Commensurability of cocompact Coxeter groups

Han Yoshida

National Institute of Technology, Gunma College

2021/12/25

1.1 通約可能性 (commensurability) の定義

定義：Γ_1， $\Gamma_2 \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ are commensurable
$\Leftrightarrow [\Gamma_1 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$ and $[\Gamma_2 : \Gamma_1 \cap \Gamma_2] < \infty$

Γ_1， $\Gamma_2 \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ are commensurable in the wide sense
$\Leftrightarrow$ Γ_1 and Γ_2 are commensurable up to conjugacy

$M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ and $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ are commensurable
$\Leftrightarrow$ Γ_1 and Γ_2 are commensurable in the wide sense
$\Leftrightarrow$ M_1 and M_2 have a common finite sheeted cover.

“commesurability” は同値関係となる．
以下 “in the wide sense” は省略する．

1.2, 通約可能性の性質

今までに知られていること

$M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ が commensurable $\Rightarrow$

・$\dfrac{vol(M_1)}{vol(M_2)} \in \mathbb{Q}$

$\Gamma_1, \Gamma_2 < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ のとき

・$\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\ \Gamma_1^{(2)}) = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\ \Gamma_2^{(2)})$ (invariant trace field が同じ)

$\Gamma^{(2)}$ is the subgroup of Γ generated by $\{\gamma^2 | \gamma \in \Gamma\}$

・$A(\Gamma_1) = A(\Gamma_2)$ (invariant quaternion algebra が同じ)

$A(\Gamma)$ is the $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma^{(2)})$-algebra of the 2×2 matrix algebra $M_2(\mathbb{C})$ generated over $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma^{(2)})$ by the elements of $\Gamma^{(2)}$

$M_1 = \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ と $M_2 = \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ が commensurable $\Leftrightarrow C(\Gamma_1) = C(\Gamma_2)$ (commensurator が同じ)

noncompact hyperbolic manifold $M_1, \cdots, M_n$ で ITF, IQA, 体積が同じだが commensurable でないものは知られている． commensurator を計算する方法も知られている．

1.3 Coxeter 群の定義

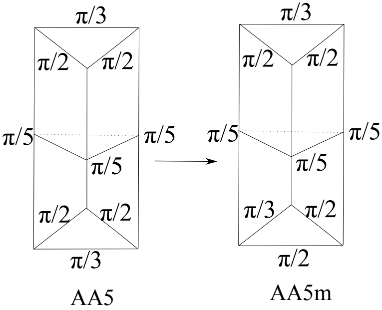
$P \subset \mathbb{H}^3$ を面角が π/k $(k \in \mathbb{Z})$ の形である多面体とする.
P の各面の鏡映変換で生成される群 $\Gamma(P)$ を P のコクセター群という.

2.Main Theorem

問題

図のようなコンパクト多面体 AA5, AA5m のコクセター群を Γ_1, Γ_2 とすると Γ_1^+, Γ_2^+ の ITF, IQA は同じで $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_1) = \mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_2)$ となる．Γ_1 と Γ_2 は commensurable か？ここで $\Gamma_i^+ = \Gamma_i \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$

C. Gyurek, R. Roeder, Problem on Mutant Pairs of Hyperbolic Polyhedra, https://arxiv.org/pdf/1906.08723.pdf



2. Main Theorem

問題

図のようなコンパクト多面体 AA5, AA5m のコクセター群を Γ_1, Γ_2 とすると Γ_1^+, Γ_2^+ の ITF, IQA は同じで $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_1) = \mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Gamma_2)$ となる．Γ_1 と Γ_2 は commensurable か？ここで $\Gamma_i^+ = \Gamma_i \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$

Main Theorem

NO!

3. 準備

Th 1 (Margulis)

Γ が非数論ならば Γ の **commensurator**
$C(\Gamma) = \{\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) : |\gamma\Gamma\gamma^{-1} : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma| < \infty, |\Gamma : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma| < \infty\}$
は Γ と通約可能な群をすべて含み，離散的となる．

注意：$M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ について $C(M) = \mathbb{H}^3/C(\Gamma)$ は M と通約可能な双曲 3 次元多様体，軌道体で体積が最小のもので，完全通約可能性類不変量となる．

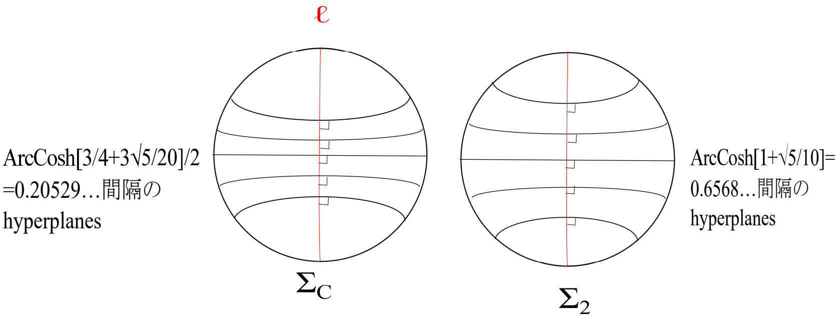
Main Theorem の Γ_1, Γ_2 が非数論的であることは C. Gyurek, R. Roeder が証明している．

