

組紐指数3の結び目の 影に関する研究

R03/12/25

岐阜大学大学院教育学研究科
中村将士

(岐阜大学教育学部 花木 良氏との共同研究)

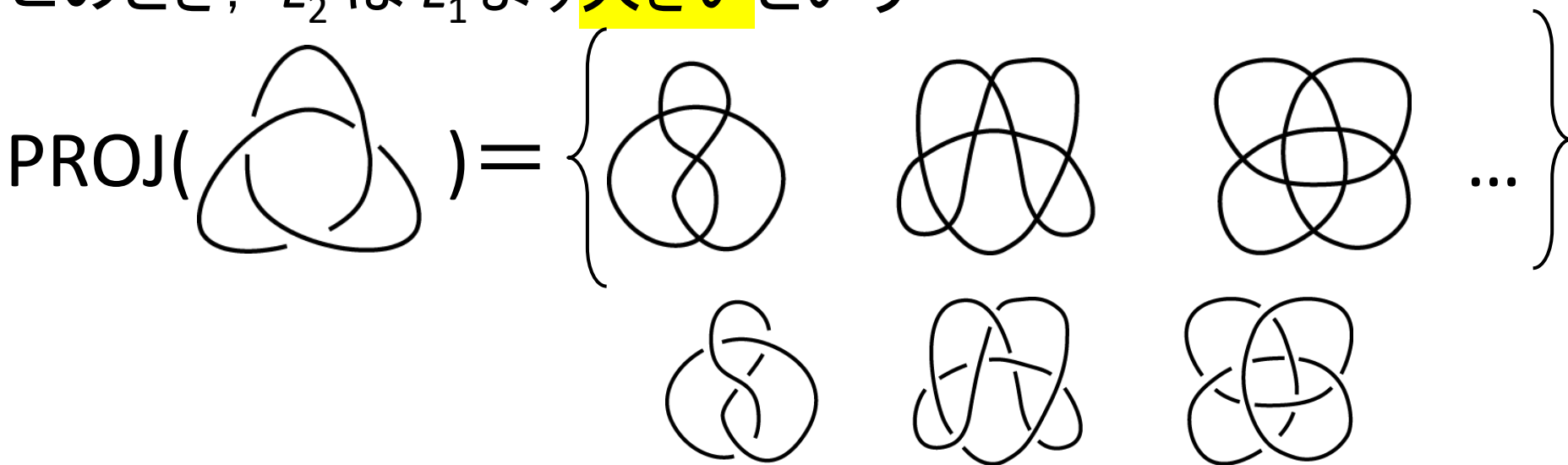
先行研究 | 結び目の半順序

$\text{PROJ}(L)$: 絡み目 L の影の集合

L_1 は L_2 より **小さい (minor)** ($L_1 \leq L_2, L_2 \geq L_1$) [Taniyama'89]

$\Leftrightarrow \text{PROJ}(L_1) \supset \text{PROJ}(L_2)$

このとき, L_2 は L_1 より **大きい** という



\mathcal{L}^μ : μ -成分の絡み目の集合

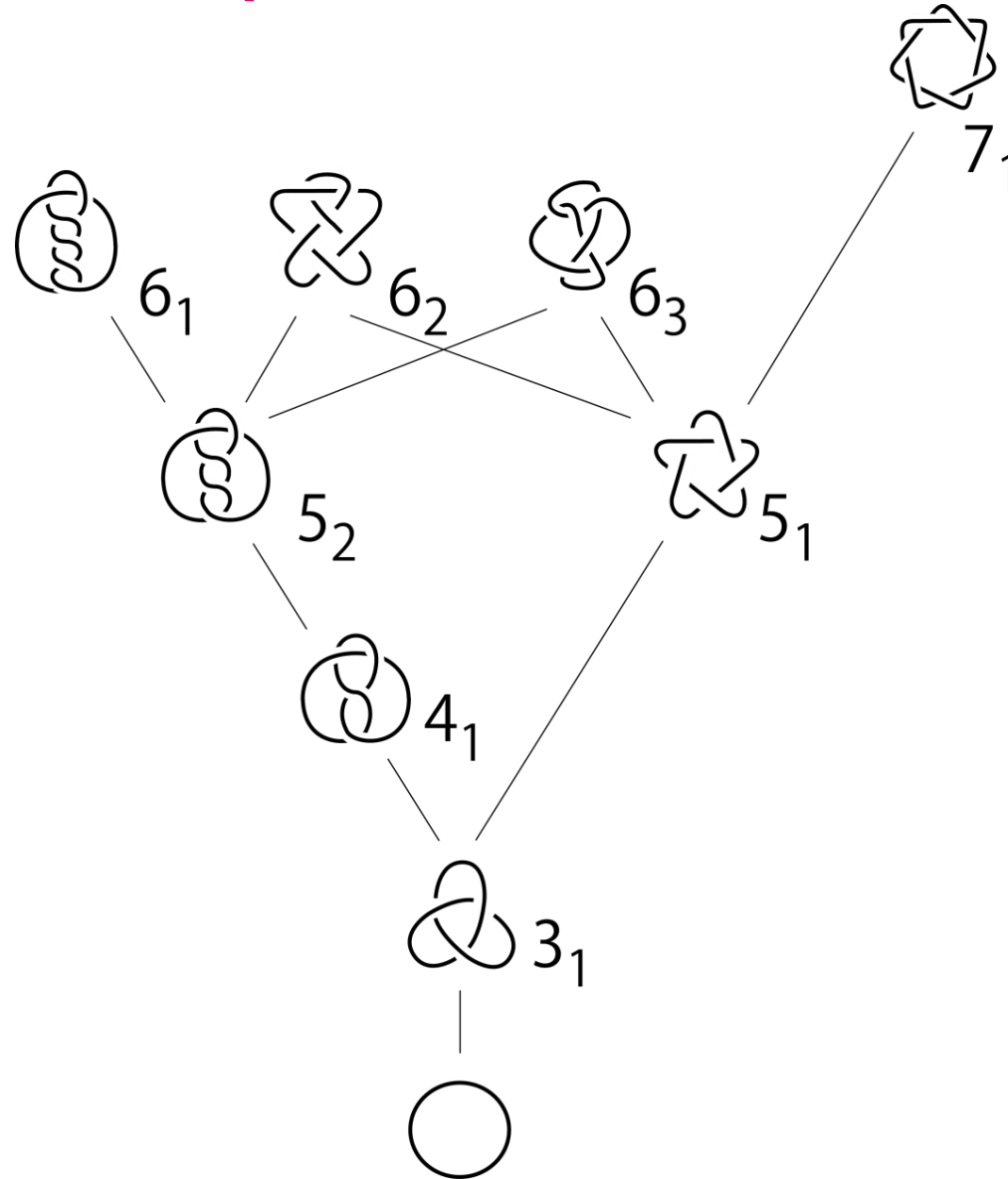
(\mathcal{L}^μ, \leq) は半順序 (対称律, 推移律) である

