

# Twisted Milnor pairings of Casson-Gordon type and non-slice knots

柳田 幸輝

2021年12月23日

本スライドの定理 2 の証明において、計算に誤りがございました。そのため、以下の通り訂正させていただきます。

また、八の字結び目の  $(2, 1)$ -cable 結び目が滑らかなスライス結び目ではない事が、2022 年に I. Dai 氏と S. Kang 氏、A. Mallick 氏、J. Park 氏、M. Stoffregen 氏らによって証明されている（詳細は [arXiv:2207.14187](https://arxiv.org/abs/2207.14187) 参照）。

# 背景と動機

## 背景 1

Casson-Gordon は  $\tau$  不変量を定義。また符号数と discriminants が 0 になる非スライス結び目を例示。

問題点：4-mfd の交叉形式を用いたため、 $\tau$  不変量の計算法が未確立。

## 背景 2

Kirk-Livingston は捩れ Milnor pairing と CG- $\tau$  不変量の符号数の関係を示唆

問題点：詳細な証明と計算例がなかった。

## 動機

非スライス性の十分条件を与える計算可能な量が欲しい。

# 背景と動機

## 背景 1

Casson-Gordon は  $\tau$  不変量を定義。また符号数と discriminants が 0 になる非スライス結び目を例示。

問題点：4-mfd の交叉形式を用いたため、 $\tau$  不変量の計算法が未確立。

## 背景 2

Kirk-Livingston は捩れ Milnor pairing と CG- $\tau$  不変量の符号数の関係を示唆

問題点：詳細な証明と計算例がなかった。

## 動機

非スライス性の十分条件を与える計算可能な量が欲しい。

# 背景と動機

## 背景 1

Casson-Gordon は  $\tau$  不変量を定義。また符号数と discriminants が 0 になる非スライス結び目を例示。

問題点：4-mfd の交叉形式を用いたため、 $\tau$  不変量の計算法が未確立。

## 背景 2

Kirk-Livingston は捩れ Milnor pairing と CG- $\tau$  不変量の符号数の関係を示唆

問題点：詳細な証明と計算例がなかった。

## 動機

非スライス性の十分条件を与える計算可能な量が欲しい。

# 背景と動機

## 背景 1

Casson-Gordon は  $\tau$  不変量を定義。また符号数と discriminants が 0 になる非スライス結び目を例示。

問題点：4-mfd の交叉形式を用いたため、 $\tau$  不変量の計算法が未確立。

## 背景 2

Kirk-Livingston は捩れ Milnor pairing と CG- $\tau$  不変量の符号数の関係を示唆

問題点：詳細な証明と計算例がなかった。

## 動機

非スライス性の十分条件を与える計算可能な量が欲しい。

# 主結果

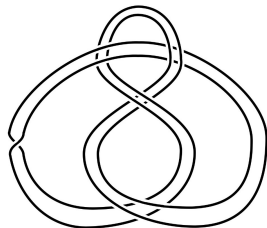
## “定理 1” [Y.] (概略)

- ①  $CG_\tau$  不変量に似た状況で、結び目より得られる 3-mfd の情報だけで非退化な歪エルミート形式  $\psi$  を定義
- ② 結び目がスライス  
 $\implies$   
”ある条件”のもと、 $\sqrt{-1}\psi$  の符号数は 0

## 定理 2 [Y.]

(Kawauchi の問題の部分的解決)

$4_1$  の (2, 1)-cable 結び目は非スライス



# 目次

- ① 従来の Milnor pairing と  $CG_{-T}$  不変量の復習 (3 ページ)
- ② 振れミルナーペアリング (3 ページ)
- ③ 実際の応用例 (2 ページ)



# 目次

## ① 従来の Milnor pairing と CG- $\tau$ 不変量の復習

(3 ページ)

- Milnor pairing の復習
- 捩れコホモロジーの準備
- 余談：Casson-Gordon の  $\tau$  不変量

## ② 捩れミルナーペアリング

(3 ページ)

