Ribbon knots with different symmetric union presentations

吉川修平

大阪市立大学大学院理学研究科

2021 年 12 月 23 日 (木)

結び目の数理 IV

Symmetric union

定義 (Symmetric union)

D : 結び目図式
D^* : 軸に対して D を対称的に移した図式
T_i: 対称的に配置された D と D^* の間の 0-タングル $(i = 0, \dots, k)$

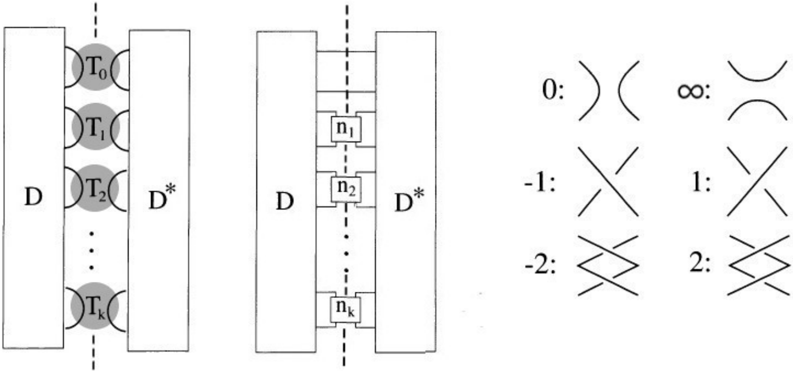
$D \cup D^*$ の図式から T_i $(i = 0, \dots, k)$ のタングルを次のように置き換えた図式を **symmetric union** 図式と呼び $D \cup D^*(n_1, \dots, n_k)$ と表す.

1. $i = 0, \dots, \mu - 1$ のとき $T_i = \infty$
2. $i = \mu, \dots, k$ $(\mu \geq 1)$ のとき $T_i = n_i \in \mathbb{Z}$

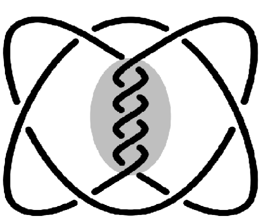
次ページに $\mu = 1$ のときの $D \cup D^*(n_1, \dots, n_k)$ を例に挙げています.

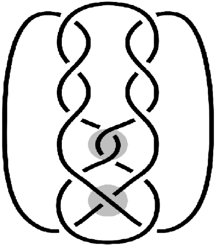
Symmetric union

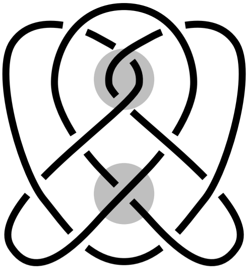
$D \cup D^*(n_1, \ldots, n_k)$: symmetric union 図式
$\mu = 1$ のとき

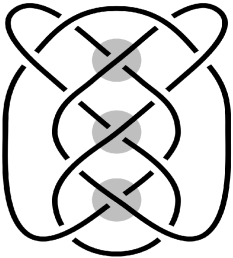


Examples









Symmetric equivalence

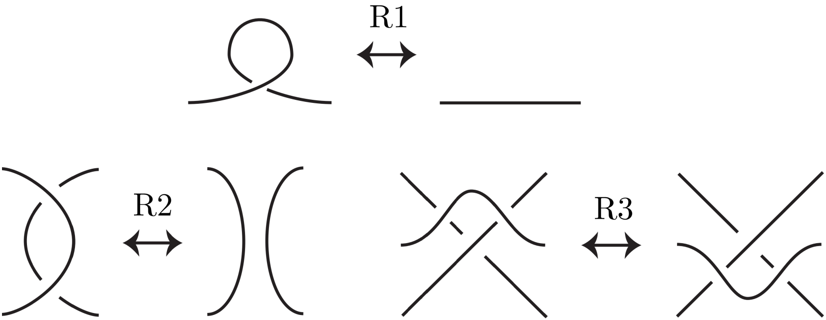
D, D': symmetric union 図式

定義 (Eisermann, Lamm)

D と D' が **symmetrically equivalent**.
$\Longleftrightarrow$ D, D' が有限回の Reidemeister 移動, および $S1$-, $S2$-, $S3$-, $S4$- 移動 で移りあう.