先行研究 | 結び目の半順序

- ➡ K : 非自明な結び目
- ➡ 定理 K は, 3_1 より大きい
- ➡ 定理 K は, 4_1 より大きい
 - ⇔ K は, $(2,p)$ トーラス結び目以外の素な結び目を含む
- ➡ 定理
 - K は, 5_1 より大きい
 - ⇔ K は, プレッツェル結び目 (p_1, p_2, p_3) 以外の素な結び目を含む
- ➡ 定理
 - K は, 5_2 より大きい
 - ⇔ K は, $(2,p)$ トーラス結び目と 4_1 以外の素な結び目を含む

先行研究 | 結び目の半順序

[Taniyama'89]



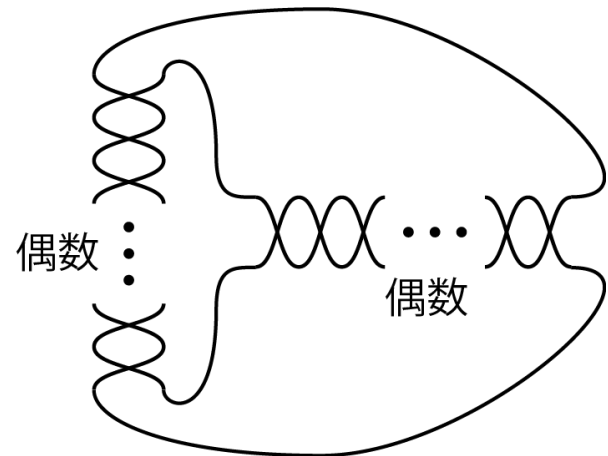
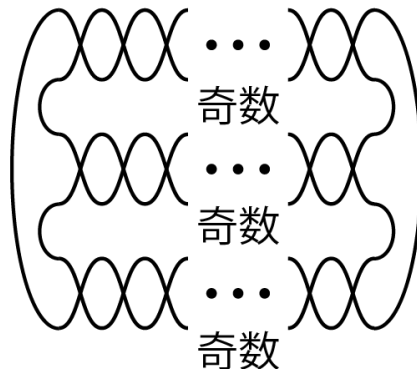
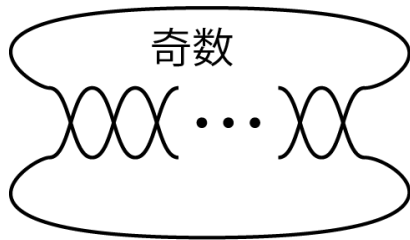
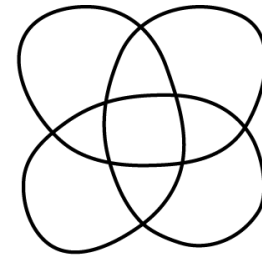
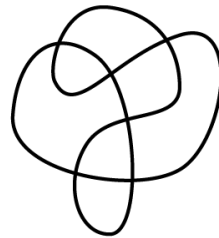
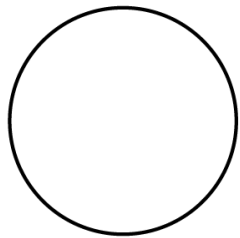
先行研究 | 結び目の半順序

➡ 定理 [Takimura, 2018]

