

Celtic diagrams of various grid types

福田大能

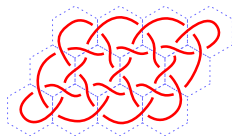
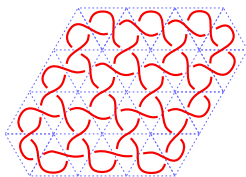
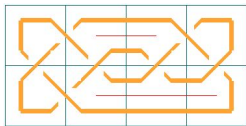
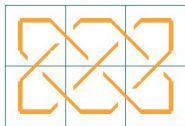
埼玉大学大学院 理工学研究科
数理電子情報系専攻 数学コース

2021 年 12 月 24 日

- ① §0 Introduction
- ② §1 Celtic diagrams
- ③ §2 Celtic diagrams of several grid types
- ④ §3 Alexander–Conway polynomials of Celtic diagrams
- ⑤ §4 Future works

Introduction

下図のような diagram を Celtic diagram という。(定義は §1 で)



Celtic diagram の研究としては

J. R. Allen, *Celtic Art in Pagan and Christian Times* (1904).

P. R. Cromwell, *Celtic Knotwork: Mathematical Art* (1993).

M. Hashizume, 正方形グリッドから得られるケルト結び目模様 (2019).

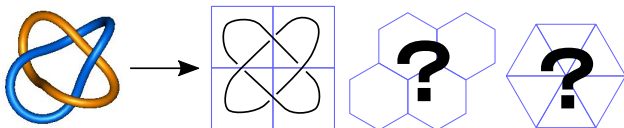
Y. Funakoshi, 正六角形グリッドから得られるケルト結び目模様 (2019).

などがある.

Introduction

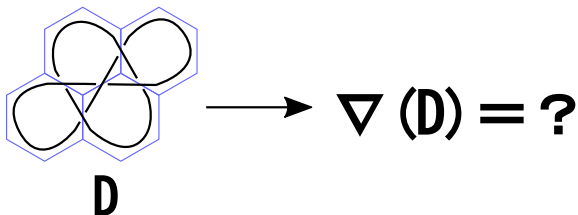
Main Result 1 (§2)

どんな alternating diagram でも三角，六角グリッド領域の Celtic diagram で描けるか。正方グリッド領域の Celtic diagram との関係はどうか。



Main Result 2 (§3)

Celtic diagram の Alexander-Conway 多項式はどうなるか。



§1 Celtic diagrams

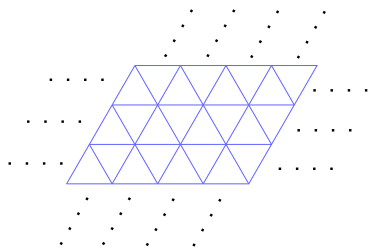
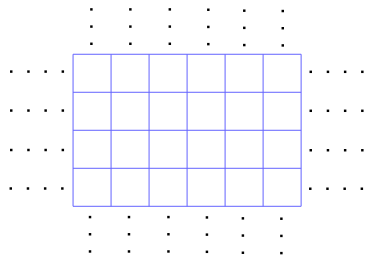
Definition(grid)

グリッド (grid) : 多角形で分割された平面

Definition(grid region)

グリッド領域 (grid region) : グリッド内のいくつかの多角形からなる連結な有限領域

平面が正方形 (正三角形, 正六角形) で分割されている時, 正方グリッド領域 (三角グリッド領域, 六角グリッド領域) という。



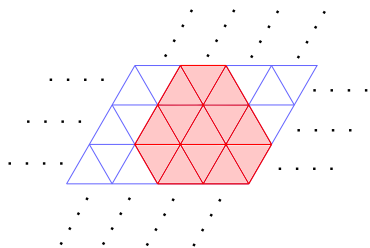
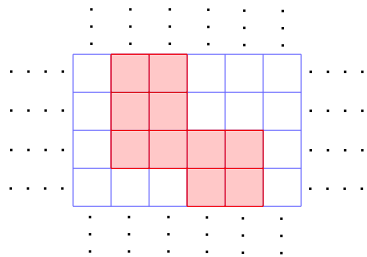
Definition(grid)

グリッド (grid) : 多角形で分割された平面

Definition(grid region)

グリッド領域 (grid region) : グリッド内のいくつかの多角形からなる連結な有限領域

平面が正方形 (正三角形, 正六角形) で分割されている時, 正方グリッド領域 (三角グリッド領域, 六角グリッド領域) という.



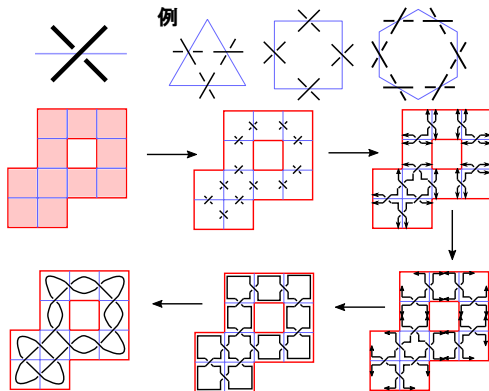
Celtic diagram

Celtic diagram の構成方法を以下のように定義する。

Definition(Celtic diagram)

以下の操作でできた diagram を **Celtic diagram** という。

- グリッド領域の内部の辺に対し，図のように交点を置く。
- 交点を多角形の辺に平行な線で結ぶ。



Barrier

Celtic diagram の交点をスムージングし新たな diagram を作ることができる。

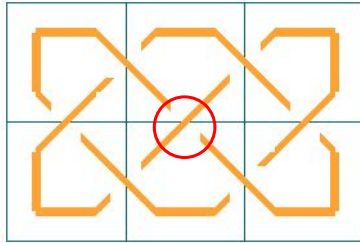
Definition(barrier)

