Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を復元する q 級数について

村上友哉氏（東北大学）との共同研究

森 祥仁

東北大学大学院　理学研究科　数学専攻　博士 2 年

2021 年 12 月 25 日

目次

3次元多様体

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & \\ \mathrm{WRT}_k(M) & & \widehat{Z}_M(q) \arrow[ll, squiggly, "q \to \zeta_k"'] \end{tikzcd}$$

WRT不変量 Homological block

$$\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}\right)$$

要約

Gukov-Pei-Putrov-Vafa 予想（2020）

M: 向き付け可能な閉 3 次元多様体.

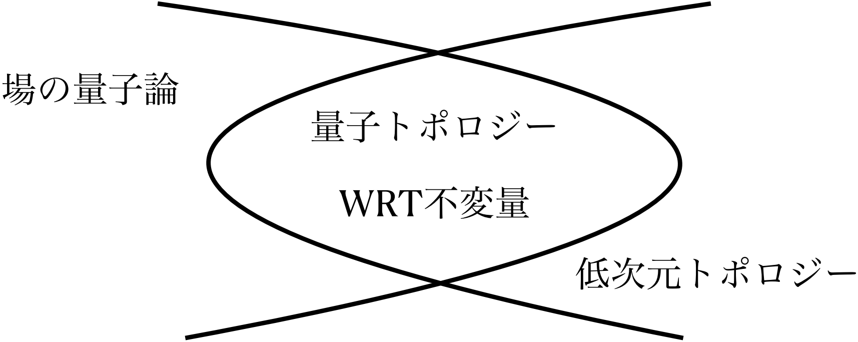
$$\mathrm{WRT}_k(M) = \frac{1}{2(\zeta_k - \zeta_k^{-1})} \lim_{q \to \zeta_k} \widehat{Z}_M(q)$$

今回の研究結果

- あるクラスの非 Seifert 多様体に対して GPPV 予想が成り立つ.
- WRT 不変量が量子モジュラー性を持つ.

証明のポイント

重み付き Gauss 和の消滅



Witten

場の理論を用いて

3次元多様体の

不変量を構成

Reshetikhin-Turaev

量子群を用いて

3次元多様体の

不変量を構成

q 級数 = WRT 不変量 型の先行研究

定理（Lawrence-Zagier, 1991）

M: Poincaré **ホモロジー球面**

$$\mathrm{WRT}_k(M) = \lim_{q \to \zeta_k} (\text{false theta } \textbf{関数}) .$$

定理（樋上, 2005）

M: Brieskorn **ホモロジー球面**

$$\mathrm{WRT}_k(M) = \lim_{q \to \zeta_k} (\text{false theta } \textbf{関数}) .$$

定理（樋上, 2006）

M: Seifert **ホモロジー球面**

$$\mathrm{WRT}_k(M) = \lim_{q \to \zeta_k} (\text{Eichler } \textbf{積分とその微分}) .$$

自然な問い

M: 向き付け可能な閉 3 次元多様体.

以下の関係を満たす q 級数 $X(q)$ は存在するか？

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \mathrm{WRT}_k(M) = \lim_{q \to \zeta_k} X(q).$$

問いに対するアプローチ

M: plumbed 多様体.

Gukov-Pei-Putrov-Vafa（2020）

- homological block $\widehat{Z}_M(q)$ を定義した.
- 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\mathrm{WRT}_k(M) = \frac{1}{2(\zeta_k - \zeta_k^{-1})} \lim_{q \to \zeta_k} \widehat{Z}_M(q)$$

を予想した.

問いに対するアプローチ

定理（藤-岩木-村上-寺嶋, 2020）

M: Seifert **ホモロジー球面**

- WRT **函数を定義**.
- **任意の** $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ **に対して**

$$\mathrm{WRT}_k(M) = \lim_{q \to \zeta_k} (\text{WRT 函数}).$$

定理（Andersen-Mistegård, 2020）

- WRT **函数と** homological block **は等しい**.
- **（藤-岩木-村上-寺嶋とは別の方法で）任意の** $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ **に対して**

$$\mathrm{WRT}_k(M) = \lim_{q \to \zeta_k} (\text{WRT 函数}).$$

何が嬉しいのか

- WRT 不変量のモジュラー性 $\longrightarrow$ Witten 予想,
- WRT 不変量の圏化,
- WRT 不変量と整数論のつながり.