➡ $\text{PROJ}(6_2)$

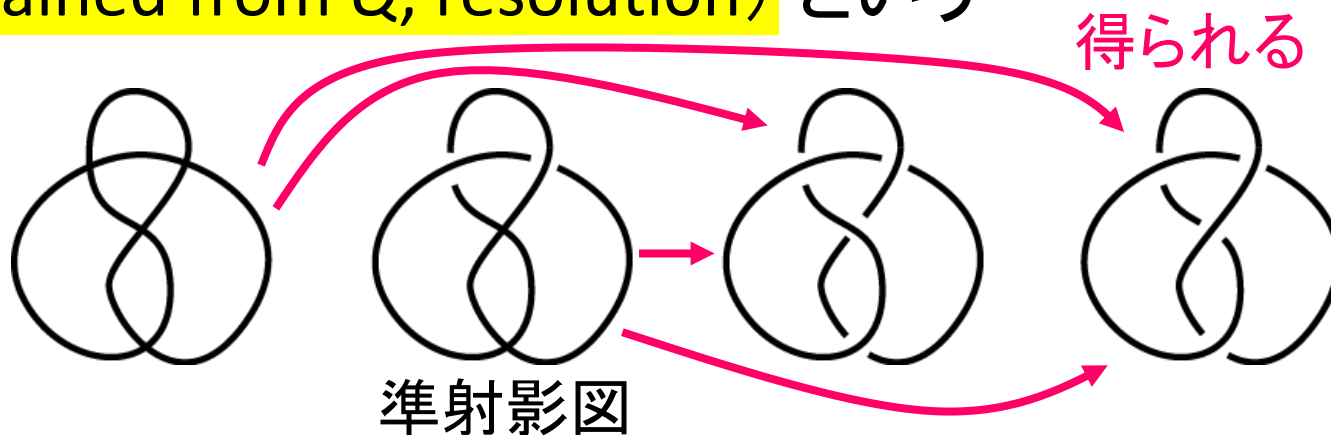
= 結び目の影全体の集合から

以下の6種類の連結和を引いたもの



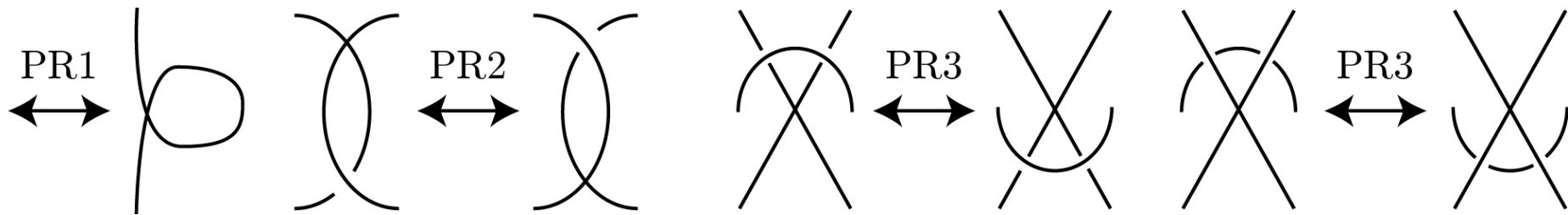
定義 | 結び目, 影, 準射影図, 得られる

- ダイアグラムのすべての交点で上下情報がないもの (前交点 (precrossing)) を, 影 (shadow) という
- 一部の交点で上下情報がないものを 準射影図 (pseudo diagram) という [Hanaki, 2010]
 - 準射影図は, ダイアグラムと影を含む
- 準射影図 Q の前交点に上下情報を与えて得られる ダイアグラム やそれが表す結び目は, Q から得られる (obtained from Q , resolution) という



先行研究 | 準結び目

- ➡ 準射影図に対して、ライデマイスター移動に加え、次を許したものを**準結び目 (pseudoknot)**という [Henrich-Hoberg-Jablan-Johnson-Minten-Radovic, 2013]



- ➡ $\text{WeRe-set}(Q) = \{(K, p_K) \mid K: Q \text{ から得られる結び目, } p_K \text{ は } K \text{ が得られる確率}\}$
- ➡ Q の重み付き集合 (Weighted Resolution set) とよぶ

先行研究 | 準結び目

$$\text{WeRe-set}(\text{図}) = \left\{ (\bigcirc, 6/8), (\text{図}, 2/8) \right\}$$

$$\text{WeRe-set}(\text{図}) = \left\{ (\bigcirc, 38/64), (\text{図}, 14/64), (\text{図}, 6/64) \right. \\ \left. (\text{図}, 2/64), (\text{図}, 2/64), (\text{図}, 2/64) \right\}$$

➡ 9交点までの影と準射影図から得られる結び目の集合は調べられている

➡ <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pseudotab.pdf>

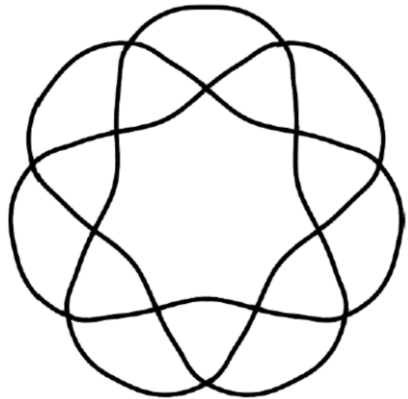
先行研究 | 準結び目

➡ $(2, p)$ トーラス結び目の影での、出てくる結び目の確率

$$\left\{ \left(0_1, \frac{\binom{p}{n}}{2^{p-1}} \right), \left(3_1, \frac{\binom{p}{n-1}}{2^{p-1}} \right), \dots, \left(p_1, \frac{\binom{p}{0}}{2^{p-1}} \right) \right\}$$

➡ 9前交点以下の結び目の影では、
自明な結び目は 3_1 より多く出てくる

➡ 次は、 3_1 の方が、自明な結び目より多く出てくる



$$\left\{ \left(0_1, \frac{2688}{2^{14}} \right), \left(3_1, \frac{2884}{2^{14}} \right), \dots \right\}$$

先行研究 | 自明な結び目の確率

- ➡ $p(n)$: n 個の前交点をもつ影から得られる自明な結び目の確率
- ➡ $n \rightarrow \infty$ とすると, $p(n) \rightarrow 0$ と知られている
 - ➡ [Pippenger, 1989]
- ➡ n 個の前交点をもつ影から得られる自明な結び目の個数は, $2^{\sqrt[3]{n}}$ 以上である
 - ➡ [Medina-Alfonsín-Salazar, 2019]