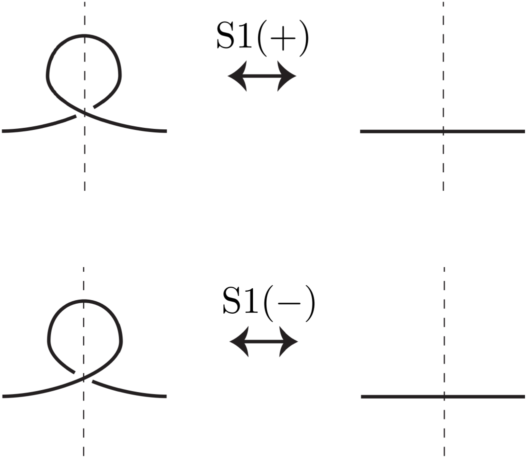
それぞれの移動に関しては次ページから図示します.

R-Move

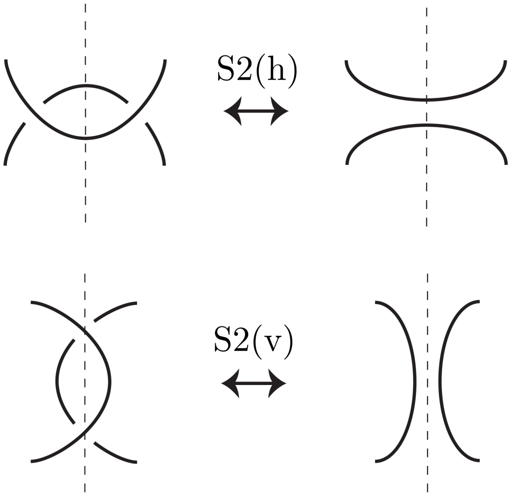


Reidemeister 移動

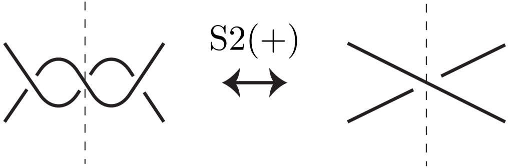
S1($\pm$)-Move

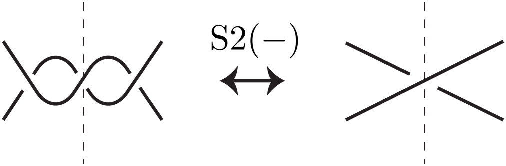


S2-Move

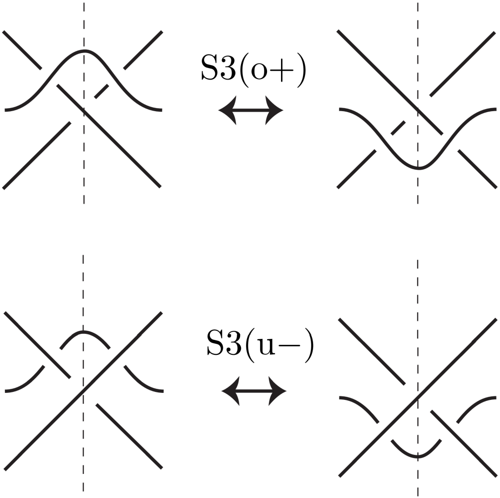


S2(±)-Move

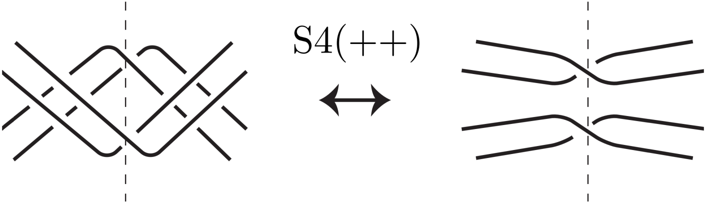




S3-Move



S4-Move



Refined Kauffman Bracket 1

D: 軸を横断的に交わる図式

$\langle D \rangle \in \mathbb{Z}(A, B)$　　(A, B の Laurent 多項式環の商体)

定義 (Eisermann, Lamm)

軸上にない交点のとき

$$\langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \rangle = A^{+1} \langle \asymp \rangle + A^{-1} \langle)\,(\rangle \tag{1}$$

