三次元多様体におけるWeber問題

植木潤氏との共同研究

$$\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ | & | \\ M_{K,p^2} & \mathbb{B}_{p,2} \\ | & | \\ M_{K,p^1} & \mathbb{B}_{p,1} \\ | & | \\ S^3 & \mathbb{Q} \end{array}$$

12月26日(日) 東京理科大学　吉崎彪雅(D2)

目次

- 類似対応
- Weber問題
- Weber問題の類似と結果
- 例

代数体と三次元多様体の類似

k：代数体

$\mathfrak{p} \subset k$：素イデアル

$I \subset k$：分数イデアル

$Cl(k)$：イデアル類群

h_k：類数

k'/k：代数拡大

$$1 \to P(k) \to J(k) \to Cl(k) \to 1$$

kの分数イデアルの群

素イデアルで生成

M：有向三次元閉多様体

$K \subset M$：結び目

$L \subset M$：絡み目

$H_1(M)$：一次ホモロジー群

h_M：類数(と呼ぶことにする)

$M' \to M$：被覆

$$0 \to B_1(M) \to Z_1(M) \to H_1(M) \to 0$$

Mの1-サイクルの群

結び目で生成

Weber問題

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \mathbb{B}_{p,2} \\ | \\ \mathbb{B}_{p,1} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

素数 p に対して、$\mathbb{B}_p$ を $\mathbb{Q}$ 上の$\mathbb{Z}_p$-拡大とする。

(無限次代数拡大で、ガロア群が $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ と同型になるもの)

$n \geq 1$ に対して、$\mathbb{B}_{p,n}$ を、$\mathbb{B}_p$ の p^n 次の中間体とする。

(左図のように一列に伸びる塔をなす)

ーWeber問題ー

各素数 p と正の整数 n に対して、$\mathbb{B}_{p,n}$ の類数 $h_{p,n}$ を決定せよ。

ーWeber予想ー

全ての素数 p と正の整数 n に対して、$h_{p,n} = 1$.

Weber問題の類似

p 冪巡回被覆

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ M_{K,p^2} \\ | \\ M_{K,p^1} \\ | \\ S^3 \end{array}$$

p を素数、n を正の整数とする。S^3 内に埋め込まれた結び目 K に対して、

$$M_{K,p^n} = K \text{ で分岐する } S^3 \text{ の } p^n \text{ 重巡回被覆空間}$$

とする。すなわち、

被覆写像 $f : M_{K,p^n} \to S^3$ の分岐集合が $K \subset S^3$ であり、

被覆変換群 $\mathrm{Deck}(M_{K,p^n}/S^3)$ が $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に同型なもの。

ー結び目のWeber問題ー

各素数 p と正の整数 n に対して、M_{K,p^n} の類数 h_{K,p^n} を決定せよ。

Livingston, 2002

全ての素数 p と整数 n に対して、$h_{K,p^n} = 1.$

$\Leftrightarrow$ $\forall f(t) \mid \Delta_K(t)$：非自明な既約多項式に対して、

$\exists r \geq 1$ s.t. $f(t) = \Phi_r(t),$ r は相異なる3つのを素数を割る。

ここで、$\Phi_r(t)$ は r 番目の円分多項式。

→Concordance groupの研究

結び目のWeber予想は、(Alexander多項式の言葉では)解決済み。

類数の収束性

p を固定したとき、数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ は、$\mathbb{Z}_p$ で収束する。

(証明) トポロジーの場合と流れは同じ(後で登場)。

類数の収束性の類似

p を固定したとき、数列 $\{h_{K,p^n}\}_{n\geq 1}$ は、$\mathbb{Z}_p$ で収束する。

(証明) 全ての正の整数 n に対して、

$$h_{K,p^n}/h_{K,p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

が証明できればよい。

補空間 $X_K = S^3 \backslash K$ の $\mathbb{Z}$-被覆を $X_{K,\infty}$ とすると、次が成立する。

$$H_1(M_{K,p^n}) \cong H_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n}-1)H_1(X_{K,\infty})$$

(t はformal generator.)