先行研究 | 結び目の確率

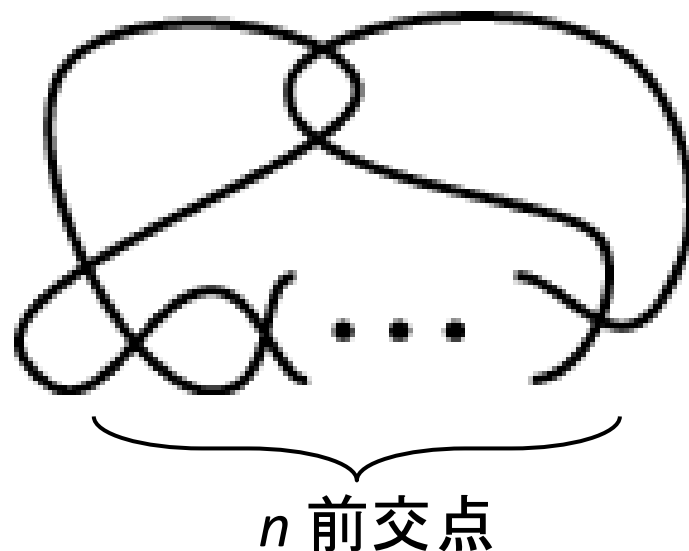
➡ [Ducharme-Peters, 2020]

➡ 予想

十分大きい n と $n+1$ 前交点をもつ影の中で,
($2, n$) トーラスの影は, 3_1 を最も多く得られる

➡ 予想

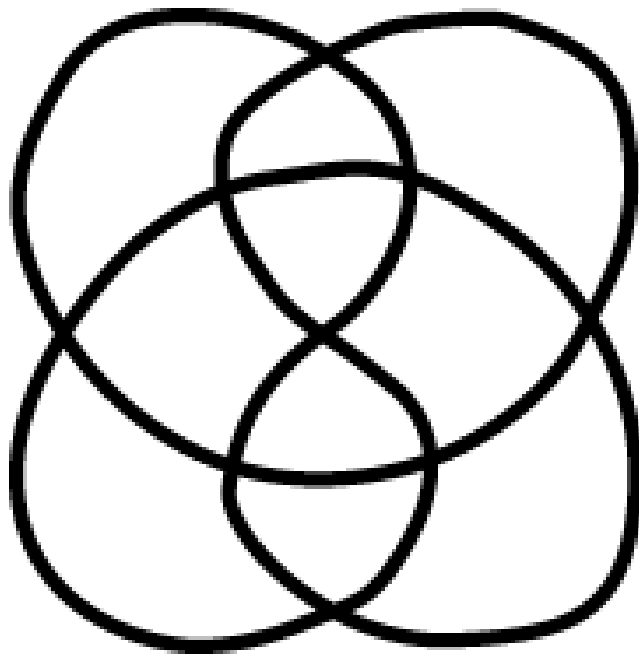
十分大きい $n+2$ 前交点をもつ影の中で,
右の影は,
 3_1 を最も少なく得,
自明を最も多く得る



先行研究 | 結び目の確率

➡ [Ducharme-Peters, 2020]

➡ 9_{40} の影は, 3_1 より 4_1 が得られる確率が高い



3-braidの影の表記

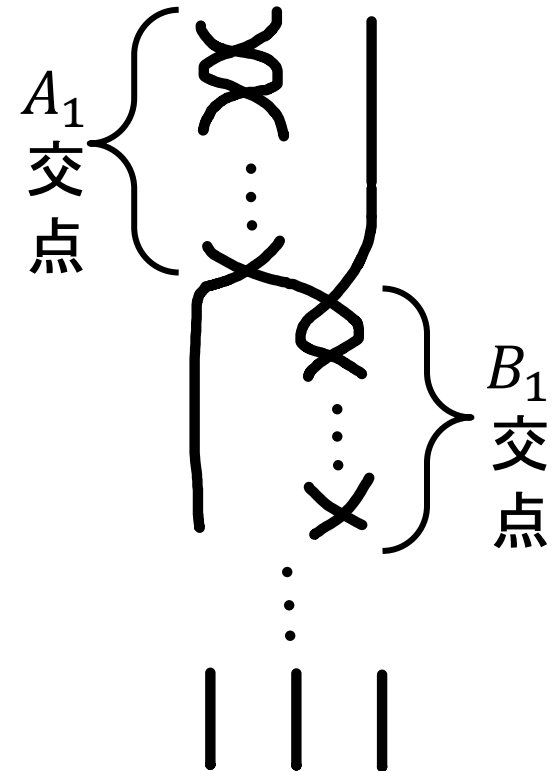
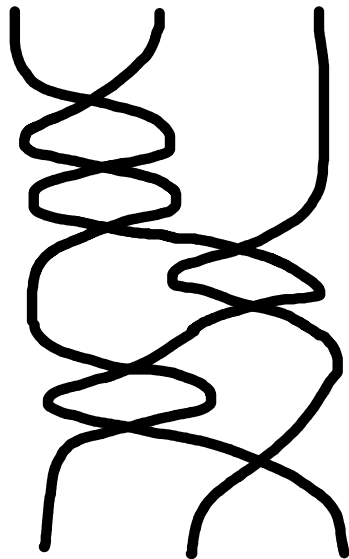
➡ 3-braidの影 B を非負整数の組

$A_1 B_1 A_2 B_2 \dots B_m$ で表す.