Main Theorem の証明方針

Σ_C を Γ_1 の commensurator の sing. set，Σ_2 を Γ_2 の sing. set とすると $\Sigma_2 \not\subset \Sigma_C$ を示す．

Main Theorem　の証明方針

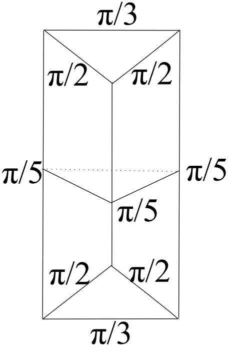
Σ_C : Γ_1 の commensurator の sing. set
Σ_2: Γ_2 の sing. set
とする.



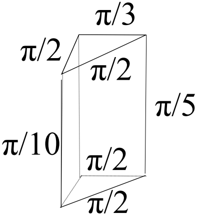
$\Sigma_2 \not\subset \Sigma_C$

注意

Γ_1 は下記の多面体 P のコクセター群 $\Gamma(P)$ と commensurable.
Γ_1 の commensurator は $\Gamma(P)$ を含む.



AA5

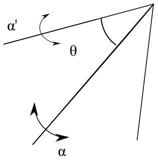


P

Lemma 1

$\alpha,\ \alpha' \in C(\Gamma_1)$ を超平面 $S,\ S'$ に関する鏡映変換 $(i = 1,\ 2\ )$, θ を S と S' のなす角とする.
このとき $\theta \in \Theta = \{k\pi/n | n = 4,\ 6,\ 10,\ 1 \leq k \leq n\}$

(Proof of Lemma 1)
$\alpha\alpha'$ は $2\theta-$rotation となる



$$\alpha\alpha' \sim \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

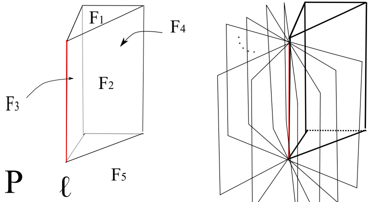
$\mathrm{tr}(\alpha\alpha')^2 = 2\cos 2\theta + 2 \in \mathbb{Q}(\mathrm{tr}(C(\Gamma_1)^+)^{(2)}) = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}(\Gamma_1^+)^{(2)}) =$
$\mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{8\sqrt{5} - 5}\right)\right)$ (invariant trace field)
これを満たすのは $\theta \in \Theta = \{k\pi/n | n = 4,\ 6,\ 10,\ 1 \leq k \leq n\}$

Lemma 2

Lemma 2

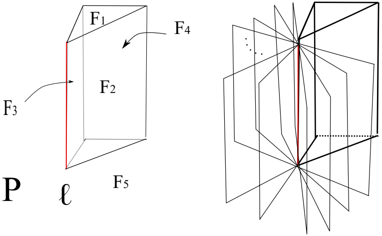
ℓ : 図のような P の *edge* を含む測地線
S_k : ℓ を通り，F_2 と面角 $k\pi/10$ で交わる超平面 $(k = 0, \cdots, 9)$
γ_i: F_i に関する鏡映変換
$\mathbb{H}^3$ 内の超平面 $S \subset \Sigma_C$ が $S \cap \ell \neq \emptyset$ とする．
このとき $S \in \{S_k : k = 0, \cdots, 9\} \cup \{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$.
ここで $\overline{F}_i$ $(i = 1, 5)$ は F_i を含む超平面.

Remark : S は ℓ を含んでいるか ℓ に直交している．
$S,\ S' \in \{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$ ならば
$d(S, S') = n(F_1, F_5) = n \cdot 0.20529 \cdots$ for some $n \in \mathbb{N}$



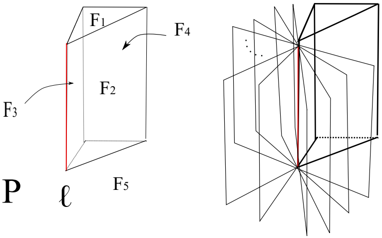
Lemma 2 の証明 (1)

$S, \ S_k \subset \Sigma_C$
θ_k を S と S_k との面角とすると
Lemma 1 より，すべての k に対して $\theta_k \in \Theta$ となる．
このような組み合わせは $\theta_k = \pi/2$ (for $k = 0, \cdots, 9$) または $S = S_k$ for some k

