完全グラフの book presentation の分類

炭本 貴裕

大阪大学大学院理学研究科

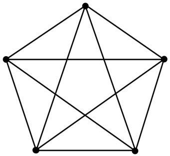
December 25, 2021

目次

準備

定義

K_n: n 頂点完全グラフ
$\Leftrightarrow$ n 個の頂点からなる抽象グラフで, 任意の異なる 2 頂点がちょうど 1 本の辺で結ばれている.



K_5

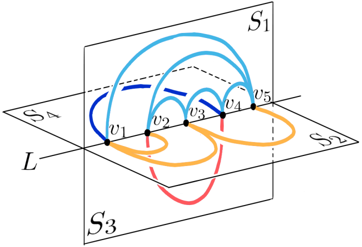
定義

部分空間 $V,\ W \subset \mathbb{R}^3$ が同型 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ の全同位で移り合う.

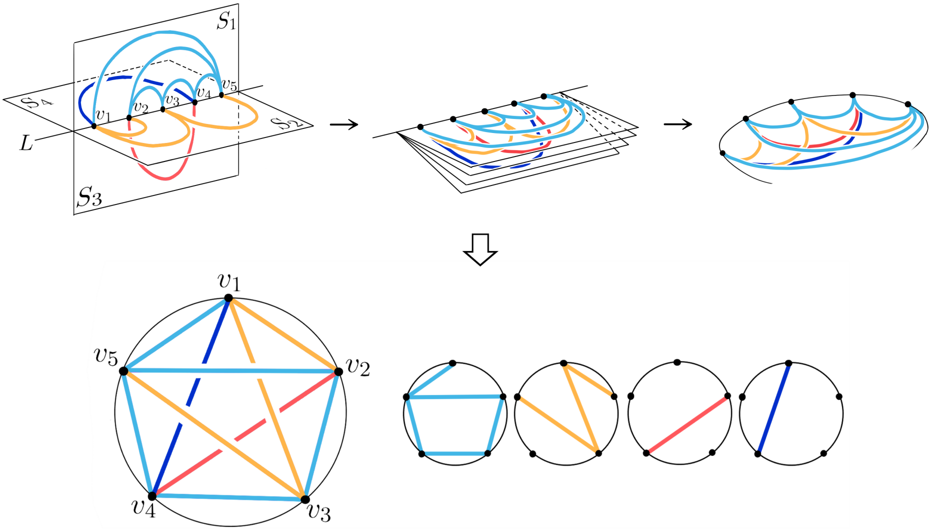
Book presentation

定義

L: 直線， $S_1,\cdots,S_n$: L を境界に持つ n 個の互いに異なる半平面，$B_n = L \cup \bigsqcup S_i \subset \mathbb{R}^3$.
$\widetilde{G}$: 抽象グラフ G の n-**book presentation**
$\Leftrightarrow$ G の B_n への埋め込みの像で次の 2 つの条件を満たす.
(1) G の全ての頂点は L に埋め込まれている.
(2) G の各辺はただ 1 つの S_i に proper に埋め込まれている.
各 S_i を **sheet** と呼ぶ.



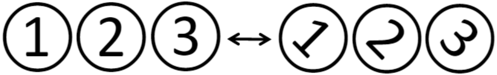
Book presentation の図式



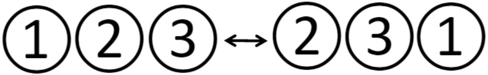
Book presentation の変形

Ⅰ～Ⅴは同型を保つ変形である.

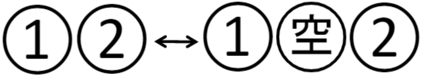
Ⅰ. 回転



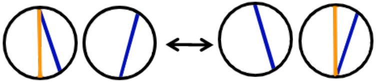
Ⅱ. sheet の移動



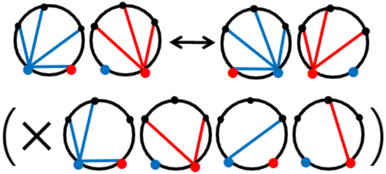
Ⅲ. 空の sheet の追加/削除



Ⅳ. 辺の移動



Ⅴ. 頂点の交換



隣り合う頂点を結んでいる辺はⅣによりどの sheet にも移れるので以降省略する.

Minimal book presentation

定義

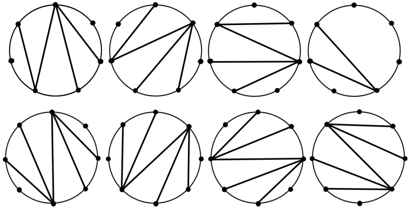
$S(G) = min\{\, n \,|\, G$ の n-book presentation が存在する $\}$: 抽象グラフ G の **sheet-number**.
$S(G)$-book presentation を G の **minimal book presentation** と言う.

