

カスプ付きディバイドから定まる絡み目と

直線配置の Kirby 図式

(吉永正彦氏 (北大理) との共同研究)

菅原 朝見 (北大理 M2)

2021年12月26日, 結び目の数理IV

§ Introduction

定義

\mathbb{K} を体とする. \mathbb{K}^l 内のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathbb{K}^l$ を,
超平面配置 という.

• $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき, 補集合 $\mathbb{R}^l \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ はいくつかの連結成分へと分かれる.

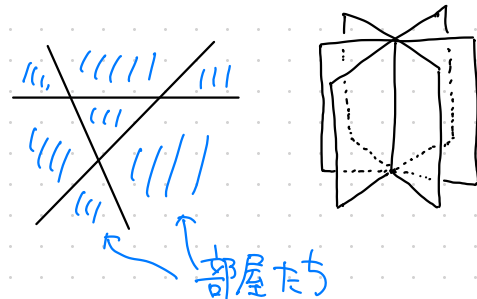
各連結成分を**部屋**とよび, $ch(\mathcal{A})$ を部屋全体からなる集合とする.

• $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき, 補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ は連結なアフィン代数多様体.

Question

$M(\mathcal{A})$ のトポロジーはどうなっているか?

• 本日は, $l=2$ (可なり直線配置) の場合を考える.



§ Introduction

$$\Delta = \{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathbb{C}^2$$

補集合 $M(\Delta)$ のトポロジー

- アフィン代数多様体 \rightsquigarrow 2次元CW複体のホモトピー型
- Lefschetz's thm によると, $M(\Delta) \simeq (M(\Delta) \cap F) \cup \cup (2\text{-cells})$
($F = \text{generic に交わる直線}$)
- Δ が実直線配置の複素化のとき, 2-セルの接着写像 (Yoshinaga '07)



- ハンドル分解
- カスプ付きディバイドを用いた Kirby 図式

$M(\Delta) = \text{実 4-mfld}$

ディバイド

D^2 への曲線のはみこみ
を使った結び目の表示



「カスプ付きディバイド」
への一般化

① §1 カスプ付き ティバイド

§2 直線配置のトポロジー

§3 カスプ付きティバイド による Kirby 図式

§1 カスプ付き ディバイド

定義

カスプ付きディバイド P とは、有限個の閉区間、 S^1 から D^2 への連続写像の像であり、有限個のカスプを除けば、proper で "generic な はめこみになるもの

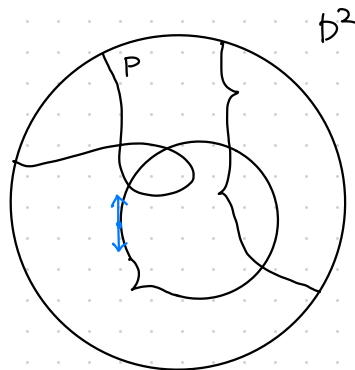
注

カスプが"ひとつもないものを **ディバイド** とする (AlCampano)

定義

$$L(P) = \{(x, y) \mid x \in P, y \in T_x P, |x|^2 + |y|^2 = 1\} \subset S^3$$

を **ディバイド絡み目** とする。



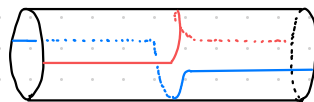
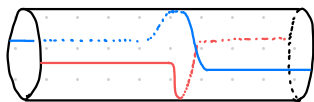
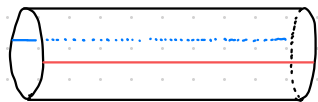
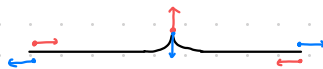
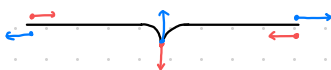
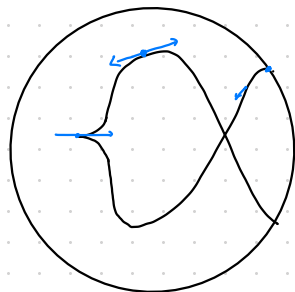
カスプ付きディバイドの例

