仮想絡み目の JKSS 不変量について

加藤広太

大阪大学大学院理学研究科 (修士 2 年)

2021 年 12 月 24 日

目次

準備

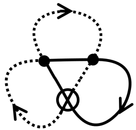
定義

グラフ $G=(V,E)$ がオイラー向きづけされているとは，それぞれの頂点 v の入次数と出次数が等しくなる向きが入っていること．

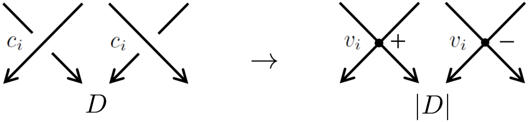
定義

$f:E\to\{1,2\}$ が G のラベリング $\Leftrightarrow$ G の部分グラフ $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ が G から定まる向きでオイラー向き付けになっている．

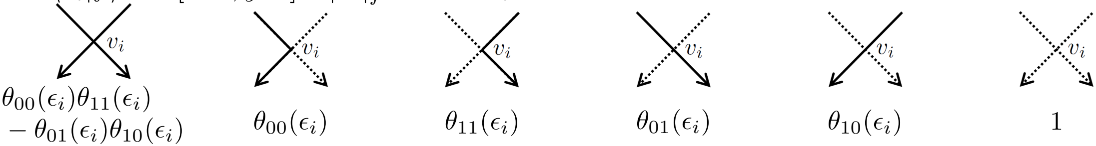
- $\mathscr{L}(G)$ $:=\{G$ のラベリング $\}$
- f でラベリングされた G を G_f と書く．
  (注：G_f は，ラベリングが 1 なら実線，2 なら点線で描く．)



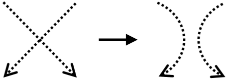
G_f の例

- D ： 有向仮想絡み目図式.
- $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$: D の交点の集合.
- 

- $\epsilon_i \in \{+,\ -\}$: v_i の符号.
- $\Theta := \{\theta_{jk}(+),\ \theta_{jk}(-) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]\}$ $(j,\ k = 0,\ 1)$
- $\langle v_i | f \rangle \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$: $|D|_f$ の頂点 v_i の重さを以下で定める.



- $s(|D|,\ f,\ 2) = \#\{f^{-1}(2)$ をスムージングして得られるザイフェルト円周 $\}$



Partition function

n : D の交点数

定義 (Jaeger, Kauffman, Saleur, 1994)

$Z(D) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$: D の **partition function**

$$Z(D) := \sum_{f \in \mathscr{L}(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} \langle v_i | f \rangle$$

定理 (Jaeger, Kauffman, Saleur, 1994)

Θ を,

$$\begin{array}{llll} \theta_{00}(+) = 1 + x, & \theta_{01}(+) = y, & \theta_{10}(+) = -xy^{-1}, & \theta_{11}(+) = 0, \\ \theta_{00}(-) = 0, & \theta_{01}(-) = -x^{-1}y, & \theta_{10}(-) = y^{-1}, & \theta_{11}(-) = 1 + x^{-1} \end{array}$$

と与える. このとき $Z(D)$ は $(-1)^m x^l$ 倍 $(m,\ l \in \mathbb{Z})$ を除いて曲面上の絡み目の不変量になる.

$w(D)$: D のひねり数

定理 (Sawollek, 2001)

Θ を,

$$\begin{array}{llll} \theta_{00}(+) = 1 - x, & \theta_{01}(+) = y, & \theta_{10}(+) = xy^{-1}, & \theta_{11}(+) = 0, \\ \theta_{00}(-) = 0, & \theta_{01}(-) = x^{-1}y, & \theta_{10}(-) = y^{-1}, & \theta_{11}(-) = 1 - x^{-1} \end{array}$$

と与える. このとき $(-1)^{w(D)}Z(D)$ は x^m 倍 $(m \in \mathbb{Z})$ を除いて仮想絡み目の不変量になる.
これを JKSS 不変量と呼ぶ.