スムージングの種類を表す補助線を **バリア (barrier)** という。

交点を置いた辺と同方向のバリアを horizontal barrier, 垂直方向のバリアを vertical barrier という。バリアをつけた diagram も Celtic diagram という。

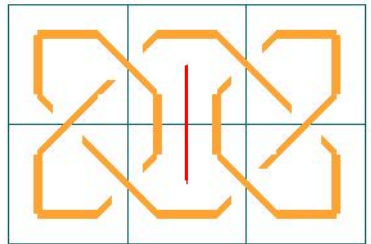
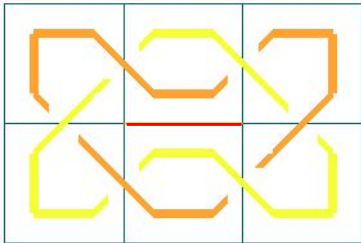


Example



horizontal barrier

vertical barrier

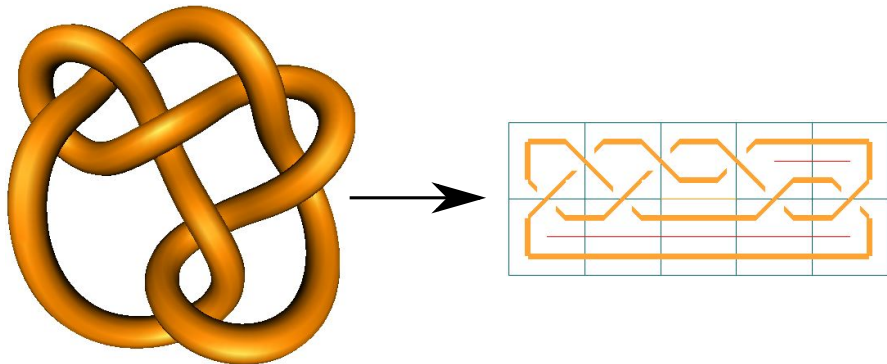


§2 Celtic diagrams of several grid types

Known result

Theorem A (G.L.Gross - T.W.Tucker 2010)

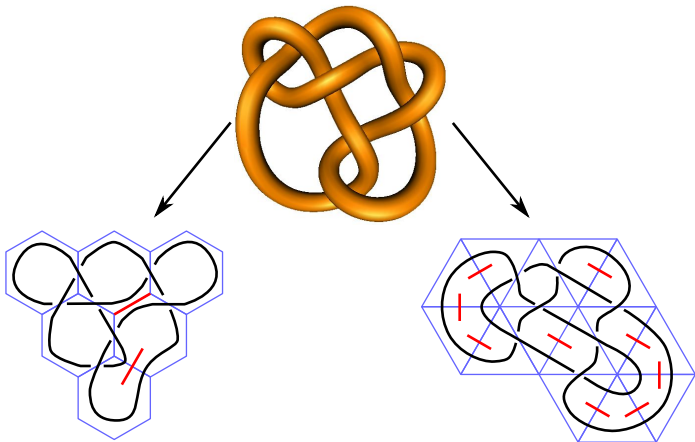
全ての alternating link diagram は正方グリッド領域でできる Celtic diagram で表すことができる。



Main Result 1

Theorem 1 (F. 2021)

全ての alternating link diagram は、三角グリッド領域、六角グリッド領域の Celtic diagram として表すことができる。



Main Result 1

Theorem 2 (F. 2021)

$$i, j \in \{3, 4, 6\} \quad i \neq j$$

L : alternating link をとり

D_i : L を表す i 角グリッド領域上の Celtic diagram とする.

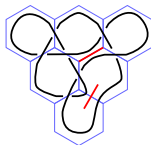
R_i : D_i を描いている i 角グリッド領域

P_i : R_i の多角形の数, V_i : R_i の内部の頂点の数

このとき以下が成り立つ.

① $i < j$ のとき $\exists D_j$ s.t. $P_i \geq P_j$

② $i > j$ のとき $\exists D_j$ s.t. $V_i \geq V_j$



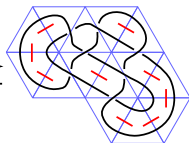
$$P_6 = 6$$

$$V_6 = 4$$



$$P_4 = 10$$

$$V_4 = 4$$



$$P_3 = 14$$

$$V_3 = 3 \quad 14 / 48$$

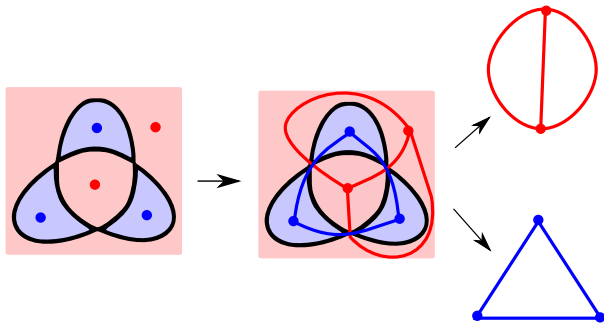
Inverse medial graph

ここで今回の証明に使うグラフを紹介する.

Definition(IMG)

L : alternating link , D_L : L の diagram

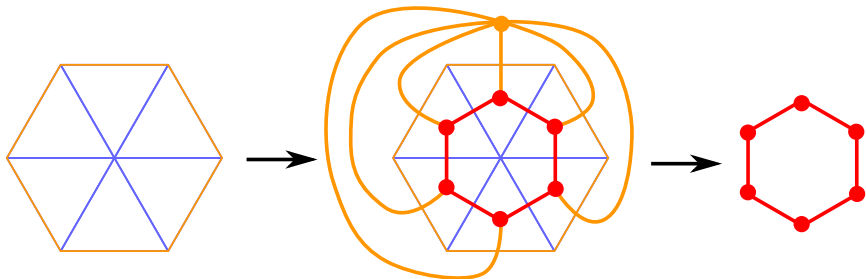
D_L の隣り合う面が同色にならないよう塗分け, 各面に対応する頂点を置く.
 D_L の交点に辺を配置し, 同色の面にある頂点どうしを繋ぎグラフをつくる.
この時できた無限遠点に対応する頂点を含まないグラフを D_L の **inverse medial graph(IMG)** という.