§1 カスプ付き ディバイド

$$L(P) = \{ (x, y) \mid x \in P, y \in T_x P, |x|^2 + |y|^2 = 1 \} \subset S^3$$

注

- $x \in \text{Int} P$ に対しては, $\pm y \in T_x P$ が対応.
- $x \in \partial P$ に対しては, $0 \in T_x P$ が対応.
- カスプでは微分はできないが, 接線は存在する.
- カスプでは接ベクトルの向きを反転させる \rightsquigarrow $L(P)$ の半ひねりに対応 (下図)

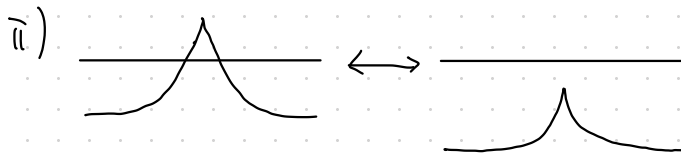


§1 カスプ付き ディバイド

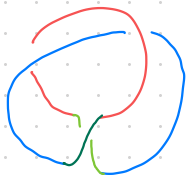
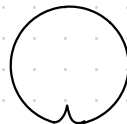
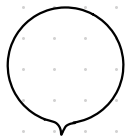
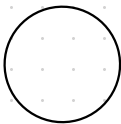
$$L(P) = \{ (x, y) \mid x \in P, y \in T_x P, |x|^2 + |y|^2 = 1 \} \subset S^3$$

注

以下の変形で $L(P)$ の イソトピー型 は 変わらない。



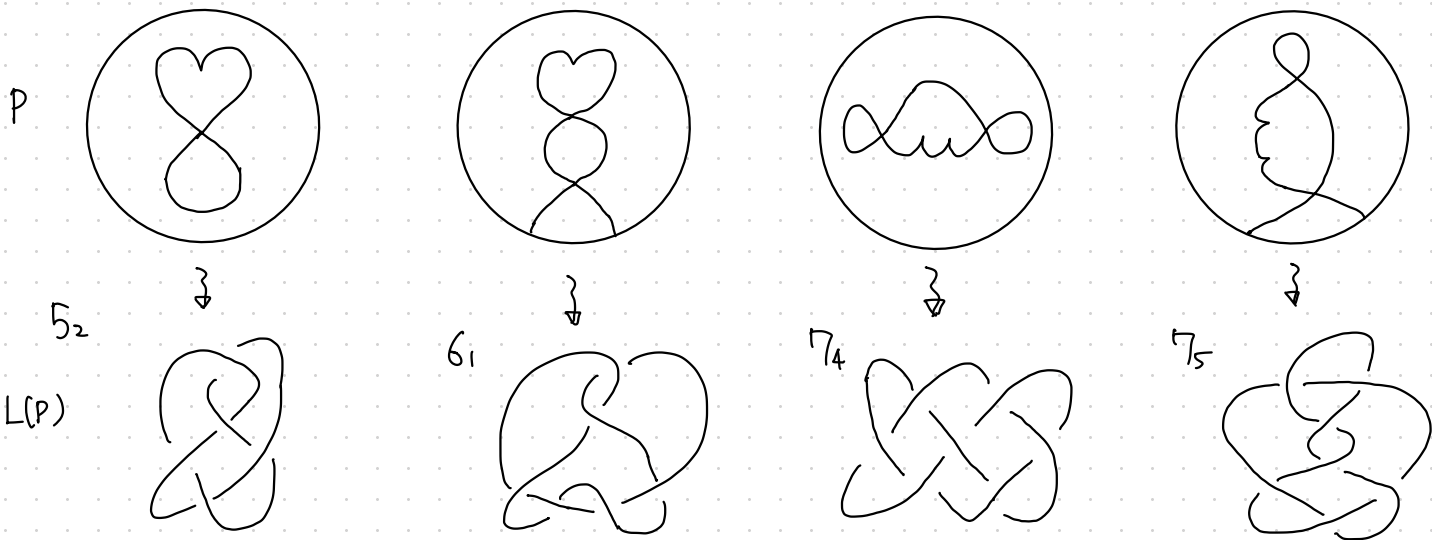
例



§1 カスプ付き ティバイド

例

絡み目が fibered とならない カスプ付き ティバイド.