軸上の交点のとき

$$\langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \rangle = B^{-1} \langle \asymp \rangle + B^{+1} \langle)\,\vdots\,(\rangle \tag{2}$$

$$\langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \rangle = B^{+1} \langle \asymp \rangle + B^{-1} \langle)\,\vdots\,(\rangle \tag{3}$$

Refined Kauffman Bracket 2

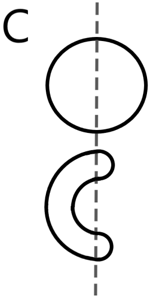
定義 (Eisermann, Lamm)

C：軸との交差を $2m$ 持つ、成分数 n の自明な図式

$$\langle C \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-m}(-B^2 - B^{-2})^{m-1} \tag{4}$$

ex.
右図では軸との交差は
6 で成分数 2 であるので

$$\langle C \rangle = \frac{(-B^2 - B^{-2})^2}{(-A^2 - A^{-2})}$$



Refined Jones Polynomial

定義 (Eisermann, Lamm)

D : 有向絡み目図式
$\alpha(D)$: 軸上にない交点の符号の和
$\beta(D)$: 軸上にある交点の符号の和

$$W_D(A,B) := (-A^{-3})^{\alpha(D)}(-B^{-3})^{\beta(D)}\langle D\rangle \in \mathbb{Z}(A,B)$$

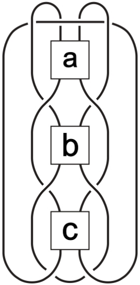
$A^2 = t^{-1/2}$, $B^2 = s^{-1/2}$ とし $W_D(s,t)$ または $W(D)$ と表される.

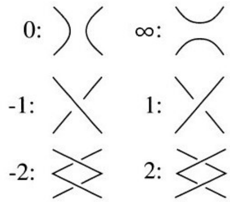
特に $W_D(t,t) = V_D(t) =$ Jones 多項式

定理 (Eisermann, Lamm)

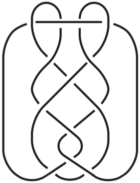
$W_D(s,t)$ は *symmetircally equivarent* での不変量である.

L(a,b,c)

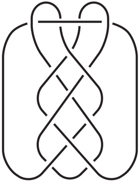




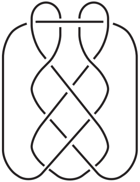
ex. 9_{27}



L(0,1,-2)



L(-1,1,-1)



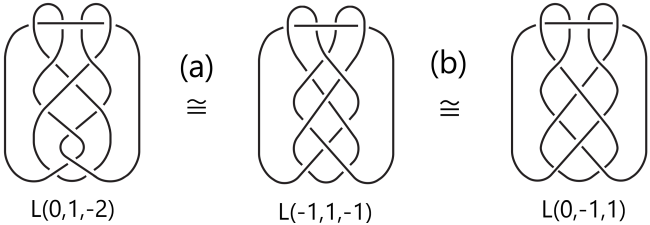
L(0,-1,1)

Result 1

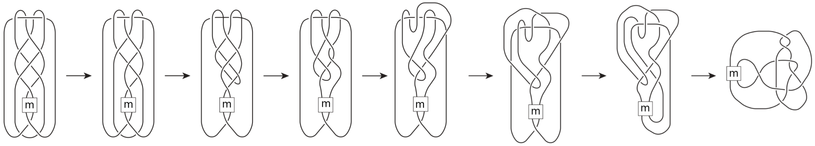
定理

$$L(-1,1,n-1) \cong L(n,1,-2) \qquad (a)$$

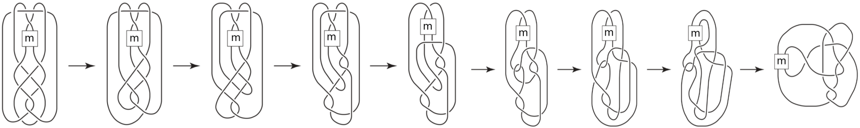
$$L(0,-1,n+2) \cong L(n,1,-1) \qquad (b)$$



