

Goussarov-Polyak-Viro 予想 ($n = 3$) について

高村 正志 (青山学院大学 社会情報学部)

伊藤 昇 氏 (茨城工業高等専門学校),

小鳥居 祐香 氏 (広島大学) との共同研究

研究集会「結び目の数理 IV」

2021 年 12 月 26 日

早稲田大学早稲田キャンパス 3号館3階301教室

Introduction

その1

- 有限型不変量をガウス図式で組織的に表す方法を記述した Goussarov-Polyak-Viro の論文（2000 年）で次の主張が予想されている。

Conjecture 3.C. Every finite-type invariant of classical knots can be extended to a finite-type invariant of long virtual knots.

Introduction

その2

- Viro 氏に直接口頭で確認した.
- Problem
 - (2) How to merge Gauss diagram formulas as long virtual knot invariants into Gauss diagram formula as classical knot invariants (e.g., Polyak-Viro formula for the degree 3)?
- $n = 3$ のときの上記の問題を肯定的に解いたので報告する.

Theorem 1

- y_i^* ($1 \leq i \leq 168$) を 2 次または 3 次のアロー図式とする.
- w を得られた 9 個の long virtual knot の不変量の表示の係数からなる 9×168 行列
- v を得られた 23 個の classical knot の不変量の表示の係数からなる 23×168 行列
- このとき, 9×23 行列 A が一意的に存在して, $Av = w$ となる.

Corollary 1

- Polyak-Viro formula for the degree 3 に関して次を得た.
- $v_{3,7} := \langle f_{3,7}, \cdot \rangle$ とおく.

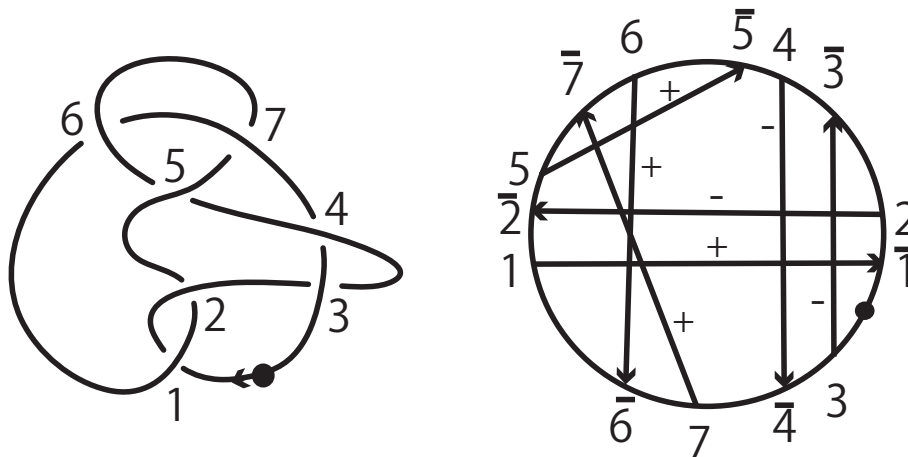
$$f_{3,7} := \begin{array}{c} \textcircled{\text{---}} + \textcircled{\text{---}} + \textcircled{\text{---}} + \textcircled{\text{---}} + \textcircled{\text{---}} + \textcircled{\text{---}} \\ + 2\textcircled{\text{---}} + 2\textcircled{\text{---}}, \end{array}$$

- このとき, $v_{3,7}(\cdot) = \langle \textcircled{\text{---}} + 2\textcircled{\text{---}}, \cdot \rangle$ を得る.