各 A_i, B_i を成分といい,
 $2m$ を成分の個数という

➡ 以後, B は, 3-braidの影を表す

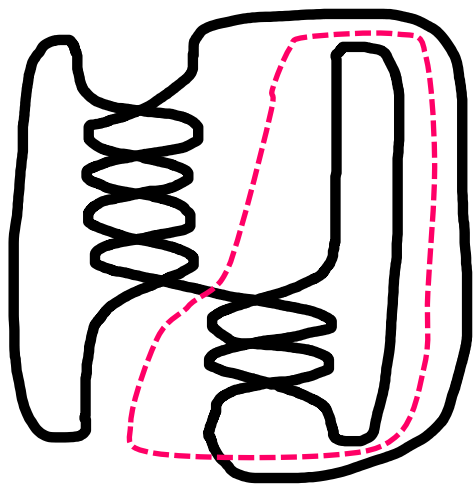
➡ 例 3221



合成

➡ B は合成

⇔ B を閉包したダイアグラムと2点で交わる円周で、
内側にも外側にも前交点を含むものが存在する



➡ 合成でない場合, 素という

➡ 成分に0がないとき, 合成 ⇔ 成分の個数が2

3-braidの影のリスト

前交点数	組紐表記
2	11
4	31, 1111
6	51, 33, 3111, 2211
8	71, 53, 5111, 4211, 3311, 3221, 3131, 221111, 212111, 11111111
10	91, 73, 7111, 6211, 55, 5311, 5221, 5131, 4411, 4312, 4231, 421111, 412111, 3331, 3322, 322111, 321211, 321112, 312211, 312121, 31111111, 222211, 221221, 21211111, 21121111, 1111111111

➡ これらの影から出てくる結び目とその数を調べた

自明な結び目の出る確率の考察

前交点 の数	自明な結び目の確率	
	最小値	最大値
4	75% (31, 1111)	
6	56.25% (33, 2211)	62.5% (51) 59.38% (3111)
8	34.38% (11111111)	54.69% (71) 50.78% (5111)
10	29.10% (31111111)	49.21% (91) 45.12% (7111)

素の場合

出てくる結び目の確率の比較

- ➡ $p(K, S)$: S から得られる結び目 K の確率
- ➡ $\forall S$: 10交点以下の組紐の影では,
 $p(3_1, S) > p(4_1, S)$
- ➡ 影55は, $p(0, 55) = p(3_1, 55)$ で,
それ以外の S では, $p(0, S) > p(3_1, S)$

命題

$$p(0, 55) = p(3_1, 55), \quad p(0, 93) = p(3_1, 93)$$
$$mn (m > 5, n \geq 5) \text{ と } kl (k > 9, l = 3) \text{ では,}$$
$$p(0, mn) < p(3_1, mn), \quad p(0, kl) < p(3_1, kl)$$

自明な結び目より 3_1 が出てくる影

次が成り立つ

$$4400/2^{14} = p(0, 5522) < p(3_1, 5522) = 4760/2^{14}$$

$$4564/2^{14} = p(0, 7322) < p(3_1, 7322) = 4746/2^{14}$$

$$1280/2^{12} = p(0, 5322) > p(3_1, 5322) = 1244/2^{12}$$

$$1428/2^{12} = p(0, 7122) > p(3_1, 7122) = 1190/2^{12}$$

$$5208/2^{14} = p(0, 9122) > p(3_1, 9122) = 4572/2^{14}$$

$$19272/2^{16} = p(0, (11)122) > p(3_1, (11)122) = 17556/2^{16}$$

4₁, 5₁, 5₂と6₂の出てくる影

- ➡ $K_B = \{B \text{に上下を入れて閉包して得られるダイアグラムで表現される結び目}\}$
- ➡ 以下ではBの成分に0を含まないとする
- ➡ **定理1** $4_1 \in K_B \Leftrightarrow B \text{の成分の個数が4以上}$
- ➡ **定理2** $5_1 \in K_B \Leftrightarrow B \text{が} 33 \text{ではなく, 前交点が6以上}$
- ➡ **定理3** $5_2 \in K_B$
 $\Leftrightarrow B \text{の成分の個数が4以上かつ前交点が6以上}$
- ➡ **定理4** $6_2 \in K_B$
 $\Leftrightarrow B \text{の成分の個数が4以上かつ前交点が6以上}$

組紐の包含

➡ BがB'を包含している($B' \subset B$)とは、
次の変形を使って、BからB'が得られるときをいう

- ① Bの成分を -2 にする
- ② 111111を取り除く
- ③ 0を取り除き、0の前後の成分は、それらの和に置き換える
 - $A_1 = 0$ のときは、 B_1 と B_n の和を新たに B_n とし、 A_1 と B_1 を除去
 - $B_n = 0$ のときは、 A_1 と A_n の和を新たに A_1 とし、 A_n と B_n を除去
- ④ $A_i \rightarrow B_i$, $B_i \rightarrow A_{i+1}$, $B_m \rightarrow A_1$ と置き換える
- ⑤ $A_1 \rightarrow A_1$, $B_i \rightarrow B_{m-i+1}$, $A_i \rightarrow A_{m-i+2}$ と置き換える

組紐の包含と K_B の関係

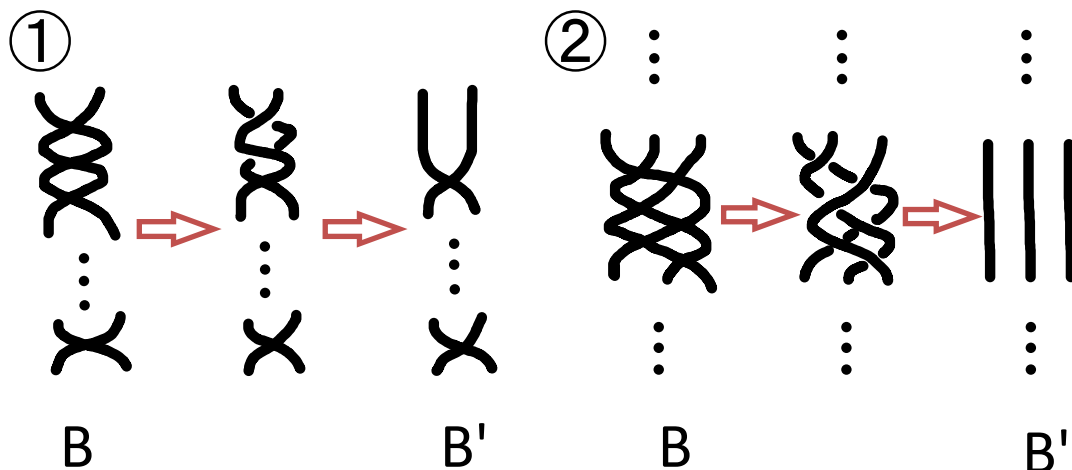
➡ 命題

B が B' を包含しているとき, $K_{B'} \subset K_B$

➡ 証明

B に①～⑤の各変形をしたときに得られた B' に対し,
 $\forall K \in K_{B'}$ とする. このとき $K \in K_B$ であれば良い.