Dual graph of grid region

グリッド領域 R の双対グラフ G^* を考える。

図のように外部に対応する頂点と境界に対応する辺を除いた G^* の部分グラフを R の dual graph R^* という。

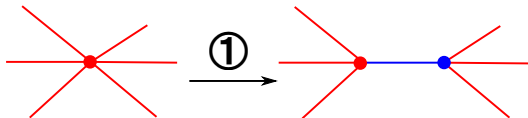


Operation on IMG

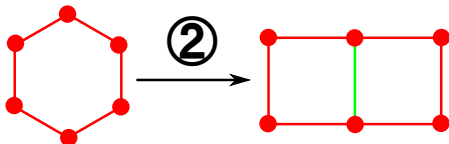
D_L : alternating link diagram , G_L : D_L の IMG とする.

以下の操作によって IMG の変形を行う.

- ① G_L の一つの頂点を引裂き, 新たな辺と頂点を加える. (引裂)



- ② G_L 内の多角形を分割する辺を加える. (分割)



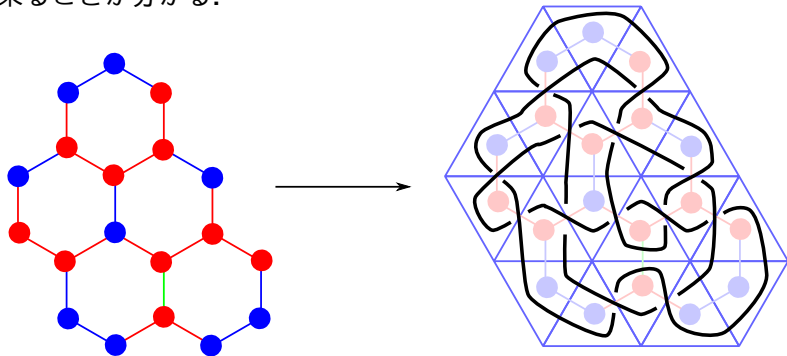
Proof of Thm

ここから定理の証明を行う。

Proposition

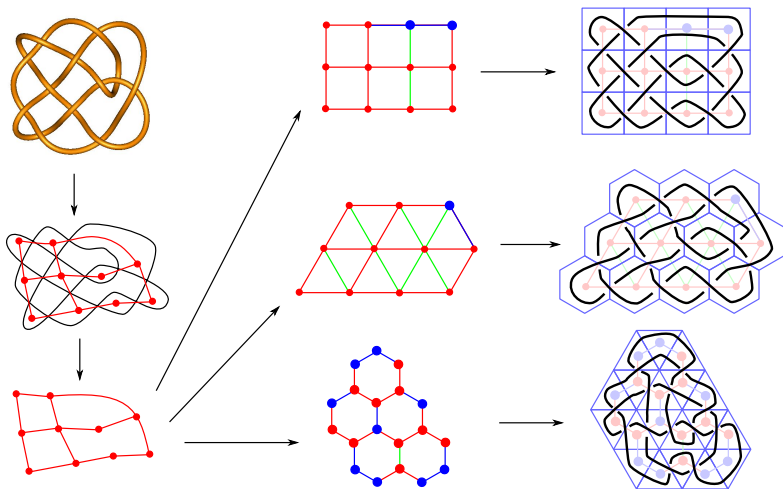
グリッドを一つ固定する。alternating link diagram の IMG に操作 1, 2 を行うと、あるグリッド領域の dual graph にすることが出来る。

この命題により、alternating link diagram が Celtic diagram で実現出来ることが分かる。



Example

操作 1(引裂) で加えた辺は vertical barrier, 操作 2(分割) で加えた辺は horizontal barrier に対応する。



Proof of Thm2

D_i : i 角グリッド領域上の Celtic diagram

G_i : D_i の IMG, P_{G_i} : G_i の面の数, V_{G_i} : G_i の頂点の数

$(R_j^* =)G_j$: G_i に操作 1, 2 を行ったグラフ とすると

Theorem 2 の条件は以下ようになる.

① $i < j$ のとき

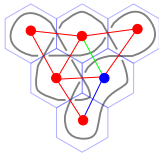
$$\exists G_j \quad s.t. \quad V_{G_i} \geq V_{G_j}$$

② $i > j$ のとき

$$\exists G_j \quad s.t. \quad P_{G_i} \geq P_{G_j}$$

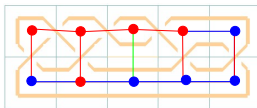
($P_{G_i} = V_i, V_{G_i} = P_i$ に対応している)

($P_6=6, V_6=4$)



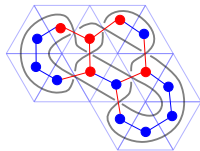
$P_{G_6}=4, V_{G_6}=6$

($P_4=10, V_4=4$)



$P_{G_4}=4, V_{G_4}=10$

($P_3=14, V_3=3$)



$P_{G_3}=3, V_{G_3}=14$

Proof of Thm2

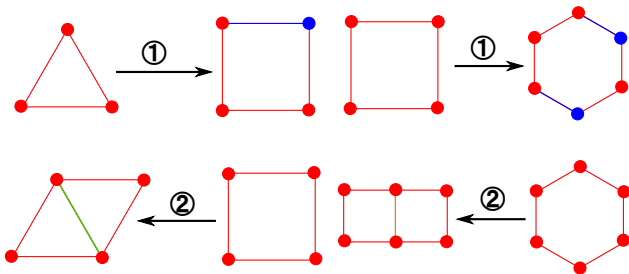
G : グラフ, G' : G に操作を 1 回行ったグラフ

操作 1 の場合. $P_{G'} = P_G, V_{G'} = V_G + 1$

操作 2 の場合. $P_{G'} = P_G + 1, V_{G'} = V_G$

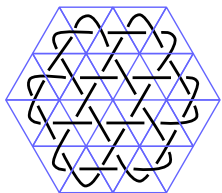
実際のところ,

- あるグリッド領域の Celtic diagram をより小さい多角形のグリッド領域で描こうとするとき IMG は操作 1 のみで変形可能
- あるグリッド領域の Celtic diagram をより大きい多角形のグリッド領域で描こうとするとき IMG は操作 2 のみで変形可能