向き付け可能な閉3次元多様体

Witten
Reshetikhin-Turaev

plumbed多様体

Gukov-Pei-Putrov-Vafa

Seifert多様体

樋上

藤-岩木-村上-寺嶋

Andersen-Mistegård

Brieskorn多様体

Lawrence-Zagier
樋上

手術図式とグラフ（plumbed 多様体の場合）

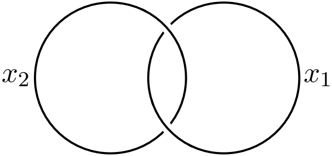


Figure: **手術図式の例** ($x_i \in \mathbb{Q}$)

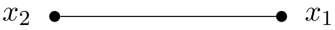


Figure: **手術図式に対応するグラフ**

手術図式の例

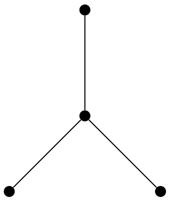


Figure: Brieskorn 多様体

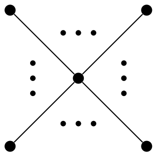


Figure: Seifert 多様体

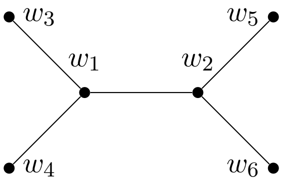


Figure: H グラフ Γ

量子モジュラー形式

- $k \in \mathbb{Z}$,
- $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: **部分群**,
- $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Q}$.

定義（Zagier, 2010）

$f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ **が以下の条件を満たすとき** f **を重さ** k, **群** Γ, **量子集合** $\mathcal{Q}$ **の量子モジュラー形式という**:

任意の $\gamma \in \Gamma$ **に対して** $f - f|_k\,\gamma$ **が** $\mathbb{R}$ **の開集合上の解析関数に拡張できる**.

ただし $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **に対して** $(f|_k\,\gamma)(x) := (cx+d)^{-k} f(\gamma x)$.

深さ 2 の量子モジュラー形式

- $k \in \mathbb{Z}$,
- $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: 部分群,
- $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Q}$,
- $\mathcal{Q}_l(\Gamma)$ を重さ l, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式全体の集合,
- $\mathcal{O}(R)$ を $\mathbb{R}$ の開集合 R 上の解析関数全体の集合.

定義（Bringmann-Kaszian-Milas, 2019）

$f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を深さ 2, 重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という. $\forall\gamma \in \Gamma, \exists R \subset \mathbb{R}, \exists k_1, \ldots, k_r \in 1/2\mathbb{Z}$,

$$f - f|_k \gamma \in \mathcal{O}(R) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{Q}_{k_i}(\Gamma)\mathcal{O}(R).$$

深さ 2 の量子モジュラー形式の例

定理（Bringmann-Mahlburg-Milas, 2020）

H **グラフから定まるホモロジー球面の** homological block **は深さ** 2, **重さ** 1, **群** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, **量子集合** $\mathbb{Q}$ **の量子モジュラー形式である**.

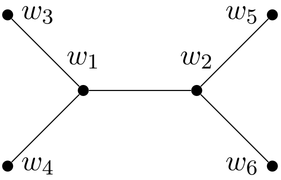
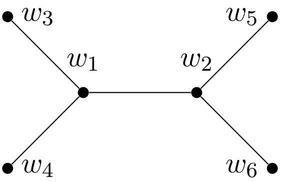


Figure: H **グラフ** Γ

主定理



- $w_i \in \mathbb{Z}_{\leq -2}$,
- H グラフ Γ の絡み行列は負定値で行列式は 1.

行列式が $1 \iff M_3(\Gamma)$ はホモロジー球面

主定理 1 (M-M)

$$\mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma)) = -\frac{1}{2\left(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}\right)} \lim_{q \to \zeta_k^{-1}} \widehat{Z}_\Gamma(q).$$

主定理

主定理 2 (M-M)

深さ 2, **重さ** 1, **群** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, **量子集合** $\mathbb{Q}$ **の量子モジュラー形式** $f_\Gamma \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ **が存在して,**

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad f_\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right) = -\frac{2\left(\zeta_{2k} - \zeta_{2k}^{-1}\right)}{\zeta_k^{-(18+\sum_{i=1}^{6} w_i + \sum_{i=3}^{6} 1/w_i)/4}} \mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma)).$$

WRT不変量

homological
block

直接計算

&

重み付きGauss和の消滅

Euler-Maclaurinの和公式

&

重み付きGauss和の消滅

重み付きGauss和

予備スライド

補題 (M-M)

まず記号を準備する.

- h/k は既約分数.
- $M, N, a, c \in \mathbb{Z}_{>0}, b \in \mathbb{Z}$ で $ac - MNb^2 = 1$ を満たす.
- $Q(x, y) := Max^2 + 2MNbxy + Ncy^2$.
- 写像 $\chi\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
- 写像 $\psi\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.
- 写像 $C\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

補題 (M-M)

χ は以下の条件を満たすとする.

- $\sum_{\alpha\in\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}\chi(\alpha)=0$
- $\chi(\alpha)\neq 0$ なる α の既約分数表示の分母は $2M$
- $M\alpha, M\alpha^2 \bmod \mathbb{Z}$ は $\chi(\alpha)\neq 0$ なる α の取り方に依らない.

ψ も同様の条件を満たすとする. このとき

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in(\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\times(\frac{1}{2N}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})}\chi(\alpha)\psi(\beta)C(\alpha)e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{h}{k}Q(\alpha,\beta)}=0$$

が成り立つ.