①,②は次の図のように部分的に上下つけることに等しい.

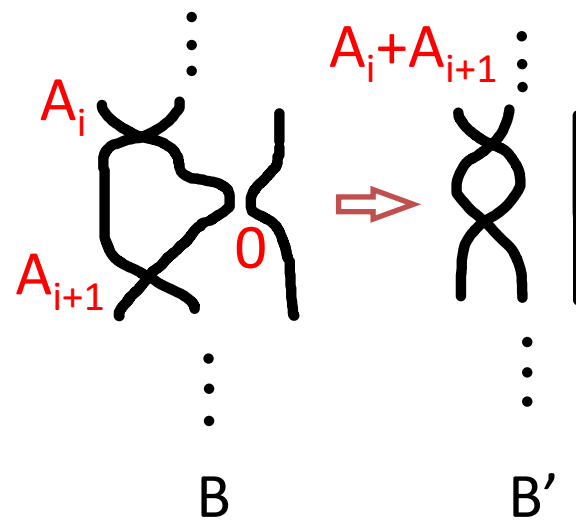


組紐の包含と K_B の関係

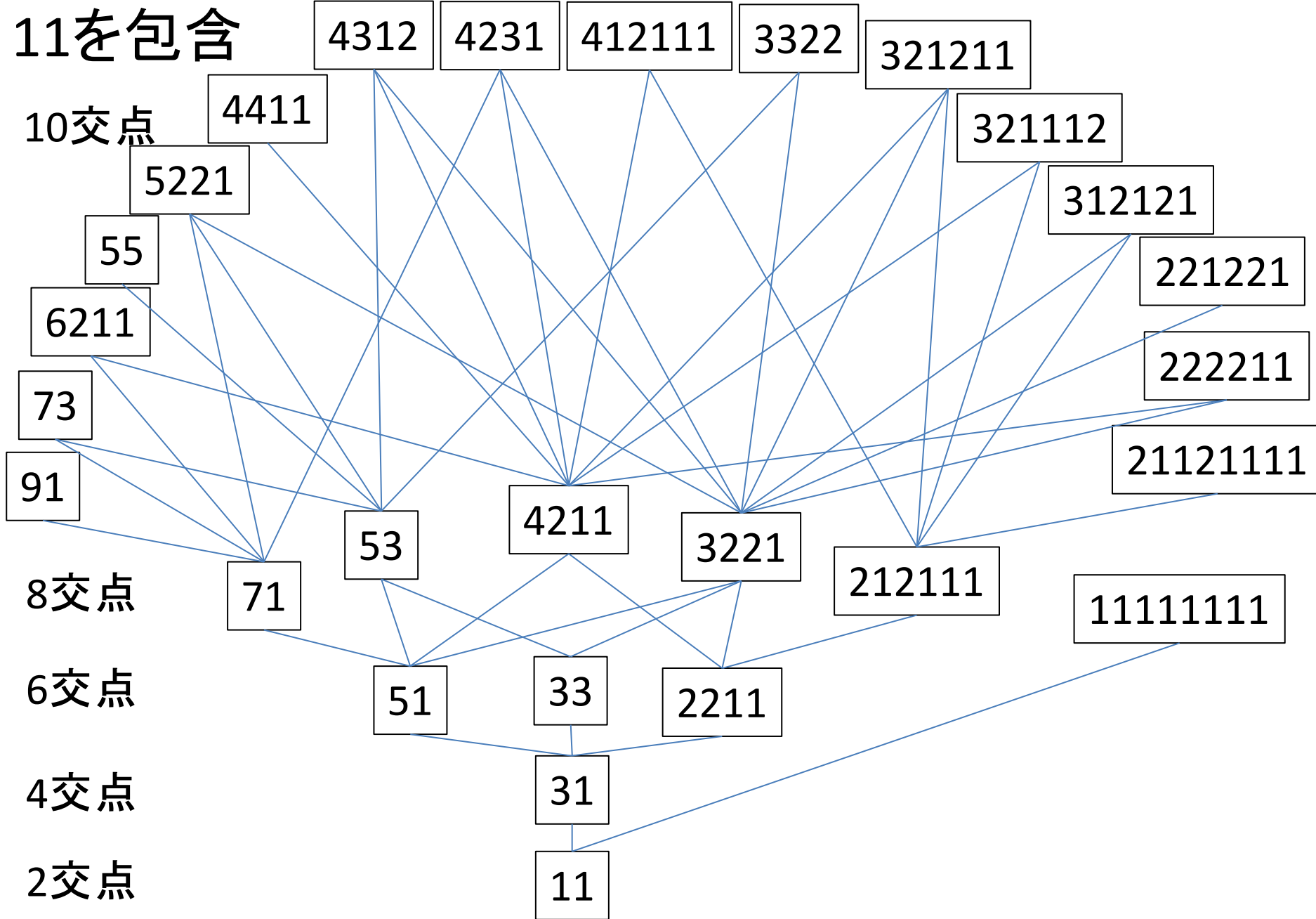
③は組紐の影上では右のような変形を表す.

