

弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームから 導かれる準同型写像の構造

絹野 凜

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科修士 2年

2021.12.24

領域交差交換 (K.Kishimoto)

結び目・絡み目図式の領域を指定することによって定める結び目・絡み目の変形.

定理 (A.Shimizu '14)

任意の結び目図式とその任意の交差点において、領域交差交換によってその交差点だけの上下を入れ替えることができる.

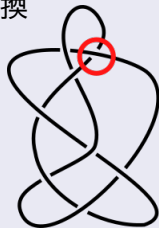
[領域選択ゲーム]

どのような初期状態においてもクリアすることができる. また, どのような初期状態においてもクリアの仕方は 4 通りである.

2016年、井上-清水は領域凍結交差交換と呼ばれる結び目・絡み目図式の変形方法を定義。

事実 (A.Inoue-R.Shimizu '16)

領域凍結交差交換ではちょうどそこだけ交差交換できない交差の集合を持つものが存在する。



事実 (M.Hashizume '16)

どの交差点の集合における交差交換が、領域凍結交差交換の組み合わせで実現できるかを示した。また、図式を変えないような領域凍結交差交換の組み合わせを決定した。

今回の研究の動機付け

上記の領域交差交換および領域凍結交差交換における
"領域"の代わりに"弧"を用いた"弧交差交換"に
ついて同様の結果が成り立つだろうか？

今回は、ループのない結び目射影図における
弧選択ゲームおよび弧凍結選択ゲームについて考える。

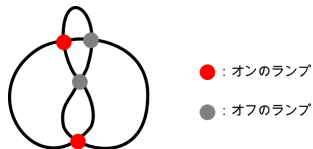


ループ

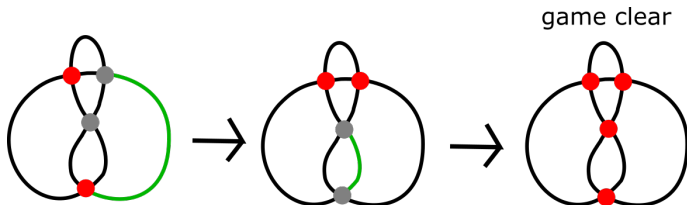
弧選択ゲーム

[ルール]

- 弧を選択すると，その弧の両端のランプのオンとオフが切り替わる。
- すべてのランプがオンになるとゲームクリアとなる。



<例>



準備

G : 結び目射影図 (ループはないものと仮定する.)

$V(G) = \{v_1, \dots, v_q\}$: G の交点の集合

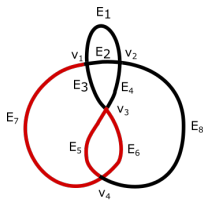
$E(G) = \{E_1, \dots, E_{2q}\}$: G の弧の集合

$A, B \in 2^{V(G)}$ または $A, B \in 2^{E(G)}$ に対して, A と B の和を対称差で定義する.

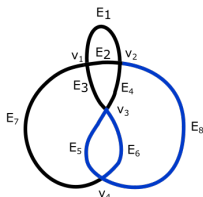
$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

このとき, $2^{V(G)}$, $2^{E(G)}$ は \mathbb{Z}_2 -線形空間とみなすことができる.

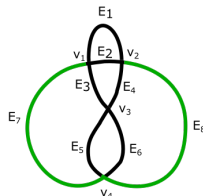
<例>



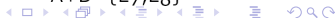
$$A = \{E_5, E_6, E_7\}$$



$$B = \{E_5, E_6, E_8\}$$



$$A + B = \{E_7, E_8\}$$



弧選択ゲームから導かれる準同型写像 φ

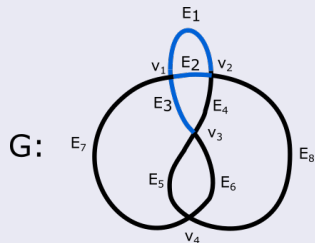
G を結び目射影図とする. 各 $v \in V(G)$ に対して, $d_v : 2^{E(G)} \rightarrow \mathbb{Z}$ を次のように定義する.

$$H \in 2^{E(G)} \text{ に対して } d_v(H) := \#\{E_i \in H \mid v \in \partial E_i\}$$

※ ∂E_i は E_i の 2 つの端点からなる集合を表す.

