 頂点の完全グラフの book representation は \mathbb{R}^3 の全同位でうつりあうものを同値として Dana Rowland によって分類されている。私は、頂点数が 7 および 8 の完全グラフの book representation でシート数が最小のものを、 \mathbb{R}^3 の全同位でうつりあうものを同値とみなして分類した。

川添 浩太郎 氏 (明治大学大学院先端数理科学研究科)

The one-row \mathfrak{sl}_3 colored Jones polynomial for pretzel links

色付き Jones 多項式とは、向き付きの絡み目の不変量である。一般に \mathfrak{sl}_3 色付き Jones 多項式を計算することは難しく、具体的な絡み目に対しては、一部のトールズ絡み目と二橋絡み目のみ知られている。本講演では、 \mathfrak{sl}_3 色付き Jones 多項式に制限を加えることにより、Kuperberg によって導入された A_2 ブラケットを用いて得られてたプレッツェル絡み目に対する結果を紹介する。

Yuanyuan Bao 氏 (東京大学大学院数理科学研究科)

3-manifold invariant derived from $gl(1|1)$ -Alexander polynomial

(伊藤 昇 氏 (茨城工業高等専門学校) との共同研究)

Using irreducible modules of a subalgebra of q -deformed universal enveloping superalgebra of $gl(1|1)$, Viro defined the $gl(1|1)$ -Alexander polynomial for a framed trivalent graph in the 3-sphere. Such modules may not be semi-simple and the quantum dimension in general vanishes. By following the method given by Costantino, Geer and Patureau-Miland, we construct a 3-manifold invariant from Viro's $gl(1|1)$ -Alexander polynomial.

森 祥仁 氏 (東北大学大学院理学研究科)

Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を復元する q 級数について

(村上 友哉 氏 (東北大学) との共同研究)

Gukov-Pei-Putrov-Vafa は物理的な手法で homological block と呼ばれる q 級数を構成し、homological block の radial limit が WRT 不変量に一致すると予想した。本講演では H グラフから定まる 3 次元多様体に対して彼らの予想を証明する。Bringmann-Mahlburg-Milas らの結果と合わせることで WRT 不変量が深さ 2, 重さ 1, 量子集合 Q の量子モジュラー形式であることがわかる。

井森 隼人 氏 (京都大学大学院理学研究科)

同変特異インスタントン・フレアー理論による結び目不変量

フレアー理論は低次元トポロジーの研究において強力な手法となってきた。特異インスタントンを用いたフレアー理論により、結び目に対する不変量を得ることができる。本講演では Daemi-Scaduto による同変特異インスタントン・フレアー理論を一般化および精密化することで得られるいくつかの結び目不変量を紹介する。さらに結び目コンコダンス群における線型独立な結び目の族に関する応用についても紹介する。本講演はプレプリント arXiv:2108.13998 および Aliakbar Daemi 氏, 佐藤光樹氏, Christopher Scaduto 氏, 谷口正樹氏との共同研究に基づく。

久保田 肇 氏 (京都大学大学院理学研究科)

balanced spatial graph の Υ 不変量

Υ 不変量とは, KFH の理論から得られる結び目のコンコダンス不変量である。Knot Floer Homology を組み合わせ的に求める Grid homology の理論を用いた, Υ 不変量の組み合わせ的な再構成が Földvári によって考えられている。本講演では, Grid Homology の balanced spatial graph への拡張を利用して, Υ 不変量の balanced spatial graph への拡張を与える。

中村 将士 氏 (岐阜大学大学院教育学研究科)

組紐指数 3 の結び目の影に関する研究

(花木 良 氏 (岐阜大学) との共同研究)

交点の上下の情報がない結び目のダイアグラムを結び目の影と呼ぶ。本稿では, 組紐指数 3 の影の交点に上下を付けて得られる結び目の集合について考察する。自明な結び目の出てくる確率などについて紹介する。

伊藤 哲也 氏 (京都大学大学院理学研究科)

Successively almost positive links

正の交点しか持たない図式表示を持つような絡み目は positive link と呼ばれ, 絡み目の研究において重要なクラスである。この講演では, positive link そして almost positive link の拡張として, 新しく successively almost positive link を導入する。(Almost) positive link の持つ様々な性質を振り返り, 時に既知の結果の拡張を交えながら, それらの性質が Successively almost positive link へと一般化されることなどを説明する。

吉田 はん 氏 (群馬工業高等専門学校)

Commensurability of cocompact Coxeter groups

C. Gyurek, R. Roeder の論文 Problem on Mutant Pairs of Hyperbolic Polyhedra, <https://arxiv.org/pdf/1906.08723.pdf> に書いてある体積が同じで, invariant trace field, invariant quaternion algebra では commensurable かどうか判定できない 2 つの cocompact Coxeter 群の incommensurability を示す。

小林 毅 氏 (奈良女子大学理学部)

On keen bridge splittings of links

(井戸 絢子 氏 (愛知教育大学)、張 娟姫 氏 (奈良女子大学) との共同研究)

In this talk, we extend the concept of (strongly) keenness for Heegaard splittings to bridge splittings, and show that, for any integers $n \geq 1$, $g \geq 0$ and $b \geq 1$ except for $(g, b) = (0, 1)$, and $(g, b, n) = (0, 3, 1)$, there exists a strongly keen (g, b) -bridge splitting of a link with distance n . We also show that any $(0, 3)$ -bridge splitting of a link with distance 1 cannot be keen.