行列の読み方

行番号, 列番号は $1_0, 1_1, 2_0, 2_1, \ldots, n_0, n_1$ と数える.
(例)

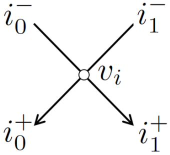
$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 \\
\hline
1_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3_0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
3_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

4 は "3_0 行 2_1 列成分" と表す.

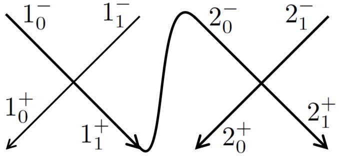
$Z(D)$ の行列式による定義

2 つの $2n \times 2n$ 行列 $P_D,\ M_D$ を定義する.

- P_D の定義.



$N(v_i, |D|)\backslash\{v_i\}$ の open arc に対し,
その位置に応じてラベルを付ける.



i_a^- と j_b^+ が同じ辺であるとき $i_a \leftarrow j_b$ と書く.
上図では $2_0 \leftarrow 1_1$ となっている.

$$p_{i_a j_b} := \begin{cases} 1 & (i_a \leftarrow j_b), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \qquad P_D = (p_{i_a j_b}).$$

$$
M_D := \begin{array}{c} \\ 1_0 \\ 1_1 \\ 2_0 \\ 2_1 \\ \vdots \\ n_0 \\ n_1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & \cdots & n_0 & n_1 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\theta_{00}(\epsilon_1) & -\theta_{01}(\epsilon_1) & & & & & \\
-\theta_{10}(\epsilon_1) & \theta_{11}(\epsilon_1) & & & & \mathbf{0} & \\
 & & \theta_{00}(\epsilon_2) & -\theta_{01}(\epsilon_2) & & & \\
 & & -\theta_{01}(\epsilon_2) & \theta_{11}(\epsilon_2) & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & \mathbf{0} & & & & \theta_{00}(\epsilon_n) & -\theta_{01}(\epsilon_n) \\
 & & & & & -\theta_{10}(\epsilon_n) & \theta_{11}(\epsilon_n)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$U = (u_{ij}) := M_D - P_D$.

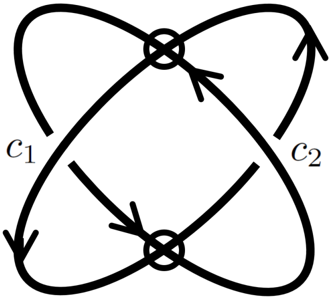
定理. (Jaeger, Kauffman, Saleur, 1994 ; Sawollek 2001)

$Z(D) = \det U$

J. K. S. により，解析的な証明が与えられている．今回は組み合わせ的な証明を与える．

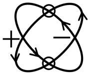
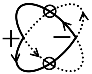
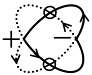
具体例の計算

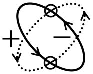
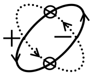
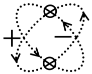
以下の有向仮想絡み目図式の $Z(D)$, JKSS 不変量を, 2 つの方法で計算する.



ラベリングによる計算

$Z(D) := \sum_{f \in \mathscr{L}(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} \langle v_i | f \rangle$ を用いて計算する.

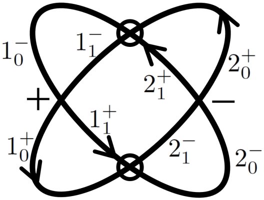
$Z(D) = \prod_{i=1}^{2} \left\langle v_i \;\middle|\; \right.$  $\left.\right\rangle - \prod_{i=1}^{2} \left\langle v_i \;\middle|\; \right.$  $\left.\right\rangle - \prod_{i=1}^{2} \left\langle v_i \;\middle|\; \right.$  $\left.\right\rangle$

$- \prod_{i=1}^{2} \left\langle v_i \;\middle|\; \right.$  $\left.\right\rangle - \prod_{i=1}^{2} \left\langle v_i \;\middle|\; \right.$  $\left.\right\rangle + \prod_{i=1}^{2} \left\langle v_i \;\middle|\; \right.$  $\left.\right\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (\theta_{00}(+)\theta_{11}(+) - \theta_{01}(+)\theta_{10}(+))(\theta_{00}(-)\theta_{11}(-) - \theta_{01}(-)\theta_{10}(-)) \\
&\quad - \theta_{00}(+)\theta_{11}(-) - \theta_{11}(+)\theta_{00}(-) - \theta_{01}(+)\theta_{01}(-) - \theta_{10}(+)\theta_{01}(-) + 1
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \Theta$ を Sawollek の重さで与えると, JKSS 不変量は $x^{-1} - y^{-2}$.