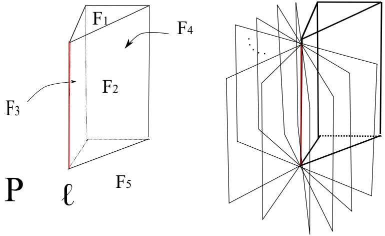


Lemma 2 の証明 (2)

$\theta_k = \pi/2$ (for $k = 0, \cdots, 9$) とする．
$(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ or $\gamma_1(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ for some $n \in \mathbb{Z}$
$(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ とする．F_4 と $(\gamma_1\gamma_5)^n(S)$ の面角を α とすると
$(\gamma_1\gamma_5)^n(S)$，$F_4 \subset \Sigma_C$ なので Lemma 1 より $\alpha \in \Theta$
$(\gamma_1\gamma_5)^n(S) \cap F_4 \neq \emptyset$ となるのは $\alpha = \pi/2, 2\pi/5, \pi/3$



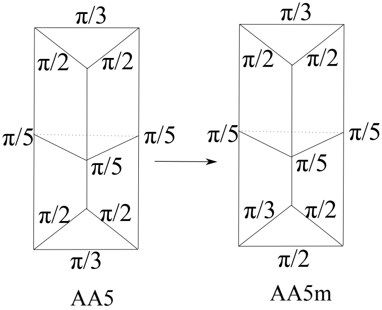
$(\gamma_1\gamma_5)^n(S)\cap F_4 \neq \emptyset$ となるのは $\alpha = \pi/2, 2\pi/5, \pi/3$
$\alpha = 2\pi/5$ のとき $(\gamma_1\gamma_5)^n\gamma_S(\gamma_1\gamma_5)^{-n}(F_1)$, $F_4 \subset \Sigma_C$ であるが
$(\gamma_1\gamma_5)^n\gamma_S(\gamma_1\gamma_5)^{-n}(F_1)$ と F_4 との面角 $\notin \Theta$ なので
$\alpha = \pi/2, \pi/3$
このとき $(\gamma_1\gamma_5)^n(S) = \overline{F_1}, \overline{F_5}$
よって, $S \in \{S_k : k = 0, \cdots, 9\} \cup \{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1}, (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$.
$\gamma_1(\gamma_1\gamma_5)^n(S)\cap F_4 \neq \emptyset$ の時も同様.



4. Proof of Main Theorem

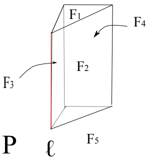
Main Theorem

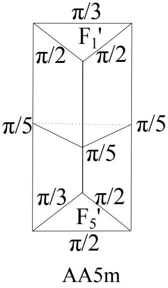
図のようなコンパクト多面体 *AA5, AA5m* のコクセター群を Γ_1, Γ_2 とすると Γ_1 と Γ_2 は *incommensurable.*



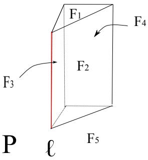
4. Proof of Main Theorem

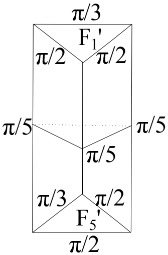
$C(\Gamma_1) = C(P) \not> \Gamma_2$ を示す.
$C(P) > \Gamma_2$ とすると $\Sigma_2 \subset \Sigma_C$
Lemma 2 の ℓ について考える.
$\exists \gamma \in \Gamma_2$ such that ℓ と $\gamma(AA5m)$ の 2 つの面と transversal に交わる.
Lemma 2 よりこの二つの面は平行になる.





Lemma 2 よりこの二つの面は平行になる.
ℓ は F_1' と F_5' に直交する.
$\overline{F_1'},\ \overline{F_5'} \in \{(\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_1},\ (\gamma_1\gamma_5)^n\overline{F_5} | n \in \mathbb{Z}\}$.
$d(F_1, F_5) = 0.20529\cdots,\ \ d(F_1', F_5') = 0.6568\cdots$ なので
$d(F_1', F_5') \neq n \cdot d(F_1, F_5)$ for $n \in \mathbb{N}$



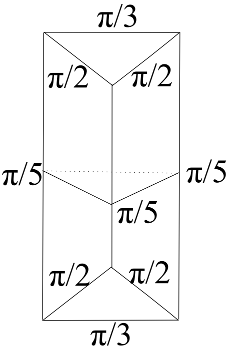


AA5m

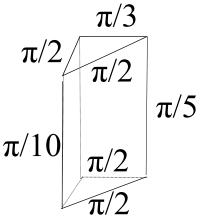
よって $\overline{F_1'},\ \overline{F_5'}$ は $C(P)$ に含まれない. 矛盾！

Th 2 (Y)

$C(\Gamma_1)$ は下記の多面体 P のコクセター群 $\Gamma(P)$.



AA5



P

5. 補足 2

Th 3 (Y)

$BB5$ と $BB5m$ は通約可能でない

主定理の証明と同様（略）