c.f. P を連結な ティバイド とすると, $L(P)$ は fibered. (A'Campo)

§1 カスプ付き ティバイド

① §2 直線配置のトポロジー

§3 カスプ付きティバイド による Kirby 図式

§2 直線配置のトポロジー

$\Delta = \{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathbb{C}^2$ を複素超平面配置とする。

補集合 $M(\Delta)$ のセル分割について、次が知られている。

定理 (Dimca-Papadima, Randell, Falk ($l=2$))

$M(\Delta)$ は極小セル分割を持つ。すなわち、 $b_k(X) = (\text{k-セルの個数})$
をみたす CW 複体 X とホモトピー同値。

注

- 一般に $(\text{k-セルの個数}) \geq b_k(X)$
- $\mathbb{C}^2 \setminus \{y^2 - x^3 = 0\}$ は極小セル分割を持たない。

§2 直線配置のトポロジー

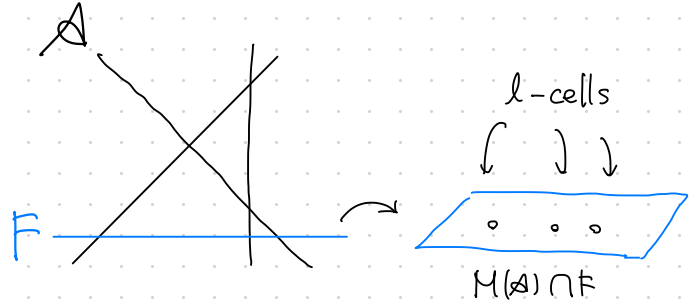
(証明のステップ)

定理 (Lefschetz 超平面切断定理)

$F \subseteq M$ と generic に交わる超平面とすると、

$$\bullet M(M) \cap F \simeq (M(M) \text{ の } (l-1) \text{ スケルトン})$$

$$\bullet M(M) \simeq (M(M) \cap F) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{C_l} D^l \right)$$



$$\leadsto C_l = \dim H_l(M(M), M(M) \cap F) = \#(l\text{-cell})$$

定理 (Orlik, Solomon)

$$[H_{l-1}(M(M) \cap F) \cong H_{l-1}(M(M))]$$

あとは対 $(M(M), M(M) \cap F)$ に対する長完全列から、 $H_l(M(M)) \cong H_l(M(M), M(M) \cap F)$

$$\leadsto b_l = C_l \text{ が従う}$$

□

§2 直線配置のトポロジー

- \mathcal{A} が実超平面配置の複素化のときは、実構造を用いた記述が可能.
- $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathbb{R}^2$: 実超平面配置 \rightsquigarrow 複素化 $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} = \{H_1 \otimes \mathbb{C}, \dots, H_n \otimes \mathbb{C}\}$
 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$ とする.

定義

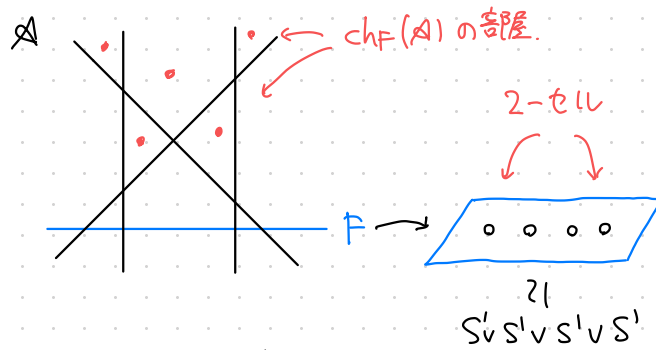
\mathcal{A} と generic に交わる超平面 F に対し、 $ch_F(\mathcal{A}) = \{C \in ch(\mathcal{A}) \mid C \cap F = \emptyset\}$ とする.

命題

l 次ベッチキ数 $b_l(M(\mathcal{A})) = \# ch_F(\mathcal{A})$
 とくに $l=2$ の場合は次がわかる.