$L(-1,1,m-2) \cong L(m-1,1,-2)$

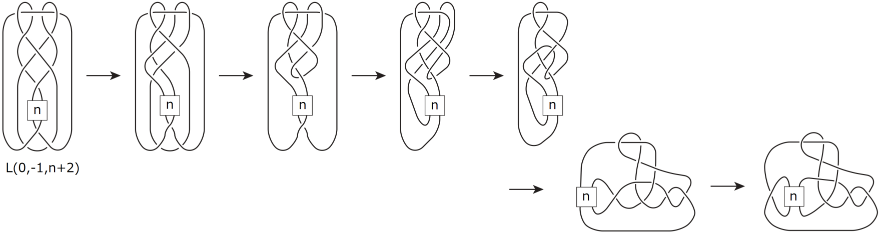


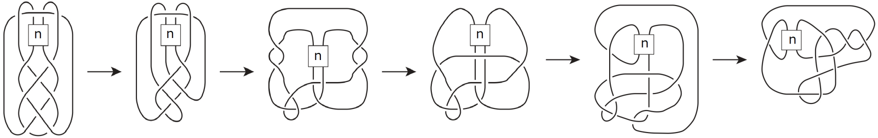
L(-1,1,m-2)



L(m-1,1,-2)

$L(0, -1, n+2) \cong L(n, 1, -1)$





L(n,1,-1)

Result 2

定理

$L(-1,1,n-1)$ と $L(n,1,-2)$, $L(0,-1,n+2)$ と $L(n,1,-1)$ はそれぞれ *symmetrically equivalent* ではない.

命題 (Refined jones の計算)

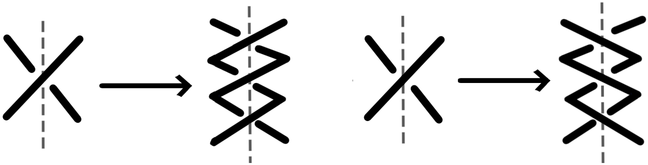
$W(L(-1,1,n-1)) = W(L(n,1,-2))$
$W(L(0,-1,n+2)) \neq W(L(n,1,-1))$

Refined jones の計算により $L(0,-1,n+2)$ と $L(n,1,-1)$ は symmetrically equivalent ではないことがわかる.

定義 (Carlo Collari , Paolo Lisca)

D: symmetric union 図式　$h \in \mathbb{Z}$
$D(h)$ を次のように定める.
D の対称軸上の各交点を $|h|$ 個の half-twists に置き換えたもの
D(h) とし、h の符号により交点が定まる.

$h = 3$ のとき　　　　$h = -3$ のとき



D　　$D(3)$　　D　　$D(-3)$

命題 (Carlo Collari, Paolo Lisca)

D, D' : *symmetric union* 図式

D と D' が *symmetrically equivalent* である.
$\Longrightarrow {}^{\forall}h \in \mathbb{Z}$ に対して $D(h)$ と $D'(h)$ は *symmetrically equivalent* である. 特に $D(h) \cong D'(h)$ である.

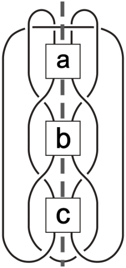
Proof

定理

$L(-1,1,n-1)$ と $L(n,1,-2)$ は *symmetrically equivalent* ではない.

定理の証明

$D(h)$ の定義より $L(-1,1,n-1)(2) = L(-2,2,2n-2)$,
$L(n,1,-2)(2) = L(2n,2,-4)$
カウフマン多項式 F に対して、
$F(L(-2,2,2n-2)) \neq F(L(2n,2,-4))$ である.
$\Rightarrow L(-2,2,2n-2)$ と $L(2n,2,-4)$ は isotopic ではない.
$\Rightarrow L(-2,2,2n-2)$ と $L(2n,2,-4)$ は
symmetrically equivalent ではない.



$L(a,b,c)$

命題より $L(-1,1,n-1)$ と $L(n,1,-2)$ は
symmetrically equivalent ではない. $\square$

注意

Jones 多項式 $V(t)$
HOMFLY 多項式 $P(v,z)$
Q-多項式 $Q(x)$
$V_{L(-2,2,2n-2)}(t) = V_{L(2n,2,-4)}(t)$
$P_{L(-2,2,2n-2)}(v,z) = P_{L(2n,2,-4)}(v,z)$
$Q_{L(-2,2,2n-2)}(x) = Q_{L(2n,2,-4)}(x)$

ご清聴ありがとうございました