Knot 図式からアロー図式へ

その1

- Knot 図式に基点と向きを付ける。
- 符号付き，基点付き，アロー図式が定まる。



$\bar{1}2\bar{3}4\bar{5}6\bar{7}5\bar{2}1\bar{4}7\bar{4}3$

部分アロー図式を数え上げる関数

その1

- x^*, y^* を符号付き基点付きアロー図式とする。
- x^* の符号 $\text{sign}(x^*)$ を次で定める：

$$\text{sign}(x^*) := \prod_{\alpha: \text{letter in } x^*} \text{sign}(\alpha)$$

- x^* に対し，整数値関数 \tilde{x}^* を次で定める：

$$\tilde{x}^*(y^*) = \begin{cases} \text{sign}(x^*) & \text{if } [[y^*]] = [[x^*]], \\ 0 & \text{if } [[y^*]] \neq [[x^*]] \end{cases}$$

ただし， $[[y^*]]$ は y^* の回転による同値類

部分アロー図式を数え上げる関数

その2

- $\text{Sub}(y^*)$ を y^* からいくつかのアローを除いてできるアロー図式の集合
- x^* に対し, 整数値関数 x^* を

$$x^*(y^*) := \sum_{z^* \in \text{Sub}(y^*)} \tilde{x}^*(z^*)$$

により定める.

- 線形に拡張して, Gauss diagram formula (GDF) と呼ぶ.

Relator

その1

- GDF が不変量となるための十分条件を書くために, relator を定義する. (下記のものに符号付きアローを追加し, 基点を付けたもの)

RI $[[Si\bar{i}T]] \leftrightarrow [[ST]]$



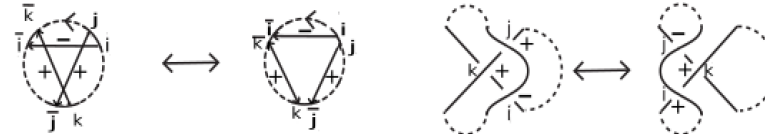
strong RII $[[SijT\bar{j}\bar{i}U]] \leftrightarrow [[STU]]$



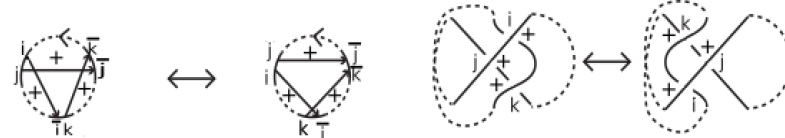
weak RII $[[SijT\bar{i}\bar{j}U]] \leftrightarrow [[STU]]$



strong RIII $[[SijT\bar{k}\bar{i}U\bar{j}kV]] \leftrightarrow [[SjiT\bar{i}\bar{k}Uk\bar{j}V]]$



weak RIII $[[SijT\bar{i}kU\bar{j}\bar{k}V]] \leftrightarrow [[SjiT\bar{k}\bar{i}U\bar{k}\bar{j}V]]$



Relator

その2

- $R_1 :=$ RI の relators 全体の集合
- $R_2 :=$ strong RII の relators 全体の集合
- $R_3 :=$ weak RII の relators 全体の集合
- $R_4 :=$ strong RIII の relators 全体の集合
- $R_5 :=$ weak RIII の relators 全体の集合
- $R_{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\epsilon_4\epsilon_5} := \bigcup_{\epsilon_i=1} R_i, \quad R_{10110} = R_1 \cup R_3 \cup R_4$

(Long) virtual knot の不変量の構成法

定理.

- 自然数 $2 \leq b \leq d$ に対し, GDF

$$I := \sum_{n_b-1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i^* \quad (\alpha_i \in \mathbb{Z})$$

- $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) \in \{0, 1\}^5$ を勝手に選ぶ.

- 任意の $r \in R_{0 \dots 0 \epsilon_j 0 \dots 0}(b, d)$ に対し,

$$\sum_{n_b-1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i^*(r) = 0$$

このとき,

I は $\epsilon_j = 1$ となるすべての Relator の整数値不変量となる.

★ この定理から \mathbb{Z} 係数の線形代数により不変量が構成できる.