命題

$M(\mathcal{A})$ は、 $(1-\text{スケルトン}) \simeq \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n \text{ 回}}$ で、2-セルが $ch_F(\mathcal{A})$ 枚あるセル分解を得る.



§1 カスプ付き 2-バインド

§2 直線配置のトポロジー

① §3 カスプ付き 2-バインド による Kirby 図式

§3 カスパ付きディバドを用いた Kirby 図式

定理 (S., Yoshinaga)

Δ を実直線配置とする。 Δ の複素化補集合 $M(\Delta)$ の Kirby 図式は、
 Δ の実構造を用いて組み合わせ的に書ける カスパ付きディバドから
得られる絡み目として表せる。

- ① 実直線配置からカスパ付きディバドを得る方法
- ② 定理の証明の概略

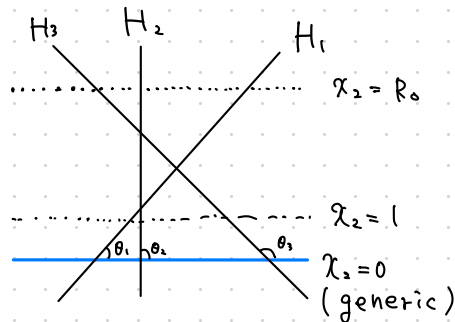
の順で述べていく。

§3 カスパ付きテイルドを用いた Kirby 図式

① 直線系配置からカスパ付きテイルドを得る方法 (1/3)

$\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathbb{R}^2$ に以下を仮定.

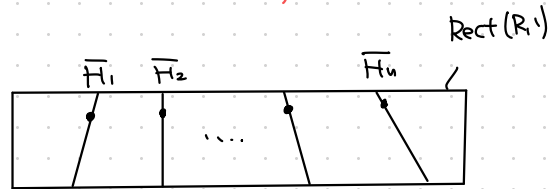
- (i) \mathcal{A} の直線の交点座標 (x_1, x_2) は, $1 < x_2 < R_0$ をみとく.
- (ii) $F = \{x_2 = 0\}$ は \mathcal{A} と generic に交わる.
- (iii) 各直線 H_i の傾き角度 θ_i は, $\frac{\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_n \leq \frac{3}{4}\pi$



定義

- $\text{Rect}(R, 1) := [-R, R] \times [-1, 1] \approx D^2$ (これが"テイルド"のはめこまれる D^2)
- $\bar{H}_i := H_i \cap \text{Rect}(R, 1) \approx I$

$\{\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_n\}$ は $\text{Rect}(R, 1)$ 上の "テイルド" とみなせる.



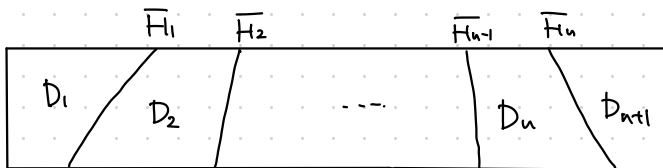
これは絡み目にしたとき, Kirby 図式の点付き円に対応する.

§3 カスパ付きディバイドを用いた Kirby 図式

① 直線配置からカスパ付きディバイドを得る方法 (2/3)

次に $C \in \text{ch}_F(\Delta)$ に対応するカスパ付きの曲線 $\sigma(C)$ を $\text{Rect}(R, 1)$ 上に構成する。

$\text{Rect}(R, 1)$ を次のように $(n+1)$ パーツに分ける。各パーツで曲線を作らなげる。

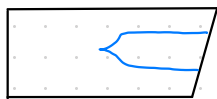


D_1

H_1 に対して C が左側

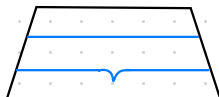


H_1 に対して C が右側



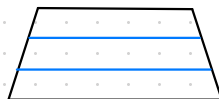
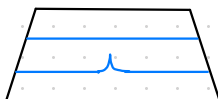
D_j ($j=2, \dots, n$)