$d_v(H)$ の例

$H = \{E_1, E_2, E_3\}$ とする.



$$d_{v_1}(H) = 3$$

$$d_{v_2}(H) = 2$$

$$d_{v_3}(H) = 1$$

$$d_{v_4}(H) = 0$$

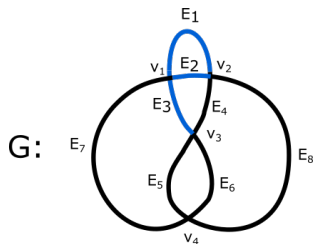
写像 $\varphi : 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を以下のように定義する.

$H \in 2^{E(G)}$ に対して,

$$\varphi(H) := \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

<例>

$H = \{E_1, E_2, E_3\}$ とする.



$$d_{v_1}(H) = 3$$

$$d_{v_2}(H) = 2$$

$$d_{v_3}(H) = 1$$

$$d_{v_4}(H) = 0$$

よって, $\varphi(H) = \{v_1, v_3\}$

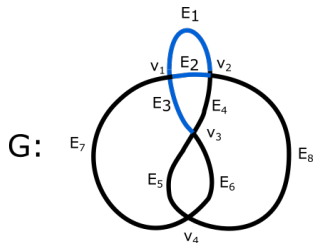
φ の性質

- φ は準同型写像である。つまり,

$$\varphi(H_1 + H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2).$$

- $v \in \varphi(H) \Leftrightarrow$ 弧選択ゲームにおいて, H を選択することで v のランプのオン・オフが切り替わる.

$H = \{E_1, E_2, E_3\}$ とする.



$$d_{v_1}(H) = 3$$

$$d_{v_2}(H) = 2$$

$$d_{v_3}(H) = 1$$

$$d_{v_4}(H) = 0$$

よって, $\varphi(H) = \{v_1, v_3\}$

準同型写像 φ の構造

定理 1.

交点の数を q とする.

- (1) $\dim(\text{Im}\varphi) = q - 1$ で, $\{\{v_1, v_q\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}\}$ は $\text{Im}\varphi$ の基底.
- (2) $\dim(\text{Ker}\varphi) = q + 1$ で, $\{B_0, \dots, B_q\}$ は $\text{Ker}\varphi$ の基底.

$\{\{v_1, v_q\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}\}$ で生成される部分空間の元は必ず偶数個の交点からなる集合だから, 定理 1(1) より次のことがわかる.

$V \in \text{Im}\varphi \Leftrightarrow V$ は偶数個の頂点の集合. これより,

弧選択ゲームがクリアできる \Leftrightarrow 偶数個のランプがオフである

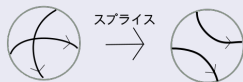
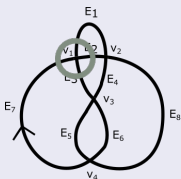
がわかる.

クリアできる任意の解を H_X とし固定する. 定理 1(2) より, すべての解は $H_X + \sum_{i=0}^q \varepsilon_i B_i$ ($\varepsilon_i \in \{0, 1\}$) と表されることがわかる. つまり,

弧選択ゲームのクリアの仕方は全部で 2^{q+1} 通りある.

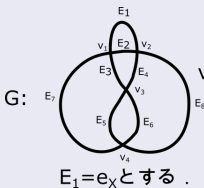
B_i について

スプライス



$B_i (i = 1, 2, \dots, q)$

(B_1 について)