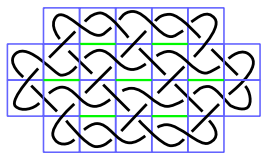
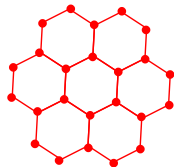
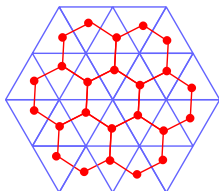


Example

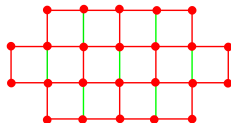
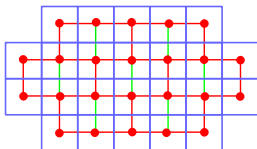
$D_3 \longrightarrow D_4$ の場合 $P_3 \geq P_4$



$$P_3 = 24, V_3 = 7$$

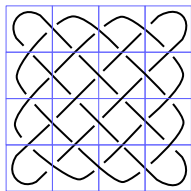


$$P_4 = 24, V_4 = 14$$

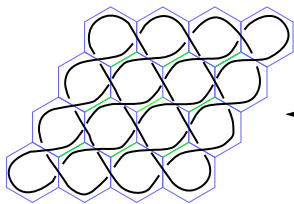
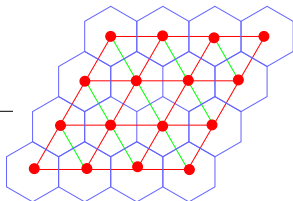
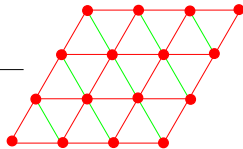
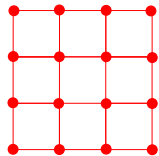
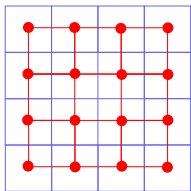


Example

$D_4 \longrightarrow D_6$ の場合 $P_4 \geq P_6$



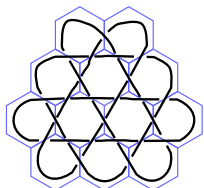
$P_4 = 16, V_4 = 9$



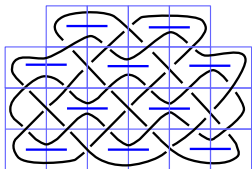
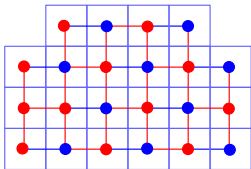
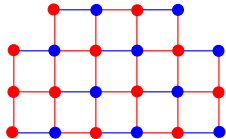
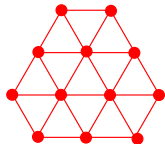
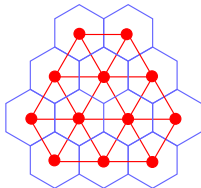
$P_6 = 16, V_6 = 18$

Example

$D_6 \longrightarrow D_4$ の場合 $V_6 \geq V_4$



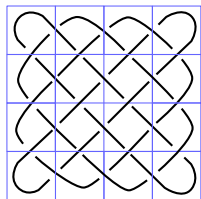
$P_6 = 12, V_6 = 13$



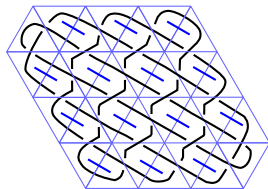
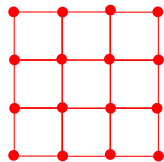
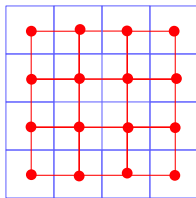
$P_4 = 22, V_4 = 13$

Example

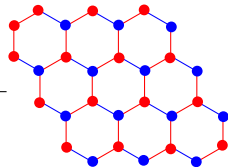
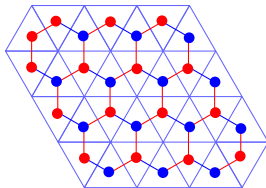
$D_4 \longrightarrow D_3$ の場合 $V_4 \geq V_3$



$P_4 = 16, V_4 = 9$



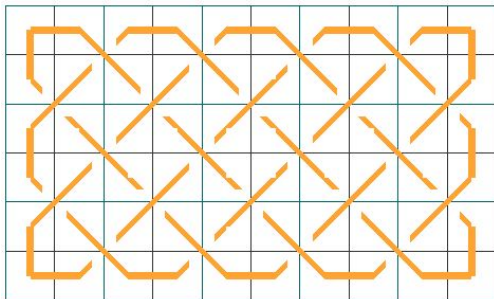
$P_3 = 30, V_3 = 9$



§3 Alexander–Conway polynomials of Celtic diagrams

次に Celtic diagram で描かれる link の Alexander–Conway 多項式の帰納的算出方法について紹介するが、その前にバリアのない"綺麗な形"の Celtic diagram の表記方法を示す。

(G.L.Gross - T.W.Tucker 2010) では正方グリッド領域における Celtic diagram を領域内の小正方形の数 ($2m \times 2n$ 個) を用いて CK_{2m}^{2n} と表している。