H_{j-1} に対して左, H_j に対して右



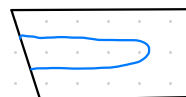
H_{j-1}, H_j に対してともに
同じ側

H_{j-1} に対して右, H_j に対して左

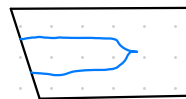


D_{n+1}

H_n に対して C が右側



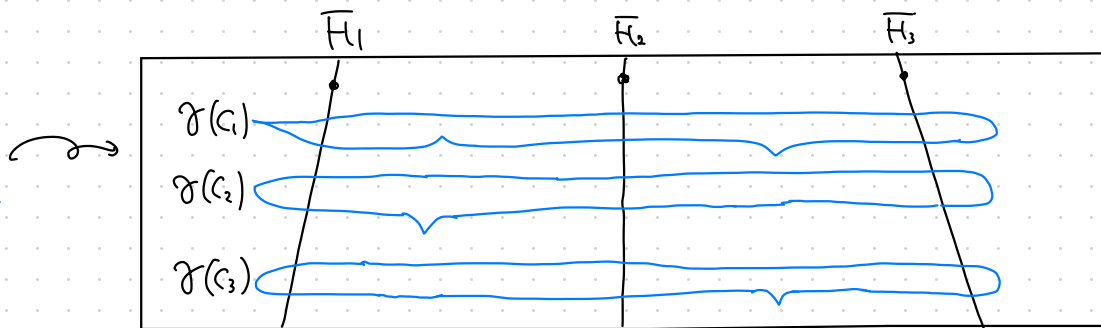
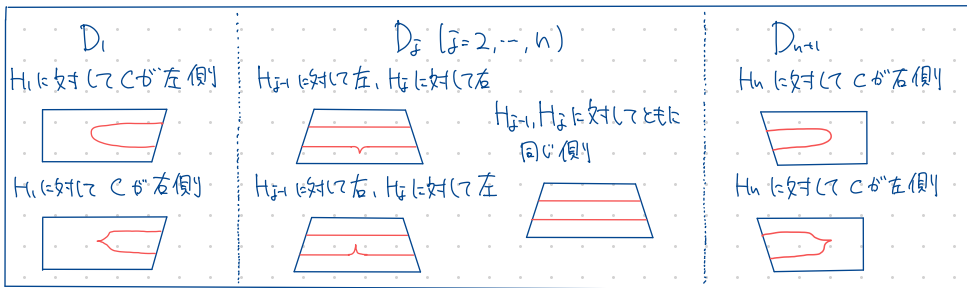
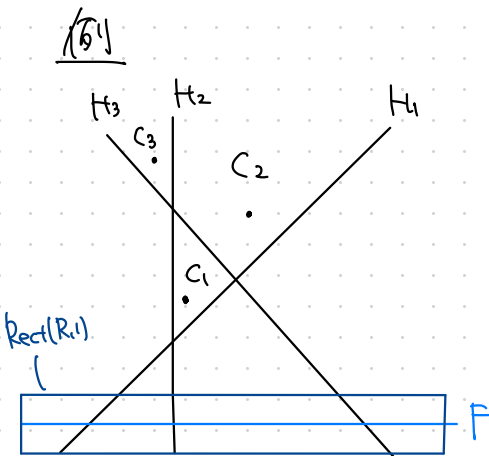
H_n に対して C が左側



§3 カスパ付きディバイドを用いた Kirby 図式

① 直線配置からカスパ付きディバイドを得る方法 (3/3)

$ch_F(\Delta)$ の元が複素数ある場合は, $C \in ch_F(\Delta)$ 上の任意の1点をとり, その α_2 座標が小さい順に, $Rect(R, 1)$ 内では, α_2 座標が大きいとこで γ_C を構成する.