## ③ 実際の応用例

(2 ページ)

# 通常の Milnor Pairing と符号数

$K \subset S^3$  : 結び目

$X_K$  :  $S^3$  の  $K$  に沿った 0-手術

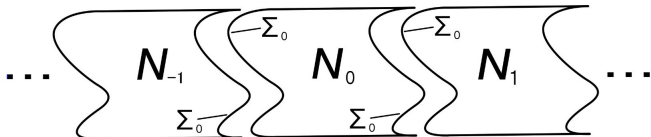
$\Sigma_0 \subset X_K$  : ザイフェルト膜の 0-手術

## Milnor pairing の定義

$$H^1(\tilde{X}_K; \mathbb{C}) \times H^1(\tilde{X}_K; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{X}_K; \mathbb{C}) \xrightarrow{[\Sigma_0]} \mathbb{C}.$$

ここで  $\tilde{X}_K$  は  $X_K$  の無限巡回被覆空間である。

Milnor は符号数を考察。結び目の符号数  $\sigma(K)$  と一致する。



# 捩れコホモロジーの復習

例 (Casson-Gordon 型)  $q, d$  : 互いに素な素冪

$X_q$  :  $S^3$  の  $K$  に沿った 0-手術を施した多様体の  $q$  次巡回被覆

$\tilde{X}_q$  :  $X_q$  の無限巡回被覆空間

$\text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  :  $H_1(X_q; \mathbb{Z})$  の捩れ部分加群

準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  を固定

さらに  $\chi$  より次を定義 :

$$\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \xrightarrow{\text{被覆写像と abelian 化}} H_1(X_q; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C}).$$

$\implies$

捩れコホモロジー  $H^*(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}})$  が定義できた。

さらにカップ積も構成される :

$$H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \times H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \xrightarrow{\smile} H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{C}_{\bar{\chi}}}).$$

# 捩れコホモロジーの復習

例 (Casson-Gordon 型)  $q, d$  : 互いに素な素冪

$X_q$  :  $S^3$  の  $K$  に沿った 0-手術を施した多様体の  $q$  次巡回被覆

$\tilde{X}_q$  :  $X_q$  の無限巡回被覆空間

$\text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  :  $H_1(X_q; \mathbb{Z})$  の捩れ部分加群

準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  を固定

さらに  $\chi$  より次を定義 :

$$\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \xrightarrow{\text{被覆写像と abelian 化}} H_1(X_q; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C}).$$

$\implies$

捩れコホモロジー  $H^*(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}})$  が定義できた。

さらにカップ積も構成される :

$$H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \times H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \xrightarrow{\smile} H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{C}_{\bar{\chi}}}).$$

# 捩れコホモロジーの復習

例 (Casson-Gordon 型)  $q, d$  : 互いに素な素冪

$X_q$  :  $S^3$  の  $K$  に沿った 0-手術を施した多様体の  $q$  次巡回被覆

$\tilde{X}_q$  :  $X_q$  の無限巡回被覆空間

$\text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  :  $H_1(X_q; \mathbb{Z})$  の捩れ部分加群

準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  を固定

さらに  $\chi$  より次を定義 :

$$\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \xrightarrow{\text{被覆写像と abelian 化}} H_1(X_q; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C}).$$

$\implies$

捩れコホモロジー  $H^*(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}})$  が定義できた。

さらにカップ積も構成される :

$$H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \times H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \xrightarrow{\smile} H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{C}_{\bar{\chi}}}).$$

# 捩れコホモロジーの復習

例 (Casson-Gordon 型)  $q, d$  : 互いに素な素冪

$X_q$  :  $S^3$  の  $K$  に沿った 0-手術を施した多様体の  $q$  次巡回被覆

$\tilde{X}_q$  :  $X_q$  の無限巡回被覆空間

$\text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  :  $H_1(X_q; \mathbb{Z})$  の捩れ部分加群