12月26日(日)

吉崎 彪雅 氏 (東京理科大学大学院理工学研究科)

三次元多様体における Weber 問題

(植木 潤 氏 (東京電機大学) との共同研究)

Weber 問題とは、素数 p に対して、有理数体上の \mathbb{Z}_p 拡大の中間体の類数を求める、数論における未解決問題である。一方で、代数体と三次元多様体には、興味深い類似が指摘されている。講演者は、代数体のイデアル類群と三次元多様体の整係数 1 次ホモロジー群の類似性をもとに、三次元多様体における Weber 問題を考察した。そして、数論側と同様の結果 (類数の収束性) を得たので、具体例と共に紹介する。

高村 正志 氏 (青山学院大学社会情報学部)

Goussarov-Polyak-Viro 予想 ($n = 3$) について

(伊藤 昇 氏 (茨城工業高等専門学校)、小鳥居 祐香 氏 (広島大学) との共同研究)

有限型不変量をガウス図式で組織的に表す方法を記述した、Goussarov-Polyak-Viro の論文 (2000 年) で次の主張が予想 (Conjecture 3.C) されている。

Conjecture 3.C Every finite-type invariant of classical knots can be extended to a finite-type invariant of long virtual knots.

この論文では、 $n = 2$ については base point に関する議論により、正しいことが確かめられている。しかしながら、 n が 3 以上については、どのように解決するかの方策について明示がなされていない。伊藤は予想の意味について Viro 氏に直接口頭で確認した。

例えば、 $n = 3$ の Vassiliev 不変量である Polyak-Viro (1994) のガウス図式 (よく知られた 2 つのガウス図からなるもの) は、virtual knot の不変量になっていないので、Gauss 図式で書けたからといって (long) virtual knots の有限型不変量になっていると判断するのは誤りである。一方で、この Polyak-Viro formula が long virtual knots のガウス図式 (不変量) として延長される様子を具体的に記述した論文は見当たらず、反対に、ある long virtual knots のガウス図式 (不変量) が何らかの reduction をして Polyak-Viro formula になる様子を具体的に記述した論文も見当たらない。

講演者らは、予想の $n = 3$ に現れる、上記の問題を肯定的に解いたので報告する。

安田 順平 氏 (大阪大学大学院理学研究科)

曲面絡み目の plat 表示を用いた結び目群の計算

絡み目の plat 表示はブレイドを用いた絡み目の表示の方法であり、これはブレイド状曲面を用いることによって曲面絡み目へ拡張できる。本講演では plat 表示による曲面絡み目の結び目群を計算する方法として、曲面絡み目の結び目群をブレイド状曲面の結び目群の表示から得る方法を紹介する。また結び目カンドルについても議論する。

菅原 朔見 氏 (北海道大学大学院理学院)

カスパ付きディバイドから定まる絡み目と直線配置の Kirby 図式

\mathbb{C}^l 内のアフィン超平面の有限集合を超平面配置という。超平面配置のトポロジーにおいて、超平面配置が実超平面を複素化して得られる場合は、補集合のセル分割が実構造を用いて記述されることが知られている。本講演では、特に $l = 2$ すなわち直線配置の場合に対して、より精密な情報であるハンドル分解を得ることができたので、それを紹介する。また、直線配置の補集合は実 4 次元多様体となり、Kirby 図式によりハンドル分解を表すことができる。直線配置の補集合の Kirby 図式を、divide の一般化であるカスパ付き divide を用いて記述することができたので、それについても紹介する。本講演の内容は、吉永正彦氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

浅野 喜敬 氏 (東北大学大学院理学研究科)

Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$ -trisections with different configurations of vanishing cycles

Trisection は 4 次元多様体から平面へのある安定写像として Gay-Kirby により導入された。Baykur-Saeki は特異値が自己交差を持たないクラスとして、単純な trisection を導入した。講演者は、単純な $(2, 0)$ -trisection の右左同値類に着目し、平面上の reference path の取り換えによる単純な trisection 図式の変化の様子について調べ、右左同値であるが、曲面の同相写像と upper-triangular ハンドルライドの有限個の列で移り合わない単純な trisection 図式を持つ単純な $(2, 0)$ -trisection が存在することを示した。講演では、得られた結果について紹介する。

石川 昌治 氏 (慶應義塾大学経済学部)

シャドウ補空間の基本群の表示

(古宇田 悠哉 氏 (広島大学)、直江 央寛 氏 (中央大学) との共同研究)

シャドウとは境界付き 4 次元多様体の変形レトラクトである (4 次元多様体に埋め込まれた) 2 次元の単純多面体のことであり、各面に gleam と呼ばれる半整数を乗せることで、4 次元多様体を表示することができる。本講演では、円板にアニュラスたちを貼り付けた可縮なシャドウに着目し、それが表す 4 次元多様体内でのシャドウの補空間の基本群を計算する方法を紹介する。複素平面曲線特異点の実モース化を一般化したクラスであるディバイトや、複素化された実直線配置を、このようなシャドウを使って表すことができる。基本群の計算方法は絡み目群の Wirtinger 表示と類似している。