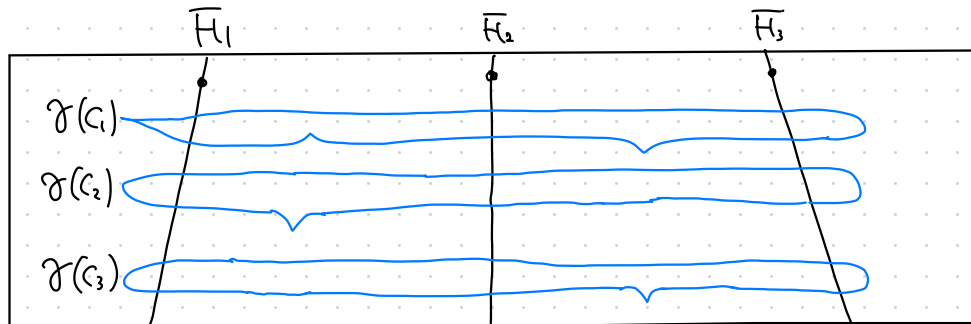
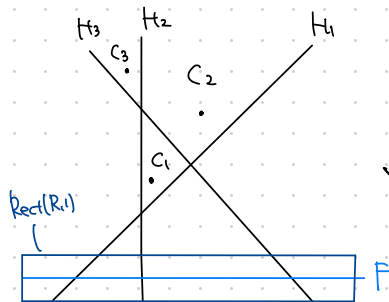
§3 カスパ付きディバイドを用いた Kirby 図式

定理の主張を改めて述べる.

定理 (S. Yoshinaga)

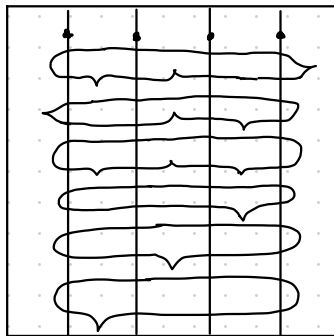
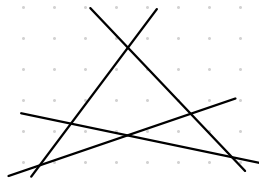
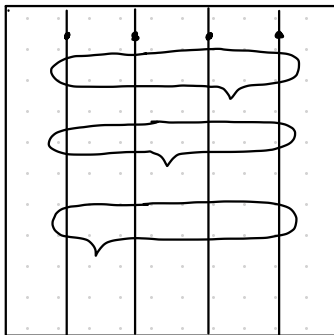
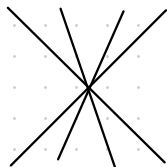
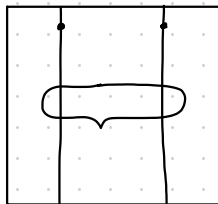
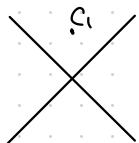
\mathcal{A} を実直線配置とする. 複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は,
 カスパ付きディバイド $\{H_1, \dots, H_n, \gamma(C_1), \dots, \gamma(C_0)\}$ から得られる
 絡み目により表される.

ただし H_i は 1-ハンドルの点付き円を表し, 2-ハンドルの接着円 $\gamma(C_i)$
 のフレミング係数は 0 である.



§3 カサ付キディバドを用いた Kirby 図式

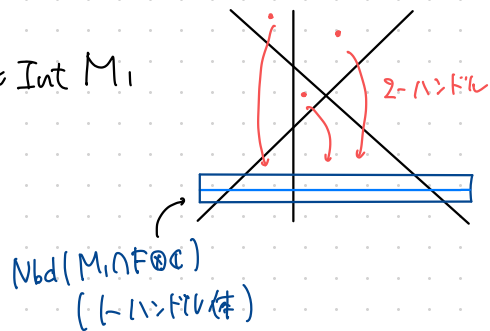
具体例



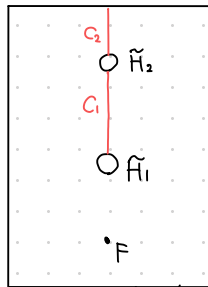
§3 カスプ付きディバイドを用いた Kirby 図式

② 証明の概略

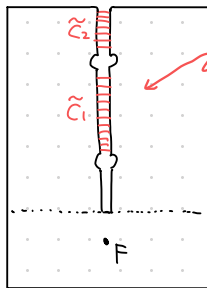
- i) 十分大きい半径の B^4 に対し, $M_1 = M(\Delta) \cap B^4$ とすると,
 M_1 はコンパクト境界つき 4次元多様体で, $M(\Delta) \approx \text{Int } M_1$.
- ii) M_1 の 1-バンドル体は, $\text{Nbd}(M_1 \cap F \otimes \mathbb{C})$ と diffeo.
- iii) 接着する 2-バンドルは, $\text{Cech}_F(\Delta)$ に 1:1 対応.
- iv) $\mathbb{C}^2 \cong T\mathbb{R}^2$ と同一視し, $\text{Cech}_F(\Delta)$ に対応する 2-バンドルの
接着円を, $T\mathbb{R}^2$ の切断として表す.
- v) この切断は, カスプ付きディバイド $\mathcal{D}(C)$ から得られる糸絡み目と
イソトピックになる.