命題

$$n \geq 4,\ S(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n:\ \text{偶数}), \\ \frac{n+1}{2} & (n:\ \text{奇数}). \end{cases}$$

$\widetilde{K}_7$

$\widetilde{K}_8$



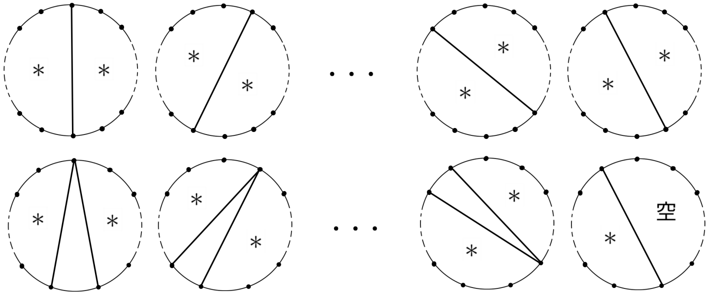
Canonical book presentation(1)

定義 (Otsuki, 1994)

$n \geq 4$, $\widetilde{K_n}$: **right canonical book presentation**
$\Leftrightarrow$ K_n の minimal book presentation で, n の偶奇それぞれで下図のようなもの.

n: 偶数

n: 奇数



Canonical book presentation(2)

定理 (Otsuki, 1994)

K_n の right canonical book presentation は同型の差を除いて一意的に定まる.

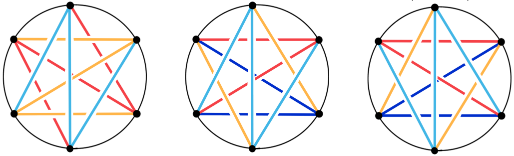
定理 (Otsuki, 1994)

$n \geq 5$ の時, K_n の right canonical book presentation に含まれる K_{n-1} の book presentation は全て right canonical である.

主結果

- 先行研究
  K_6 の全ての book presentation の同型類が分類された (Rowland, 2017).

$(6, A)$ $(6, B)$ $(6, \overline{B})$



$\cdots$ 59 個

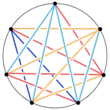
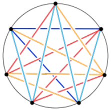
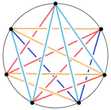
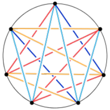
minimal book presentation は $(6, A)$ のみ.

主結果 (S.)

K_7, K_8 の minimal book presentation の同型類を分類した.

主結果の概要 (K_7 の場合)

K_7 の minimal book presentation は, 変形 I ～ V で移り合うものと鏡像の差を除けば次の 4 個.

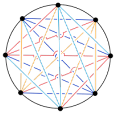
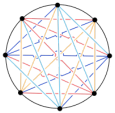
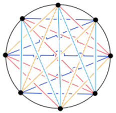
$(7,A)$	$(7,B)$	$(7,C)$	$(7,D)$
			
$(6,A)\times 7$	$(6,A)\times 6$ $(6,B)\times 1$	$(6,A)\times 5$ $(6,B)\times 2$	$(6,A)\times 4$ $(6,B)\times 2$ $(6,\overline{B})\times 1$

- $(7,A),\dots,(7,D)$ は鏡像の差も込めて互いに非同型 ($\because$ 含んでいる K_6 の book presentation が異なる).
- $(7,A)$ 以外は鏡像と非同型 ($\because$ $(6,B)$ は鏡像と非同型).
- $(7,A)$ も鏡像と非同型 ($\because$ $(7,A)$ に含まれる長さ 7 の非自明な結び目は左手型三葉結び目 1 個のみ (cf.Conway-Gordon)).

$\Rightarrow$ 同型類は $(7,A),\dots,(7,D),(7,\overline{A}),\dots,(7,\overline{D})$ の 8 個.

主結果の概要 (K_8 の場合)

K_8 の minimal book presentation は, 変形 I 〜 V で移り合うものと鏡像の差を除けば次の 3 個.

$(8, A)$	$(8, B)$	$(8, C)$
		
$(7, A) \times 8$	$(7, A) \times 4$ $(7, \overline{A}) \times 4$	$(7, C) \times 2$ $(7, \overline{C}) \times 2$ $(7, D) \times 2$ $(7, \overline{D}) \times 2$

- $(8, A), \ldots, (8, C)$ は鏡像の差も込めて互いに非同型 ($\because$ 含んでいる K_7 の book presentation が異なる).
- $(8, A)$ は鏡像と非同型 ($\because$ $(7, A)$ は鏡像と非同型).
- $(8, B), (8, C)$ は鏡像と同型 ($\because$ 左右反転したものと変形 I (回転) により移り合う).

$\Rightarrow$ 同型類は $(8, A), \ldots, (8, C), (8, \overline{A})$ の 4 個.

ご清聴ありがとうございました.