行列式による計算



$\longrightarrow$

- $1_0 \leftarrow 2_1,\ 1_1 \leftarrow 2_0,\ 2_0 \leftarrow 1_1,\ 2_1 \leftarrow 1_0.$
- $\epsilon_1 = +,\ \epsilon_2 = -.$

$$
\begin{aligned}
Z(D) =& \det\left(\begin{pmatrix} \theta_{00}(+) & -\theta_{01}(+) & 0 & 0 \\ -\theta_{10}(+) & \theta_{11}(+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{00}(-) & -\theta_{01}(-) \\ 0 & 0 & -\theta_{10}(-) & \theta_{11}(-) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
=& (\theta_{00}(+)\theta_{11}(+) - \theta_{01}(+)\theta_{10}(+))(\theta_{00}(-)\theta_{11}(-) - \theta_{01}(-)\theta_{10}(-)) \\
& - \theta_{00}(+)\theta_{11}(-) - \theta_{11}(+)\theta_{00}(-) - \theta_{01}(+)\theta_{01}(-) - \theta_{10}(+)\theta_{01}(-) + 1
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \Theta$ を Sawollek の重さで与えると, JKSS 不変量は $x^{-1} - y^{-2}$.

$Z(D) = \det U$ の証明 (概略)

Step 1. $\det U$ と置換の変形.

Step 2. partition function とラベリングの変形.

Step 3. ラベリングと置換の対応 $\rightarrow$ 両辺の各項が符号を除いて一致する.

Step 4. 符号の一致.

Step 1. $\det U$ と置換の変形

$\det U = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1_0}^{n_1} u_{i_a \sigma(i_a)}$ を式変形する.

- $\mathfrak{S}_{2n}^D := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid {}^\forall i_a,\ \sigma(i_a) = i_0$, i_1 または $i_a \leftarrow \sigma(i_a)\}$.
- $X := \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \mid {}^\exists i,$ s.t. $\sigma(i_0) = i_1$ かつ $\sigma(i_1) = i_0\}$.
- $g_U\colon\ \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X \ \times\ \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を次で定義する.

$$g_U(\sigma, i) = \begin{cases} u_{i_0 i_0} u_{i_1 i_1} - u_{i_0 i_1} u_{i_1 i_0} & (\text{if } \sigma(i_a) = i_a\ (a = 0, 1)), \\ u_{i_0 \sigma(i_0)} u_{i_1 \sigma(i_1)} & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

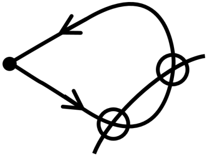
すると, $\det U = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma, i)$ が成り立つ.

$$\therefore \quad \boxed{Z(D) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D \backslash X} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma, i) \text{ を示せば良い.}}$$

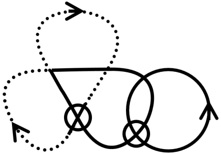
Step 2. partition function とラベリングの変形.

$$Z(D) := \sum_{f \in \mathscr{L}(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} \langle v_i | f \rangle$$ を式変形する.