A-C Polynomial of CK_{2m}^{2n}

CK_{2m}^{2n} の Alexander-Conway 多項式に関して次のことが分かっている。

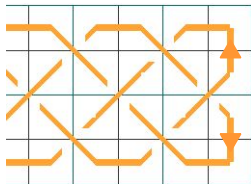
Theorem B (G.L.Gross - T.W.Tucker 2010)

$$\nabla (CK_4^{2n}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{2n} z^k$$

ここで

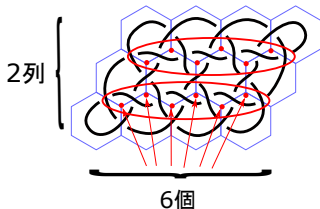
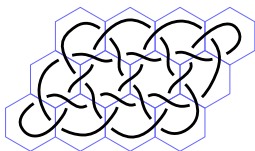
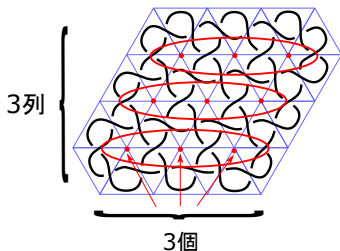
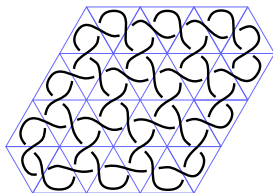
$$b_k^{2n} = \begin{cases} 0 & (k \equiv n \pmod{2}) \\ \binom{n+k-1}{k} 2^k & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ただし、向きは図のように定める。



CH_m^n, CT_m^n

下図のようにグリッド領域の内部の頂点が $m \times n$ 個ある六角（三角）グリッド領域のバリアのない Celtic diagram を $CH_m^n (CT_m^n)$ と表す。

 CH_2^6  CT_3^3 

Main Result 2

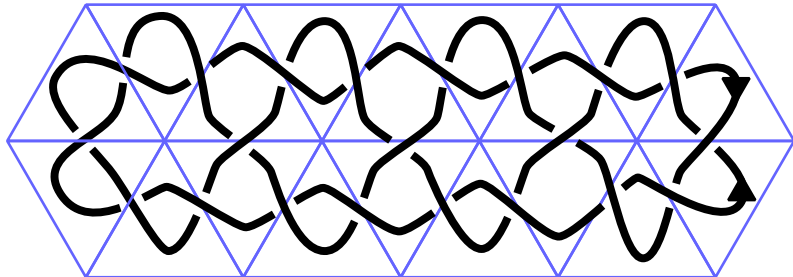
本研究では CT_1^n , CH_1^n における漸化式が求められた.

Theorem 3 (F. 2021)

$$\nabla (CT_1^0) = 1$$

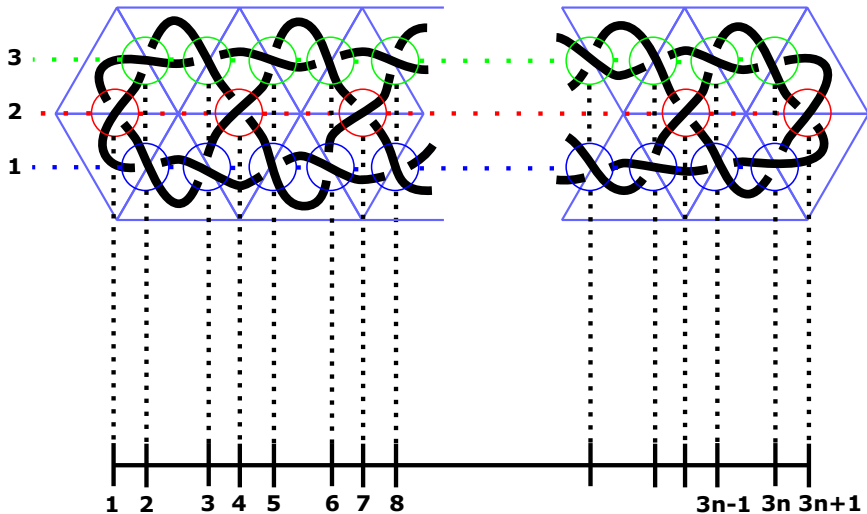
$$\nabla (CT_1^n) = \nabla (CT_1^{n-2}) - 3z \nabla (CT_1^{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

ただし, diagram の向きを下図のように定める.



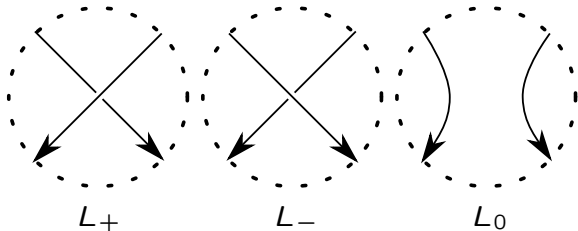
Labeling

三角グリッド領域上で描かれる Celtic diagram の交点の位置を下図のように定める。



Skein relation

方向の付いた絡み目 L について、一つの交点の近傍以外は同一で、この近傍では図のように違っているとす。



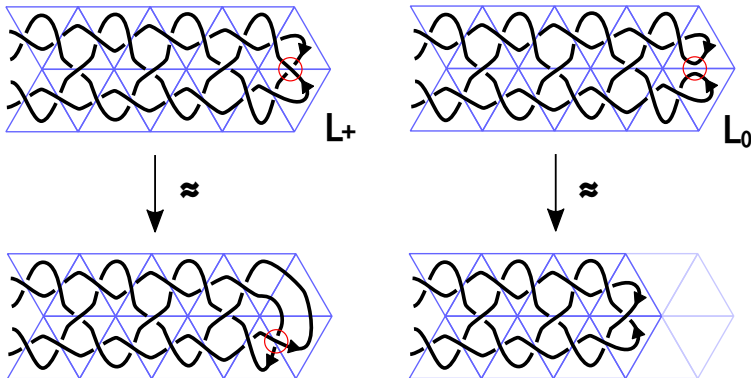
これらの絡み目 L_+ , L_- , L_0 の多項式の間次等式が成り立つ。

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0)$$

Proof of Thm3

$n \geq 1$ とする. (S_r^c : crossing change, E_r^c : smoothing)