コンピュータによる計算

その1

- コード図式やアロー図式から平面曲線の不変量を機械的に構成する方法があり，コンピュータ・プログラムの実装がある。

[Ito-T. (2021)], [結び目の数学 X 報告集]

- このプログラムに，今回の計算用に変更を加えた。
- $b = 2, d = 3$ に対し計算を行う。

コンピュータによる計算

- 基底となるアロー図式は、全部で 168 個になる。

$$y_1^* = \begin{array}{c} - \\ \circlearrowleft \\ - \end{array}, \quad \dots, \quad y_{48}^* = \begin{array}{c} + \\ \circlearrowright \\ + \end{array},$$

$$y_{49}^* = \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array}, \quad \dots, \quad y_{71}^* = \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array}, \quad y_{72}^* = \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ \circlearrowright \end{array},$$

$$\dots, \quad y_{168}^* = \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array}$$

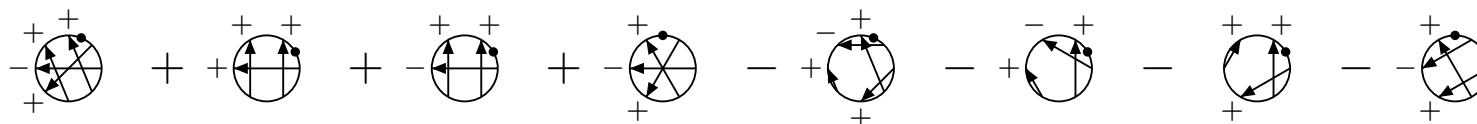
- 次数 2 のアロー図式は符号付き，次数 3 のアロー図式は符号無し
- 符号無しアロー図式は，符号付きアロー図式の和：

$$\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} = - \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ - \end{array} + - \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ + \end{array} + + \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ - \end{array} + + \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ + \end{array}$$

コンピュータによる計算

その3

- Relator の個数は 464 個
 - Type (I) が 122 個, Type (WII) が 96 個, Type (SIII) が 246 個



- 出力した行列に対し, Mathematica で核を求め, 整理する.
- 不変量が $9 = (2 + 7)$ 個の求まる.
- Ito-Kotorii は「連結」なものだけを考え, 手計算で $7 = (2 + 5)$ 個を求めていた.

得られた不変量 $\tilde{v}_{3,i} = \langle \tilde{f}_{3,i}, \cdot \rangle$

その1

$$\tilde{f}_{3,1} :=$$

$-$ $-$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $-$

$-$ $-$ $-$ $+$ 2 $+$ $+$ $+$

$+$ $-$ $+$ 3 $+$ 2 ,

$$\tilde{f}_{3,2} :=$$

$-$ $-$ $+$ $+$ $-$ $+$ $-$ $+$ $-$ $-$

$$\tilde{f}_{3,3} :=$$

$-$ $+$ $+$ $+$ $-$ $+$ $+$ $-$ $-$ $-$

$-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$,

得られた不変量 $\tilde{v}_{3,i} = \langle \tilde{f}_{3,i}, \cdot \rangle$

その2

$$\tilde{f}_{3,4} := - \underset{+}{-} \text{circle} + \underset{-}{+} \text{circle} + \text{circle} + \text{circle} - \text{circle} - \text{circle} \\ - \text{circle} + \text{circle},$$

$$\tilde{f}_{3,5} := - \underset{-}{+} \text{circle} - \underset{+}{+} \text{circle} + \text{circle} + \text{circle} + 2 \text{circle} + \text{circle} + \text{circle} \\ - \text{circle} - \text{circle} - \text{circle} - \text{circle} + \text{circle} + \text{circle} + \text{circle} \\ + \text{circle} - \text{circle} + 2 \text{circle} + 3 \text{circle},$$

得られた不変量 $\tilde{v}_{3,i} = \langle \tilde{f}_{3,i}, \cdot \rangle$

その3

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{3,6} := & 4 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 4 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) \\ & + \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 2 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) + \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) \\ & + \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 4 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 2 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 3 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 4 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) \\ & - 2 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - 2 \cdot \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow), \end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{3,7} := \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) + \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) - \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) + \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow) + \text{diag}(\downarrow, \downarrow, \downarrow, \downarrow),$$

得られた不変量 $\tilde{v}_{2,i} = \langle \tilde{f}_{2,i}, \cdot \rangle$

$$\tilde{f}_{2,1} := \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \\ + \end{array} + \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \\ + \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \\ - \end{array}, \text{ and}$$

$$\tilde{f}_{2,2} := \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \\ + \end{array} + \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \\ + \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \\ - \end{array} \bullet$$

Classical knot の不変量の構成法

- classical knot のみについて，アロー図式のペア間に自然に成り立つ関係式がある．

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & + & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & + & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & + & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & - & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & - & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & - & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & - & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \\
 \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & + & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & + & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & + & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & - & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & - & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & - & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & - & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \\
 \end{array}$$

- Type (SIII) relator の 1 部をこの関係式に取り替えた relator を考える．

コンピュータによる計算

その1

- Relator の個数は 404 個
 - Type (I) が 122 個, Type (WII) が 96 個, Type (SIII) が 186 個
- 出力した行列に対し, Mathematica で核を求め, 整理する.
- 不変量が $23 = (2 + 21)$ 個の求まる.