準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  を固定

さらに  $\chi$  より次を定義 :

$$\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \xrightarrow{\text{被覆写像と abelian 化}} H_1(X_q; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \hookrightarrow GL_1(\mathbb{C}).$$

$\implies$

捩れコホモロジー  $H^*(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}})$  が定義できた。

さらにカップ積も構成される :

$$H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \times H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \xrightarrow{\smile} H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{C}_{\bar{\chi}}}).$$

# 余談：CG- $\tau$ 不変量の復習

## Casson-Gordon の $\tau$ 不変量

結び目  $K$  と  $\bar{\chi} : \pi_1(\tilde{X}_q) \rightarrow GL_1(\mathbb{C})$  に対し次が定義可：

$$\tau(K, \bar{\chi}) \in W(\mathbb{C}(t)) \otimes \mathbb{Z}[1/d'].$$

ここで、 $W(\mathbb{C}(t))$  は "Witt 群"、 $d'$  は  $d$  の素因子である。

## $\tau$ 不変量とスライス性 [CG]

$K$  : スライスな結び目  $\implies$

$\exists$  部分加群  $N \subset \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  s.t.

$\chi(N) = \{0\}$  を満たす  $\forall$  準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$   
に対して、 $\tau(K, \bar{\chi}) = 0$  である。

$\implies \tau$  不変量は 4-mfd の交叉形式を用いたため計算が難しい。

# 目次

- ① 従来の Milnor pairing と  $CG_{-T}$  不変量の復習 (3 ページ)
- ② 捩れミルナーペアリング (3 ページ)
  - 捩れ Milnor pairing の定義
  - 主定理
  - これまでの難点と解決法
- ③ 実際の応用例 (2 ページ)



# 捩れ Milnor pairing

## 捩れ Milnor pairing

$$\begin{aligned}\psi : H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \times H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) &\xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{C}_{\bar{\chi}}}) \\ &\rightarrow H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}) \xrightarrow{[\Sigma_0]} \mathbb{C}.\end{aligned}$$

(非退化性が [KL] で証明なしで示唆された。[Y] は証明を与えた。)

## 捩れ Milnor pairing の考察

- $\psi$  は非退化な歪 Hermite 形式  
故に  $\sqrt{-1}\psi$  の符号数  $\text{Sign}(K, \chi)$  が定義可
- 捩れ Milnor pairing から CG  $\tau$  不変量の符号数を導出可  
[KL, Neu]

# 捩れ Milnor pairing

## 捩れ Milnor pairing

$$\begin{aligned}\psi : H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) \times H^1(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}}) &\xrightarrow{\sim} H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}_{\bar{\chi}} \otimes \overline{\mathbb{C}_{\bar{\chi}}}) \\ &\rightarrow H^2(\tilde{X}_q; \mathbb{C}) \xrightarrow{[\Sigma_0]} \mathbb{C}.\end{aligned}$$

(非退化性が [KL] で証明なしで示唆された。[Y] は証明を与えた。)

## 捩れ Milnor pairing の考察

- $\psi$  は非退化な歪 Hermite 形式  
故に  $\sqrt{-1}\psi$  の符号数  $\text{Sign}(K, \chi)$  が定義可
- 捩れ Milnor pairing から CG  $\tau$  不変量の符号数を導出可  
[KL, Neu]

# 主結果

## 定理 1 [Y.] (slice 性の criterion)

$K$ : スライスな結び目

$\implies$

$\exists$  部分加群  $N \subset \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  s.t.

$\chi(N) = \{0\}$  を満たす  $\forall$  準同型  $\chi: \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$   
に対して

$\text{Sign}(K, \chi) = 0$  である。

注:  $N$  は **リンキング形式** の " **メタボライザー** " で与えられる。

# 主結果

## 定理 1 の対偶

リンキング形式の  $\forall$  メタボライザー  $N \subset \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$   
に対して

$\exists$  準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  s.t.