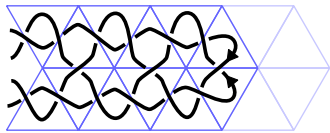
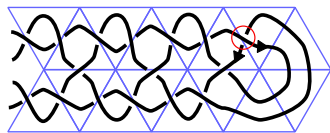
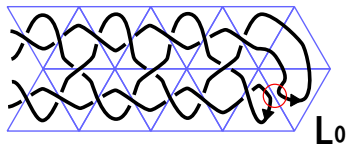
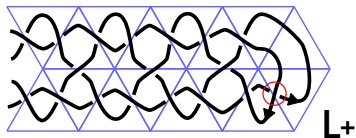
$$\nabla (CT_1^n) = \nabla (S_2^{3n+1} CT_1^n) - z \nabla (E_2^{3n+1} CT_1^n)$$



$$= \nabla (S_2^{3n+1} CT_1^n) - z \nabla (CT_1^{n-1})$$

Proof of Thm3

$$= \nabla \left(S_1^{3n} S_2^{3n+1} CT_1^n \right) - z \nabla \left(E_1^{3n} S_2^{3n+1} CT_1^n \right) - z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right)$$

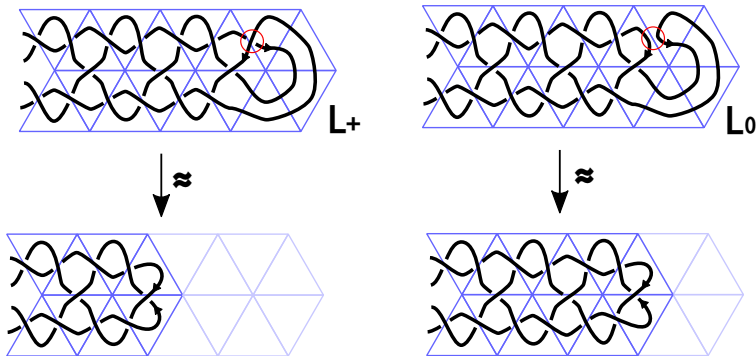


$$= \nabla \left(S_1^{3n} S_2^{3n+1} CT_1^n \right) - z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right) - z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right)$$

$$= \nabla \left(S_1^{3n} S_2^{3n+1} CT_1^n \right) - 2z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right)$$

Proof of Thm3

$$= \nabla \left(S_3^{3n-1} S_1^{3n} S_2^{3n+1} CT_1^n \right) - z \nabla \left(E_3^{3n-1} S_1^{3n} S_2^{3n+1} CT_1^n \right) - 2z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right)$$



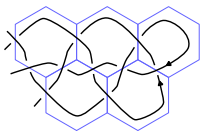
$$= \nabla \left(CT_1^{n-2} \right) - z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right) - 2z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right)$$

$$= \nabla \left(CT_1^{n-2} \right) - 3z \nabla \left(CT_1^{n-1} \right)$$

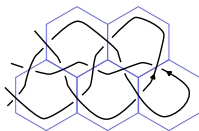
Orientation of CH_1^n

CH_1^n の向きを次のように定める. ($\mathbb{Z} \ni k \geq 0$)

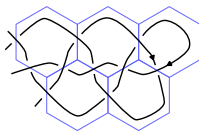
CH_1^{6k}



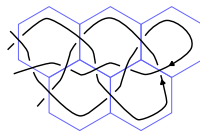
CH_1^{6k+1}



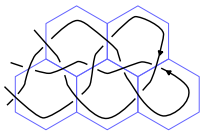
CH_1^{6k+2}



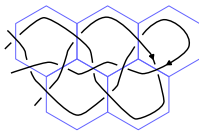
$\overline{CH_1}^{6k+2}$



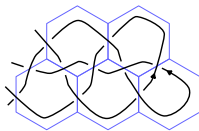
CH_1^{6k+3}



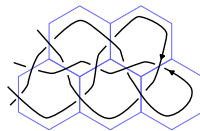
CH_1^{6k+4}



CH_1^{6k+5}



$\overline{CH_1}^{6k+5}$



Main Result 2

Theorem 4 (F. 2021)

$$\nabla (CT_1^0) = 1$$

$$\mathbb{Z} \ni k \geq 0$$

$n = 6k$ のとき

$$\nabla (CH_1^{6k}) = z \nabla (CH_1^{6k-4}) + (1 - z^2) \nabla (CH_1^{6k-3}) - z \nabla (CH_1^{6k-1})$$

$n = 6k + 1$ のとき

$$\nabla (CH_1^{6k+1}) = (1 + z^2) \nabla (CH_1^{6k-2}) - z^3 \nabla (\overline{CH_1^{6k-1}})$$

$n = 6k + 2$ のとき

$$\nabla (CH_1^{6k+2}) = (1 + z^2) \nabla (CH_1^{6k-1}) - z^3 \nabla (CH_1^{6k})$$

$$\nabla (\overline{CH_1^{6k+2}}) =$$

$$z \nabla (CH_1^{6k-2}) + (1 - z^2) \nabla (\overline{CH_1^{6k-1}}) - z \nabla (CH_1^{6k+1})$$

Main Result 2

Theorem 4 (F. 2021)

$n = 6k + 3$ のとき

$$\nabla (CH_1^{6k+3}) = z \nabla (CH_1^{6k-1}) + (1 - z^2) \nabla (CH_1^{6k}) - z \nabla (CH_1^{6k+2})$$

$n = 6k + 4$ のとき

$$\nabla (CH_1^{6k+4}) = (1 + z^2) \nabla (CH_1^{6k+1}) - z^3 \nabla (\overline{CH_1^{6k+2}})$$