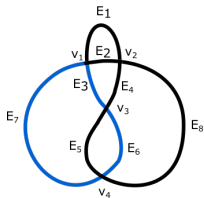


v_1 でスプライス

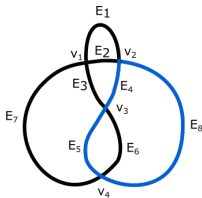


e_x を含まない成分に
対応する $E(G)$ の部分集合
 $B_1 = \{E_3, E_6, E_7\}$

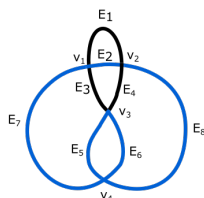
8 の字結び目の B_i



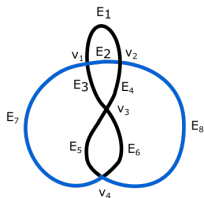
$$B_1 = \{E_3, E_6, E_7\}$$



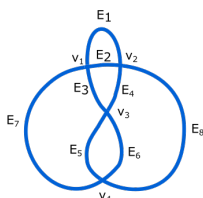
$$B_2 = \{E_4, E_5, E_8\}$$



$$B_3 = \{E_2, E_5, E_6, E_7, E_8\}$$



$$B_4 = \{E_2, E_7, E_8\}$$



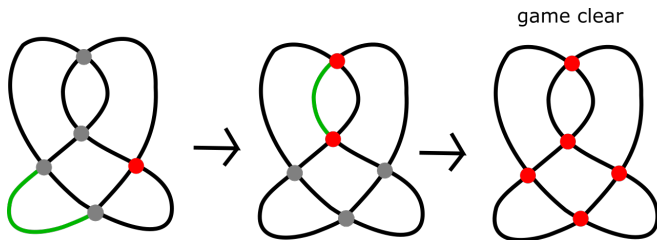
$$B_0 = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8\}$$

弧凍結選択ゲーム

[ルール]

- 弧を選択すると、その両端以外のランプのオンとオフが切り替わる。
- すべてのランプがオンになると、ゲームクリアとなる。

<例>



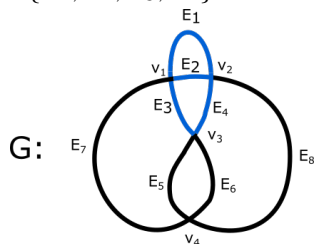
弧凍結選択ゲームから導かれる準同型写像 ψ

写像 $\psi : 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を以下のように定義する。
 $H \in 2^{E(G)}$ に対して

$$\psi(H) := \begin{cases} \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 0 \pmod{2}) \\ \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 0 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 1 \pmod{2}). \end{cases}$$

<例 1>

$H = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ とする.



$$d_{v_1}(H) = 3$$

$$d_{v_2}(H) = 3$$

$$d_{v_3}(H) = 2$$

$$d_{v_4}(H) = 0$$

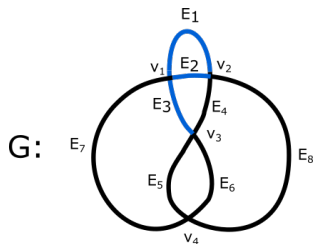
$|H| \equiv 0 \pmod{2}$ より $\psi(H) = \{v_1, v_2\}$

写像 $\psi : 2^{E(G)} \rightarrow 2^{V(G)}$ を以下のように定義する.
 $H \in 2^{E(G)}$ に対して

$$\psi(H) := \begin{cases} \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 0 \pmod{2}) \\ \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 0 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 1 \pmod{2}). \end{cases}$$

<例 2>

$H = \{E_1, E_2, E_3\}$ とする.



$$\begin{aligned} d_{v_1}(H) &= 3 \\ d_{v_2}(H) &= 2 \\ d_{v_3}(H) &= 1 \\ d_{v_4}(H) &= 0 \end{aligned}$$

$|H| \equiv 1 \pmod{2}$ より $\psi(H) = \{v_2, v_4\}$

φ と ψ の定義を比較することによって、下の命題がわかる。

$$\varphi(H) = \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

$$\psi(H) = \begin{cases} \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 1 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 0 \pmod{2}) \\ \{v \in V(G) \mid d_v(H) \equiv 0 \pmod{2}\} & (|H| \equiv 1 \pmod{2}). \end{cases}$$

命題

$H \in 2^{E(G)}$ に対して

- $|H| \equiv 0 \pmod{2}$ のとき $\psi(H) = \varphi(H)$.
- $|H| \equiv 1 \pmod{2}$ のとき $\psi(H) = V(G) \setminus \varphi(H) = V(G) + \varphi(H)$.

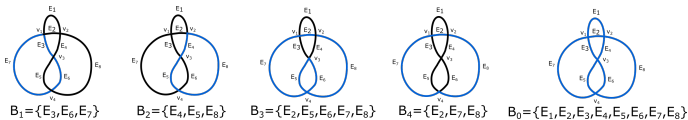
ψ の性質

- ψ は準同型写像である。つまり,

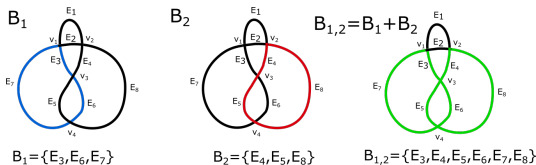
$$\psi(H_1 + H_2) = \psi(H_1) + \psi(H_2).$$

- $v \in \psi(H) \Leftrightarrow$ 弧凍結選択ゲームにおいて, H を選択することで v のランプのオン・オフが切り替わる.