§3 カサ付キタイプドを用いた Kirby 図式

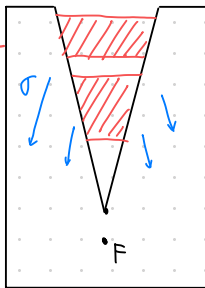


M_1



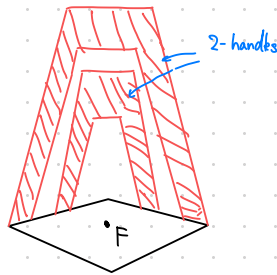
M_2

2-handle attaching!

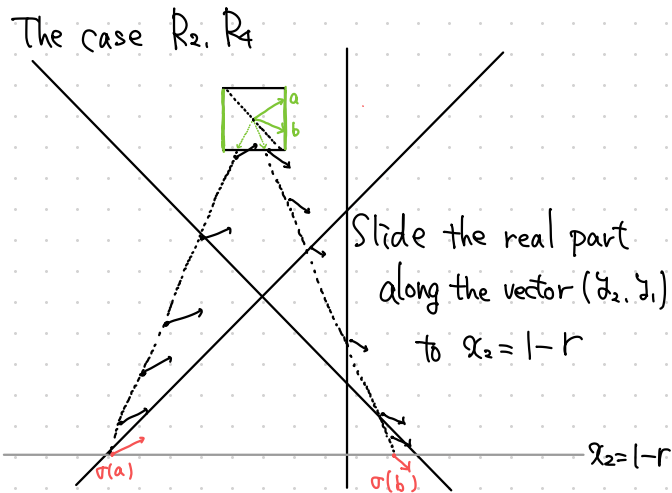
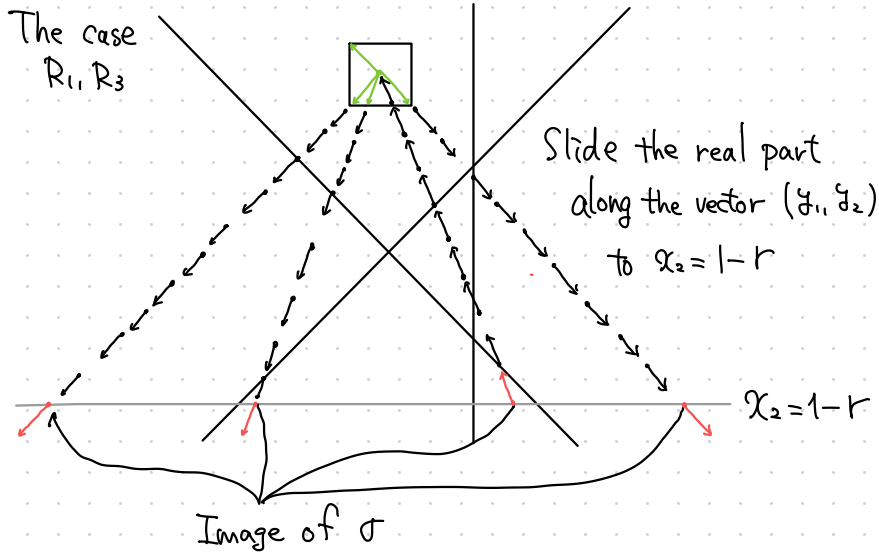


M_3

Define the contraction $\sigma: M_3 \rightarrow M_4$ next.



M_4



ご清聴ありがとうございました。

References

- S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, arXiv:2103.15262, to appear in Topology and its Applications.
- M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's Hyperplane section theorem, Kodai Math. J. 30 (2007)