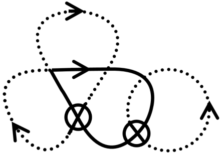
- ループ辺：両端が同じ頂点に接続する辺.
- $E' := \{e \in E \mid e$ は $|D|$ 上のループ辺 $\}$
- $\mathscr{L}_1(|D|) := \{f \in \mathscr{L}(|D|) \mid {}^{\forall} e \in E',\ f(e) = 1\}$ ($E' = \emptyset$ のとき $\mathscr{L}_1(|D|) = \mathscr{L}(|D|)$)



ループ辺の例



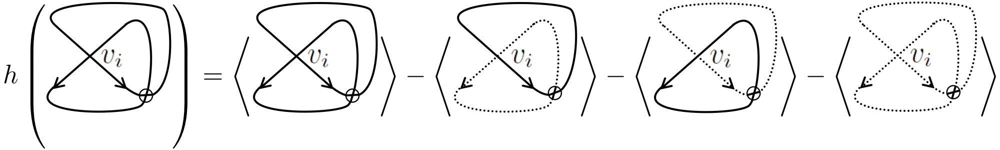
$f \in \mathscr{L}_1(|D|)$



$f \notin \mathscr{L}_1(|D|)$

- $h : \mathscr{L}_1(|D|) \times \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$: $|D|_f$ の頂点に “良い” 重さを与える写像.
  - $|D|$ の頂点 v_i にループ辺が接続しない. $\Rightarrow h(f, i) = \langle v_i | f \rangle$
  - $|D|$ の頂点 v_i にループ辺が接続する $\Rightarrow$ ある規則で定める.

    (例)



h の定義から, $\displaystyle\sum_{f \in \mathscr{L}(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} \langle v_i | f \rangle = \sum_{f \in \mathscr{L}_1(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} h(f, i)$.

$$\therefore \quad \boxed{\sum_{f \in \mathscr{L}_1(|D|)} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} h(f, i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^{D} \setminus X} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma, i) \text{ を示せば良い.}}$$

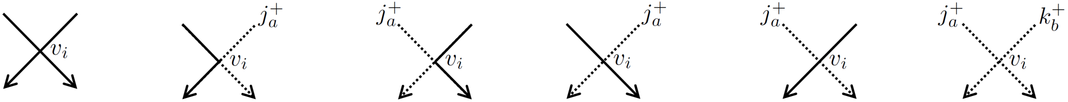
Step 3. ラベリングと置換の対応.

補題 (K.)

$\mathscr{L}_1(|D|)$ と $\mathfrak{S}_{2n}^D\backslash X$ の間に 1 対 1 対応があり, 以下を満たす.

- 対応する $f \in \mathscr{L}_1(|D|)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D\backslash X$ について, $h(f,i)$, $g_U(\sigma,i) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ が -1 倍を除いて一致.

各 $f \in \mathscr{L}_1(|D|)$ に対し, $|D|_f$ 上の各頂点 v_i で以下を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^D\backslash X$ を対応させる.



$\sigma(i_0) = i_0,\ \sigma(i_1) = i_1$

$\sigma(i_0) = i_0,\ \sigma(i_1) = j_a$

$\sigma(i_0) = j_a,\ \sigma(i_1) = i_1$

$\sigma(i_0) = i_1,\ \sigma(i_1) = j_a$

$\sigma(i_0) = j_a,\ \sigma(i_1) = i_0$

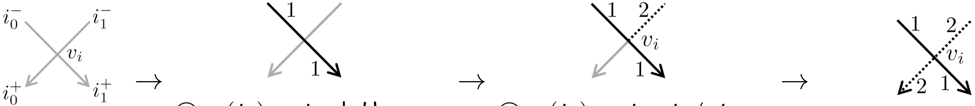
$\sigma(i_0) = j_a,\ \sigma(i_1) = k_b$

逆の対応

各 $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}^{D} \backslash X$ に対し，各 i で以下の規則でラベリング $f \in \mathscr{L}_1(|D|)$ を対応させる．

1. $\sigma(i_a) = i_b$ のとき，i_a^-，i_b^+ を 1 でラベリング
2. $\sigma(i_a) = j_b$ $(i \neq j)$ のとき，i_a^- を 2 でラベリング
3. ①，② でラベリングされなかった辺を全て 2 でラベリングする