$\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$: 定理 1 で与えた $\text{Ker}\varphi$ の基底.



$B_{1,i} := B_1 + B_i (i = 2, 3, \dots, q)$ とする.



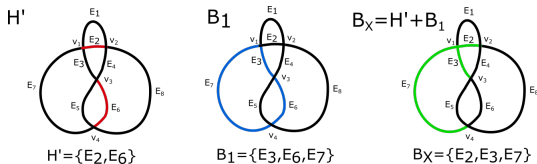
$q \equiv 0 \pmod{2}$ のとき, B_X を次のように決める.

Step 1 G を互いに交わらない $\frac{q}{2}$ 個の”交点の組”
 $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{q-1}, v_q)$ に分ける.

Step 2 各 (v_i, v_{i+1}) に対して v_i と v_{i+1} を結ぶ道を 1 つとる.
 この道に含まれる弧の集合を P_i とする. このとき
 $H' := P_1 + P_3 + \dots + P_{q-1}$ とする.

Step 3

- $|H'| \equiv 1 \pmod{2}$ のときは $B_X := H'$
- $|H'| \equiv 0 \pmod{2}$ のときは $B_X := H' + B_1$



注. $q \equiv 1 \pmod{2}$ のときは, B_X を定めない.

準同型写像 ψ の構造 ($q \equiv 0 \pmod{2}$)

定理 2. ($q \equiv 0 \pmod{2}$)

- (1) $\dim(\text{Im}\psi) = q - 1$ で, $\{\{v_1, v_q\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}\}$ は $\text{Im}\psi$ の基底.
- (2) $\dim(\text{Ker}\psi) = q + 1$ で, $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}, B_X\}$ は $\text{Ker}\psi$ の基底.

定理 2(1) より, $V \in \text{Im}\psi \Leftrightarrow V$ は偶数個の頂点の集合. これより,

弧凍結選択ゲームがクリアできる \Leftrightarrow 偶数個のランプがオフである
がわかる.

定理 2(2) より,

弧凍結選択ゲームのクリアの仕方は全部で 2^{q+1} 通りある.

準同型写像 ψ の構造 ($q \equiv 1 \pmod{2}$)

定理 3. ($q \equiv 1 \pmod{2}$)

- (1) $\dim(\text{Im}\psi) = q$, すなわち $\text{Im}\psi = 2^{V(G)}$.
- (2) $\dim(\text{Ker}\psi) = q$ で, $\{B_0, B_{1,2}, B_{1,3}, \dots, B_{1,q}\}$ は $\text{Ker}\psi$ の基底.

定理 3(1) より,

任意の初期状態に対して弧凍結選択ゲームをクリアすることができる.

定理 3(2) より,

弧凍結選択ゲームのクリアの仕方は全部で 2^q 通りある.

定理 1.

以下では,

定理 1.

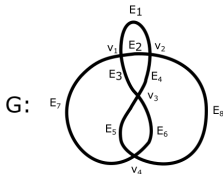
- (1) $\dim(\text{Im}\varphi) = q - 1$ で, $\{v_1, v_q\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}$ は $\text{Im}\varphi$ の基底.
- (2) $\dim(\text{Ker}\varphi) = q + 1$ で, $\{B_0, \dots, B_q\}$ は $\text{Ker}\varphi$ の基底.

の証明の概略を紹介する.