④,⑤については閉包すると同一の影を表す.

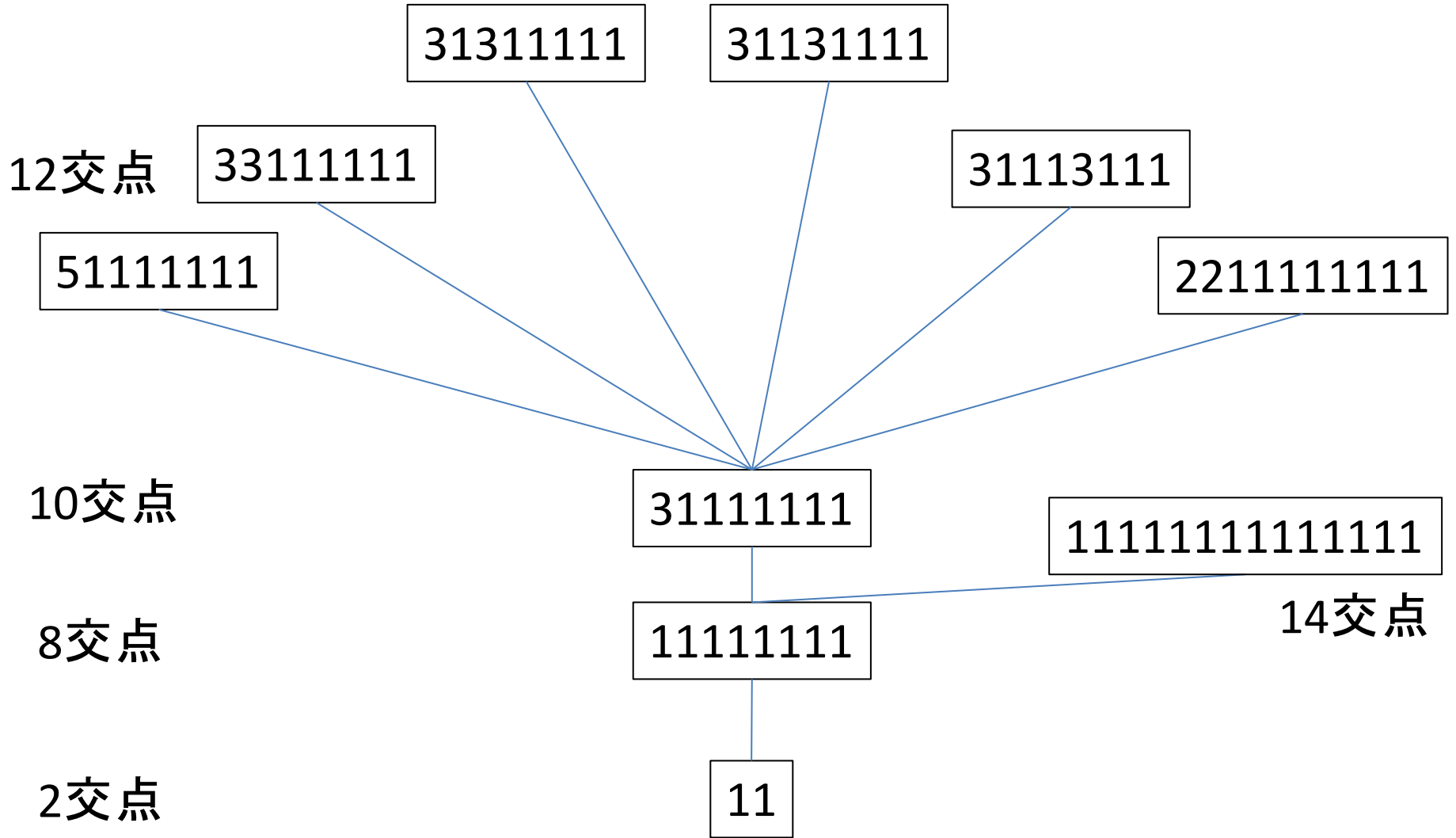
①~⑤のいずれの変形においても $K \in K_B$.