(例) $\sigma(i_0) = i_1, \sigma(i_1) = j_a$ $(i \neq j)$ のとき



$|D|$

① $\sigma(i_0) = i_1$ より
i_0^-，i_1^+ は 1

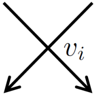
② $\sigma(i_1) = j_a$，$i \neq j$
より i_1^- は 2

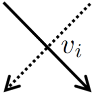
③ 残った辺は 2

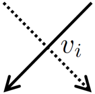
f，σ をこの対応で対応する組とする．

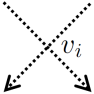
$$\rightarrow \quad \boxed{(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} h(f,i) = \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma,i) \text{ を示せば良い．}}$$

$h(f,i) =$

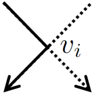
$g_U(\sigma, i)$ (if 

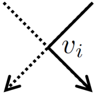
, 

, 

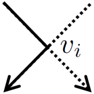
, 

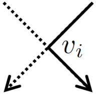
),

$-g_U(\sigma, i)$ (if 

, 

).

そこで，$\#\{$ 

$\} + \#\{$ 

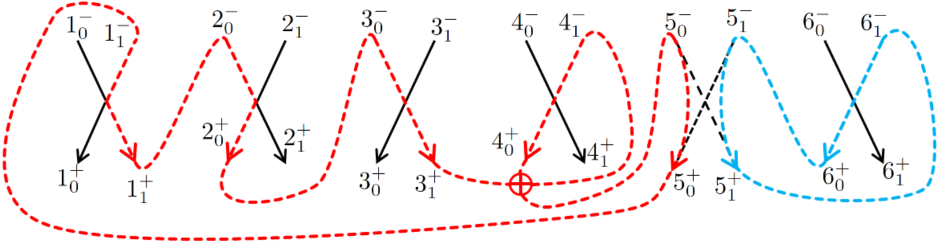
$\} = M$ とする．このとき，

$$(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} h(f,i) = (-1)^{M} (-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} \prod_{i=1}^{n} g_U(\sigma, i) \ .$$

$\therefore$ $\boxed{(-1)^{M}(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \text{を示せば良い．}}$

Step 4. 符号の一致.

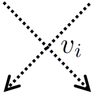
次のように示す.(黒線は 1 でラベリング, 赤線と青線は 2 でラベリングされた辺)

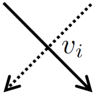


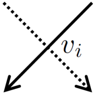
上のラベリングに対応する置換 σ は, 各ザイフェルト円周に対応した巡回置換の積で表せる.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1_0 & 1_1 & 2_0 & 2_1 & 3_0 & 3_1 & 4_0 & 4_1 & 5_0 & 5_1 & 6_0 & 6_1 \\ 1_0 & 5_0 & 1_1 & 2_1 & 2_0 & 3_0 & 4_1 & 3_1 & 4_0 & 6_0 & 6_1 & 5_1 \end{pmatrix}$$

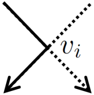
$$= (\ 1_1\ 5_0\ 4_0\ 4_1\ 3_1\ 3_0\ 2_0\ )(\ 5_1\ 6_0\ 6_1\ )$$

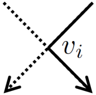
$|D|_f$ において, $\#\Big\{$ 

$\Big\} = K$, $\#\Big\{$ 

$\Big\} + \#\Big\{$ 

$\Big\} = L$ とする.

$\Bigg(\#\Big\{$ 

$\Big\} + \#\Big\{$ 

$\Big\} = M \Bigg)$

このとき,

- 巡回置換の長さの和は $2K + 2L + M$.
- 各巡回置換は, (巡回置換の長さ) $- 1$ 個の互換の積で表される.

よって, σ は $2K + 2L + M -$ (巡回置換の数) $= 2K + 2L + M - s(|D|,\ f,\ 2)$ 個の互換の積で表される.
ゆえに, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{2K+2L+M-s(|D|,\ f,\ 2)} = (-1)^M(-1)^{s(|D|,\ f,\ 2)}$. $\square$

ご清聴ありがとうございました.