定理 1 の証明の概略 (接続行列)

G を結び目射影図とし, G の交点の数を q とする. $A(G)$ を (i, j) 成分 m_{ij} が以下で定義される $2q \times q$ 行列とする.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_j \in \partial E_i) \\ 0 & (v_j \notin \partial E_i). \end{cases}$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 1 の証明の概略 (φ の置き換え)

$E(G) = \{E_1, \dots, E_{2q}\}$ に対して $I_{E(G)} : 2^{E(G)} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2q}$ を以下のように与えられる同型写像とする.

$$I_{E(G)}(\{E_1\}) = (1, 0, \dots, 0) (= \mathbf{a}_1) \in \mathbb{Z}_2^{2q}$$

$$I_{E(G)}(\{E_2\}) = (0, 1, \dots, 0) (= \mathbf{a}_2) \in \mathbb{Z}_2^{2q}$$

\vdots

$$I_{E(G)}(\{E_{2q}\}) = (0, 0, \dots, 1) (= \mathbf{a}_{2q}) \in \mathbb{Z}_2^{2q}$$

$V(G) = \{v_1, \dots, v_q\}$ に対して $I_{V(G)} : 2^{V(G)} \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$ を以下のように与えられる同型写像とする.

$$I_{V(G)}(\{v_1\}) = (1, 0, \dots, 0) (= \mathbf{f}_1) \in \mathbb{Z}_2^q$$

$$I_{V(G)}(\{v_2\}) = (0, 1, \dots, 0) (= \mathbf{f}_2) \in \mathbb{Z}_2^q$$

\vdots

$$I_{V(G)}(\{v_q\}) = (0, 0, \dots, 1) (= \mathbf{f}_q) \in \mathbb{Z}_2^q$$

準同型写像 $I_{V(G)} \circ \varphi \circ (I_{E(G)})^{-1} : \mathbb{Z}_2^{2q} \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$ を $\tilde{\varphi}$ で表す. すなわち

$$\varphi = (I_{V(G)})^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ I_{E(G)}.$$

このとき

$$x \in \mathbb{Z}_2^{2q} \text{ に対して, } \tilde{\varphi}(x) = xA(G)$$

となることがわかる.

定理 1 の証明 ($\text{Im}\varphi$)

$\dim(\text{Im}\varphi) = q - 1$ の証明の流れ

- Step 0** いま, $l_{E(G)}, l_{V(G)}$ が同型写像であるから $\dim(\text{Im}\varphi) = \dim(\text{Im}\tilde{\varphi})$.
また, $\text{Im}\tilde{\varphi} \subset \mathbb{Z}_2^q$ より $\dim(\text{Im}\tilde{\varphi}) \leq q$.
- Step 1** 各交点の次数に注目すると, $\text{Im}\varphi \neq 2^{V(G)}$ となることが示せる.
したがって $\dim(\text{Im}\varphi) \leq q - 1$.
- Step 2** (Recall: $\mathbf{f}_i = l_{V(G)}(\{v_i\})$.) $i \in \{1, 2, \dots, q - 1\}$ に対して
 $\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_q \in \text{Im}\tilde{\varphi}$.
- Step 3** $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_q, \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_q, \dots, \mathbf{f}_{q-1} + \mathbf{f}_q$ は一次独立.
($\because \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_q = (1, 0, \dots, 1), \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_q = (0, 1, \dots, 1), \dots$)

Step1 と Step3 より $\dim(\text{Im}\tilde{\varphi}) = q - 1$

また Step3 より, $\{\{v_1, v_q\}, \dots, \{v_{q-1}, v_q\}\}$ が $\text{Im}\varphi$ の基底であることもわかる.

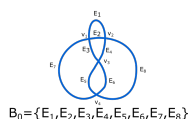
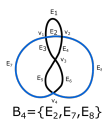
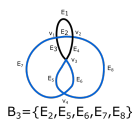
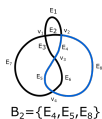
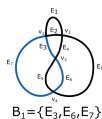
定理 1 の証明 (Ker φ)

dim(Ker φ) = $q + 1$ の証明

準同型定理より

$$\begin{aligned}\dim(\text{Ker}\varphi) &= \dim(2^{E(G)}) - \dim(\text{Im}\varphi) \\ &= 2q - (q - 1) \\ &= q + 1.\end{aligned}$$

B_0, B_1, \dots, B_q を定理 1 で与えた $2^{E(G)}$ の元とする.



$i \in \{0, 1, \dots, q\}$ に対して, $B_i \in \text{Ker}\varphi$. また, 幾何学的な議論 (詳細は略) により, B_0, B_1, \dots, B_q が一次独立であることが示せる.

よって $\{B_0, B_1, \dots, B_q\}$ は Ker φ の基底である.

ご静聴ありがとうございました。