$n = 6k + 5$ のとき

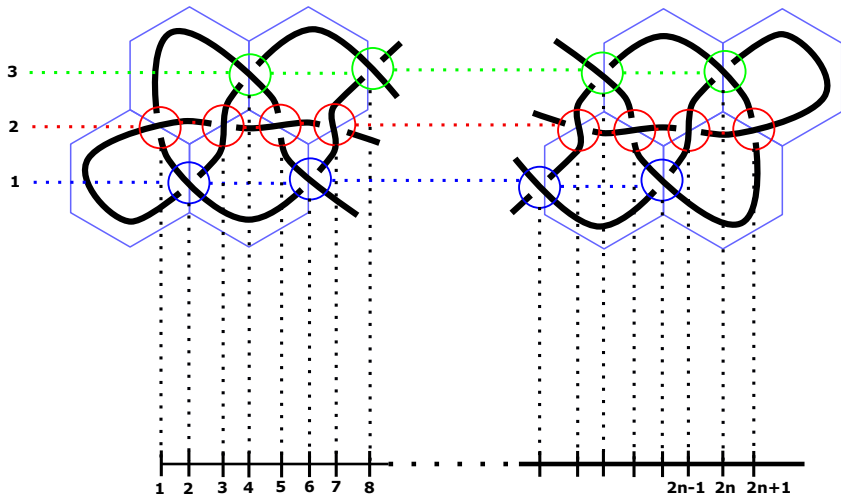
$$\nabla (CH_1^{6k+5}) = (1 + z^2) \nabla (CH_1^{6k+2}) - z^3 \nabla (CH_1^{6k+3})$$

$$\nabla (\overline{CH_1^{6k+5}}) =$$

$$z \nabla (CH_1^{6k+1}) + (1 - z^2) \nabla (\overline{CH_1^{6k+2}}) - z \nabla (CH_1^{6k+4})$$

Labeling

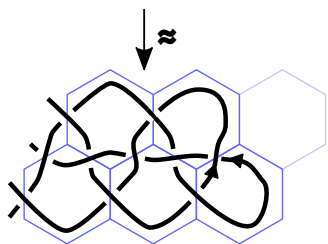
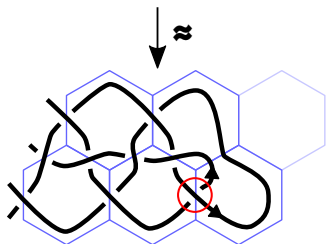
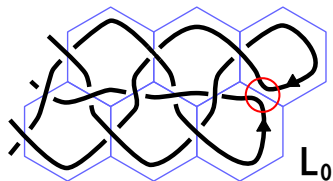
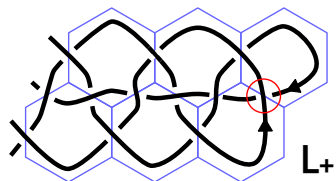
六角グリッド領域上で描かれる Celtic diagram の交点の位置を下図のように定める。



Proof of Thm4

$n = 6k$ のとき.

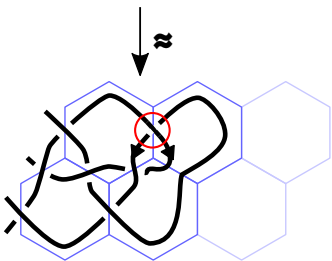
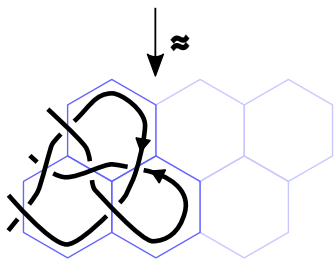
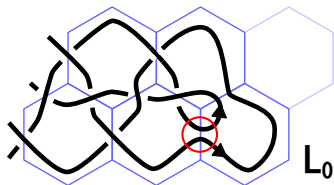
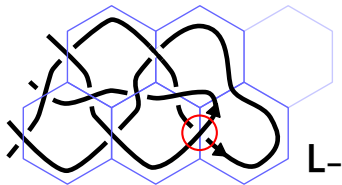
$$\nabla (CH_1^{6k}) = \nabla (S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) - z \nabla (E_2^{2n+1} CH_1^{6k})$$



$$= \nabla (S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) - z \nabla (CH_1^{6k-1})$$

Proof of Thm4

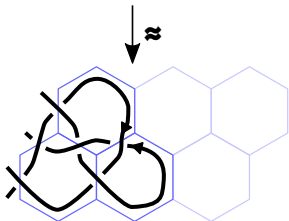
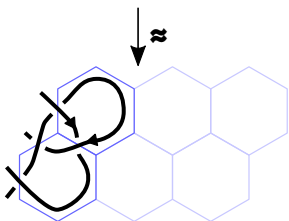
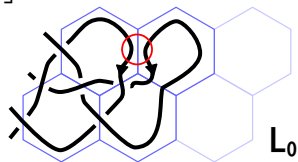
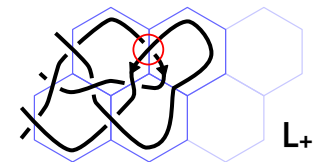
$$= \nabla (S_1^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) + z \nabla (E_1^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) - z \nabla (CH_1^{6k-1})$$



$$= \nabla (CH_1^{6k-3}) + z \nabla (E_1^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) - z \nabla (CH_1^{6k-1})$$

Proof of Thm4

$$= \nabla (CH_1^{6k-3}) + z \left[\nabla (S_3^{2n-4} E_1^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) \right. \\ \left. - z \nabla (S_3^{2n-4} E_1^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k}) \right] - z \nabla (CH_1^{6k-1})$$