得られた不変量 $v_{3,i} = \langle f_{3,i}, \cdot \rangle$

その1

$$f_{3,1} := - \text{diag} - + \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag},$$

$$f_{3,2} := - \text{diag} - + \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} + \text{diag}$$

$$- \text{diag} - \text{diag},$$

$$f_{3,3} := - \text{diag} - + \text{diag} + \text{diag} - \text{diag} + \text{diag} + \text{diag} - \text{diag}$$

$$- \text{diag} + \text{diag} - \text{diag},$$

得られた不変量 $v_{3,i} = \langle f_{3,i}, \cdot \rangle$

その2

$$f_{3,4} := - \text{diag} - + \text{diag} + \text{diag} + \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} + \text{diag},$$

$$f_{3,5} := - \text{diag} - + \text{diag} - \text{diag} + \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag} - \text{diag},$$

$$f_{3,6} := - \text{diag} - + \text{diag} - \text{diag} + \text{diag} - \text{diag} + \text{diag} + \text{diag} - \text{diag},$$

得られた不変量 $v_{3,i} = \langle f_{3,i}, \cdot \rangle$

その3

$$f_{3,7} := \begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\ + 2 \text{Diagram 7} + 2 \text{Diagram 8}, \end{array}$$

$$f_{3,8} := \begin{array}{c} - \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} + \text{Diagram 9} \\ + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14}, \end{array}$$

$$f_{3,9} := \begin{array}{c} - \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} + \text{Diagram 9} \\ + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14}, \end{array}$$

$$f_{3,10} := \begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6}, \end{array}$$

得られた不変量 $v_{3,i} = \langle f_{3,i}, \cdot \rangle$

その4

$$f_{3,11} := \begin{array}{cccccccc} \odot & - & \odot & - & \odot & - & \odot & + & \odot & + & \odot & - & \odot \\ \text{dot at } (1,1) & & \text{dot at } (1,2) & & \text{dot at } (1,3) & & \text{dot at } (1,4) & & \text{dot at } (2,1) & & \text{dot at } (2,2) & & \text{dot at } (2,3) \end{array}$$

$$f_{3,12} := - \odot + \odot,$$

$$f_{3,13} := - \odot + \odot - \odot + \odot,$$

$$f_{3,14} := - \odot + \odot,$$

$$f_{3,15} := \odot - \odot + \odot - \odot,$$

得られた不変量 $v_{3,i} = \langle f_{3,i}, \cdot \rangle$

その5

$$f_{3,16} := -\text{diagram}_1 - \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 + \text{diagram}_4,$$

$$f_{3,17} := -\text{diagram}_5 + \text{diagram}_6,$$

$$f_{3,18} := \text{diagram}_7 - \text{diagram}_8 - \text{diagram}_9 + \text{diagram}_{10},$$

$$f_{3,19} := \text{diagram}_{11} + \text{diagram}_{12} + \text{diagram}_{13} - \text{diagram}_{14} - \text{diagram}_{15} - \text{diagram}_{16},$$

$$f_{3,20} := \text{diagram}_{17} - \text{diagram}_{18},$$

$$f_{3,21} := \text{diagram}_{19} - \text{diagram}_{20},$$

得られた不変量 $v_{2,i} = \langle f_{2,i}, \cdot \rangle$

その1

$$f_{2,1} := \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \end{array}, \text{ and}$$

$$f_{2,2} := \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \ominus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ - \end{array} + \begin{array}{c} \oplus \\ \leftarrow \\ \downarrow \\ \bullet \\ + \end{array} \cdot$$