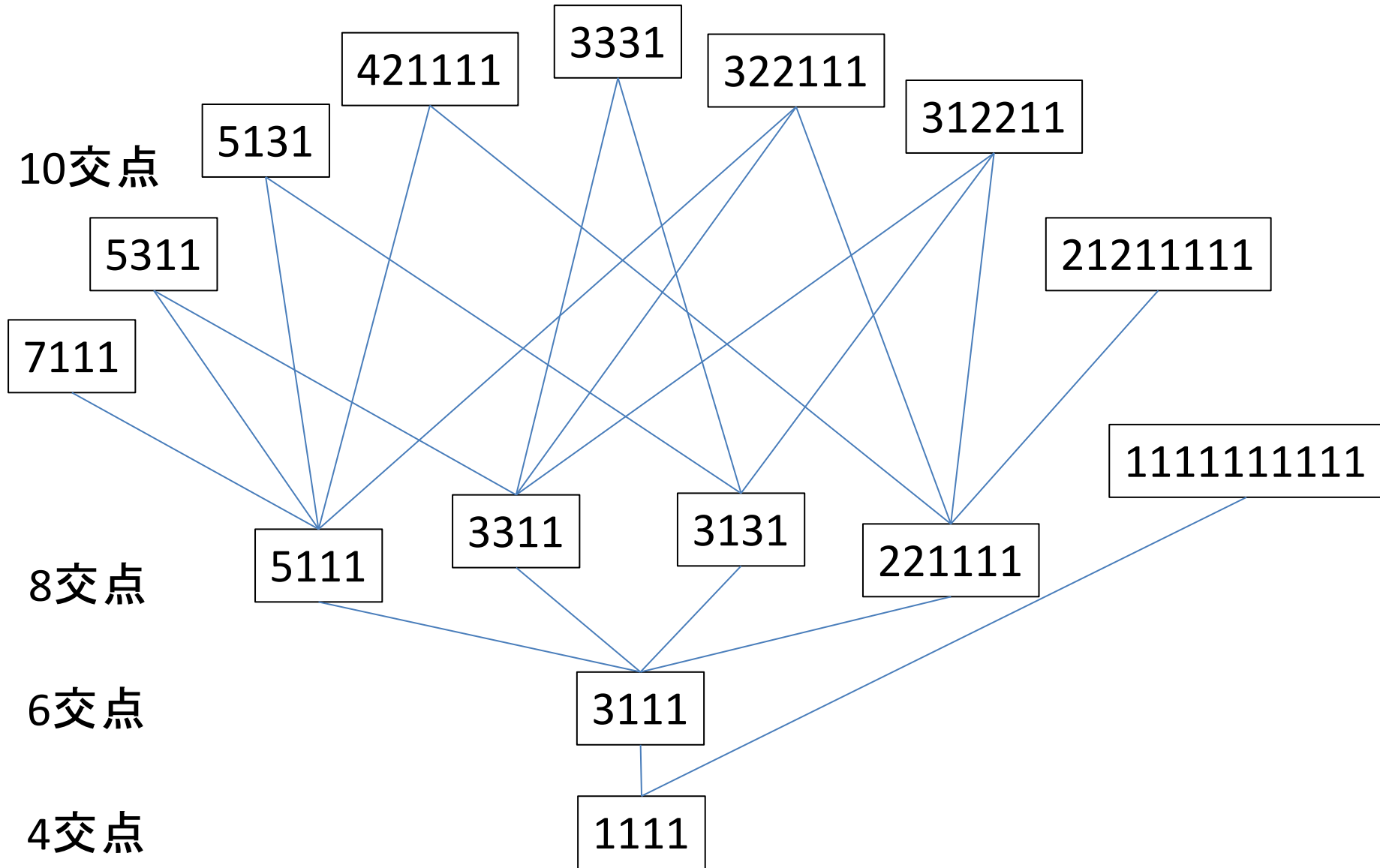
11を包含



11を包含



1111を包含



補題

➡ 補題

➡ $\forall B$ に対して,
 $11 \subset B$ または $1111 \subset B$ が成り立つ

➡ 証明

B に 1 以外の成分が含まれているとき, ① または ③ を適用できる. そのため, B に ①, ③ を繰り返し用いると成分が 1 のみの影 B' ができる. この B' に対して ② を繰り返し用いると 11 または, 1111 が得られる.

定理1の証明

➡ $4_1 \in \mathbf{K}_B \Leftrightarrow B$ の成分の個数が4以上

➡ 証明

(\Rightarrow) 対偶「 B の成分の個数が2 $\Rightarrow 4_1 \notin \mathbf{K}_B$ 」は 4_1 の組紐指数が3だから正しい.

(\Leftarrow) 11を包含するとき

B の成分が4以上だから2211または11111111を包含する. $4_1 \in \mathbf{K}_{2211}$, $4_1 \in \mathbf{K}_{11111111}$ である.よって $4_1 \in \mathbf{K}_B$

1111を包含するとき

$4_1 \in \mathbf{K}_{1111}$ であるから $4_1 \in \mathbf{K}_B$.

定理2の証明

➡ $5_1 \in \mathbf{K}_B \Leftrightarrow B$ が33ではなく, 前交点が6以上

➡ 証明

11を包含するとき

B は51, 2211, 11111111のうち少なくとも1つを包含する.

$5_1 \in \mathbf{K}_{51}$, $5_1 \in \mathbf{K}_{2211}$, $5_1 \in \mathbf{K}_{11111111}$ より $5_1 \in \mathbf{K}_B$.

一方で $5_1 \notin \mathbf{K}_{33}$.

1111を包含するとき

B は3111または1111111111を包含する. $5_1 \in \mathbf{K}_{3111}$,

$5_1 \in \mathbf{K}_{1111111111}$ より $5_1 \in \mathbf{K}_B$.

定理3の証明

➡ $5_2 \in \mathbf{K}_B$

⇔ Bの成分の個数が4以上かつ前交点が6以上

➡ 証明

(⇒) 定理1の証明と同様.

(⇐) 11を包含するとき

Bは2211または11111111を包含する.

$5_2 \in \mathbf{K}_{2211}$, $5_2 \in \mathbf{K}_{11111111}$ より $5_1 \in \mathbf{K}_B$.

1111を包含するとき

Bは3111または1111111111を包含する. $5_2 \in \mathbf{K}_{3111}$,
 $5_2 \in \mathbf{K}_{1111111111}$ より $5_2 \in \mathbf{K}_B$.

定理4の証明

➡ $6_2 \in \mathbf{K}_B$

⇔ Bの成分の個数が4以上かつ前交点が6以上

➡ 証明

(⇒)定理1の証明と同様.

(⇐)11を包含するとき

Bは2211, 31111111, 1111111111111111の少なくとも1つを包含する. $5_2 \in \mathbf{K}_{2211}$, $5_2 \in \mathbf{K}_{31111111}$,

$5_2 \in \mathbf{K}_{1111111111111111}$ より $5_1 \in \mathbf{K}_B$.

1111を包含するとき

Bは3111または1111111111を包含する. $5_2 \in \mathbf{K}_{3111}$,
 $5_2 \in \mathbf{K}_{1111111111}$ より $5_2 \in \mathbf{K}_B$.