自然な全射

$$\varphi_n : H_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n}-1)H_1(X_{K,\infty}) \to H_1(X_{K,\infty})/(t^{p^{n-1}}-1)H_1(X_{K,\infty})$$

による完全系列

$$0 \to \ker\varphi_n \to H_1(X_{K,\infty})/(t^{p^n}-1)H_1(X_{K,\infty}) \to H_1(X_{K,\infty})/(t^{p^{n-1}}-1)H_1(X_{K,\infty}) \to 0$$

により、

$$\#\ker\varphi_n = h_{K,p^n}/h_{K,p^{n-1}}$$

を得る。

$\ker\varphi_n$ にはDeck$(M_{K,p^n}/S^3)$ $(\cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ が作用する。

→Deck$(M_{K,p^n}/S^3)$ による軌道分解を(一手間)考えると、

$$\#\ker\varphi_n = h_{K,p^n}/h_{K,p^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

を得る。 □

具体例

トーラス結び目と8の字結び目

Alexander多項式の終結式を用いて、ホモロジー群の位数が計算できる。

p : 素数、n : 正の整数、K : 結び目、Δ_K : K のAlexander 多項式に対して、

$$h_{K,p^n} = |\mathrm{Res}(t^{p^n} - 1, \Delta_K(t))|.$$

トーラス結び目の場合

互いに素な正の整数 (m_1, m_2) に対して、(m_1, m_2)-型トーラス結び目 $K_{(m_1, m_2)}$ の

Alexander多項式は次の形。

$$\Delta_{K_{(m_1, m_2)}}(t) = \frac{(1-t)(1-t^{m_1 m_2})}{(1-t^{m_1})(1-t^{m_2})} = \prod_{\substack{N \mid m_1 m_2 \\ N \nmid m_1, m_2}} \Phi_N(t)$$

ここで、$\Phi_N(t)$ は N 番目の円分多項式。

終結式は積に分解できるため、

$$h_{K_{(m_1, m_2)}, p^n} = |\mathrm{Res}(t^{p^n} - 1, \prod_{\substack{N \mid m_1 m_2 \\ N \nmid m_1, m_2}} \Phi_N(t))|$$

$$= \prod_{i=0}^{n} \prod_{\substack{N \mid m_1 m_2 \\ N \nmid m_1, m_2}} |\mathrm{Res}(\Phi_{p^i}(t), \Phi_N(t))|$$

円分多項式同士の終結式は、Apostol (1969)が明示公式を与えている。

それを用いて組み合わせ論的に計算すると、

$$h_{K_{(m_1,m_2)},p^n} = \begin{cases} 1 & p \nmid m_1 m_2 \\ m_2^{p^n-1} & p \mid m_1,\ n \le ord_p(m_1) \\ m_2^{p^{ord_p(m_1)}-1} & p \mid m_1,\ n \ge ord_p(m_1) \\ m_1^{p^n-1} & p \mid m_2,\ n \le ord_p(m_2) \\ m_1^{p^{ord_p(m_2)}-1} & p \mid m_2,\ n \ge ord_p(m_2) \end{cases}$$

となる。ここで、$ord_p(m)$ は、整数 m が p で何回割れるかを表している。

8の字結び目の場合

Alexander多項式：$\Delta_K(t) = -t + 3 - t^{-1}$

$$\#H_1(M_{K,2^n}) = \begin{cases} 5 \equiv -3 \pmod{2^1} \\ 45 \equiv -3 \pmod{2^2} \\ 2205 \equiv -3 \pmod{2^3} \\ 4870845 \equiv -3 \pmod{2^4} \end{cases}$$

予想：$\lim_{n\to\infty} \#H_1(M_{K,2^n}) = -3$

$$\#H_1(M_{K,3^n}) = \begin{cases} 16 \equiv -2 \pmod{3^1} \\ 5776 \equiv -2 \pmod{3^2} \\ 192900153616 \equiv -2 \pmod{3^3} \end{cases}$$

予想：$\lim_{n\to\infty} \#H_1(M_{K,3^n}) = -2$

$n \setminus p$	2	3
1	5	16
2	45	5776
3	2205	192900153616
4	4870845	34桁
5	23725150497405	102桁

→証明は、p 進解析的議論による。

$$\lim_{n\to\infty} h_{K,p^n} = \begin{cases} -3 & p=2 \\ -2 & p=3 \\ -4 & p=5 \\ \sqrt{2}-2 & p=7 \end{cases}$$