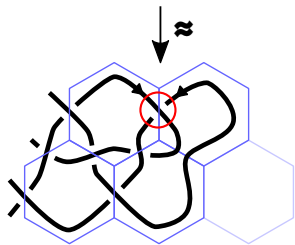
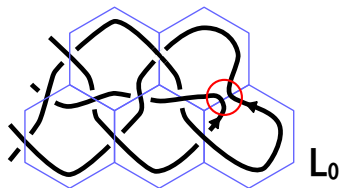
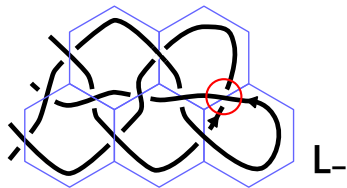


$$= \nabla (CH_1^{6k-3}) + z \left[\nabla (CH_1^{6k-4}) - z \nabla (CH_1^{6k-3}) \right] - z \nabla (CH_1^{6k-1}) \\ = z \nabla (CH_1^{6k-4}) + (1 - z^2) \nabla (CH_1^{6k-3}) - z \nabla (CH_1^{6k-1}) \quad 42 / 48$$

Proof of Thm4

$n = 6k + 1$ のとき.

$$\nabla (CH_1^{6k+1}) = \nabla (S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1}) + z \nabla (E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1})$$

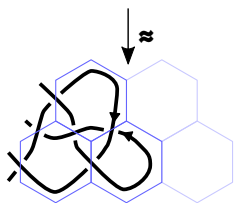
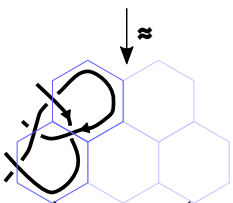
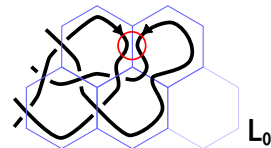
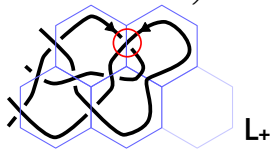


Proof of Thm4

$$= \nabla \left(S_3^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) - z \nabla \left(E_3^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \\ + z \left[\nabla \left(S_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) + z \nabla \left(E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \right]$$

ここで

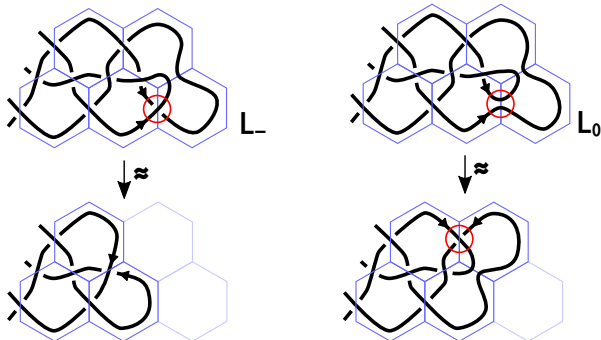
$$\nabla \left(S_3^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) - z \nabla \left(E_3^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right)$$



$$= \nabla \left(CH_1^{6k-2} \right) - z \nabla \left(\overline{CH_1}^{6k-1} \right)$$

Proof of Thm4

$$\nabla \left(S_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) + z \nabla \left(E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right)$$

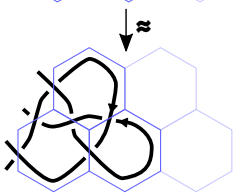
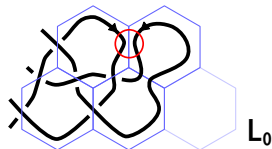
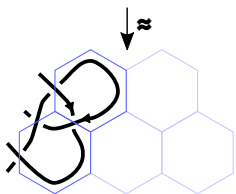
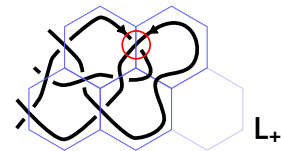


$$= \nabla \left(\overline{CH_1}^{6k-1} \right) + z \nabla \left(E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right)$$

であるため

Proof of Thm4

$$\begin{aligned}
 &= \nabla \left(S_3^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) - z \nabla \left(E_3^{2n-2} S_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \\
 &\quad + z \left[\nabla \left(S_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) + z \nabla \left(E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \right] \\
 &= \nabla \left(CH_1^{6k-2} \right) - z \nabla \left(\overline{CH_1^{6k-1}} \right) + z \nabla \left(\overline{CH_1^{6k-1}} \right) \\
 &\quad + z^2 \left[\nabla \left(S_3^{2n-2} E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) - z \nabla \left(E_3^{2n-2} E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \right]
 \end{aligned}$$



Proof of Thm4

$$\begin{aligned}
 &= \nabla \left(CH_1^{6k-2} \right) + z^2 \left[\nabla \left(S_3^{2n-2} E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - z \nabla \left(E_3^{2n-2} E_1^{2n} E_2^{2n+1} CH_1^{6k+1} \right) \right] \\
 &= \nabla \left(CH_1^{6k-2} \right) + z^2 \nabla \left(CH_1^{6k-2} \right) - z^3 \nabla \left(\overline{CH_1^{6k-1}} \right) \\
 &= (1 + z^2) \nabla \left(CH_1^{6k-2} \right) - z^3 \nabla \left(\overline{CH_1^{6k-1}} \right)
 \end{aligned}$$

$\overline{CH_1^{6k+2}}$, CH_1^{6k+3} , $\overline{CH_1^{6k+5}}$ は CH_1^{6k} と同様に

CH_1^{6k+2} , CH_1^{6k+4} , CH_1^{6k+5} は CH_1^{6k+1} と同様にして示せる.

- 任意のタイリングによるグリッドでも全ての alternating link diagrams はそのグリッド領域でできる Celtic diagram で表すことができるか.
- CT_m^n , CH_m^n ($m \geq 1$) の Alexander–Conway 多項式の算出方法
- バリアのある Celtic diagram の Alexander–Conway 多項式の算出方法