$\chi(N) = \{0\}$  かつ  $\text{Sign}(K, \chi) \neq 0$

$\implies$

$K$  は非スライス結び目



リンキング形式と捩れカップ積を計算したい。

# 主結果

## 定理 1 の対偶

リンキング形式の  $\forall$  メタボライザー  $N \subset \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$   
に対して

$\exists$  準同型  $\chi : \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  s.t.

$\chi(N) = \{0\}$  かつ  $\text{Sign}(K, \chi) \neq 0$

$\implies$

$K$  は非スライス結び目

$\Downarrow$

リンキング形式と振れカップ積を計算したい。

# これまでの難点と解決法

- $\text{Tor} H_1(X_q; \mathbb{Z})$  上のリンク形式の記述が曖昧で、準同型の明示が困難だった。

⇒

ホモロジーの基底からの行列表示を与えた [Nosaka]。  
特にメタボライザーの記述が可能になった。

- 局所系のカップ積は計算が困難だと考えられていた。

⇒

3-mfd の捩れ Milnor pairing は、群コホモロジーで計算可能。(cf. [Trotter, Nosaka, Ohkura])

# これまでの難点と解決法

- $\text{Tor} H_1(X_q; \mathbb{Z})$  上のリンク形式の記述が曖昧で、準同型の明示が困難だった。

⇒

ホモロジーの基底からの行列表示を与えた [Nosaka]。  
特にメタボライザーの記述が可能になった。

- 局所系のカップ積は計算が困難だと考えられていた。

⇒

3-mfd の捩れ Milnor pairing は、群コホモロジーで計算可能。(cf. [Trotter, Nosaka, Ohkura])

## これまでの難点と解決法

- $\text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z})$  上のリンク形式の記述が曖昧で、準同型の明示が困難だった。

⇒

ホモロジーの基底からの行列表示を与えた [Nosaka]。  
特にメタボライザーの記述が可能になった。

- 局所系のカップ積は計算が困難だと考えられていた。

⇒

3-mfd の捩れ Milnor pairing は、群コホモロジーで計算可能。(cf. [Trotter, Nosaka, Ohkura])



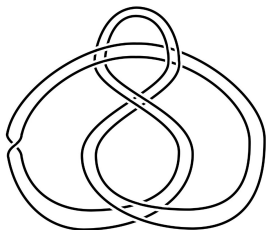
# 目次

- ① 従来の Milnor pairing と  $CG_{\tau}$  不変量の復習 (3 ページ)
- ② 捩れミルナーペアリング (3 ページ)
- ③ 実際の応用例 (2 ページ)
  - $4_1$  の  $(2, 1)$ -cable 結び目への応用

# 応用例

定理 2 [Y.] (再掲)  
(Kawauchi の問題の部分的解決)

~~$4_1$  の  $(2, 1)$ -cable 結び目は非スライス~~



## 証明概要

~~$K = (4_1 \text{ の } (2, 1)\text{-cable 結び目}), q = 11, d = 199(\text{素数})$~~

~~$\implies \text{Tor } H_1(X_q; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d \oplus \mathbb{Z}/d,$~~

~~リンク形式  $\frac{1}{199} \begin{pmatrix} 23 & 121 \\ 121 & 23 \end{pmatrix}$~~

# 応用例

~~メタボライザーは  $M_1 = \langle (1, 137) \rangle, M_2 = \langle (1, 138) \rangle$ 。~~

~~$m_1 = (20, 153) \in M_1, m_2 = (55, 172) \in M_2$  をとり、~~

~~$\chi_1: \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d$  を  $x \mapsto d\text{lk}(m_1, x)$~~

~~$\chi_2: \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d$  を  $x \mapsto d\text{lk}(m_2, x)$~~

~~で定める。~~

~~このとき  $\text{Sign}(K, \chi_1) = \text{Sign}(K, \chi_2) = 2$  が計算される。~~

~~$\implies$  メタボライザー  $M_i$  に対して準同型~~

~~$\chi_i: \text{Tor}H_1(X_q; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/d$  で~~

~~「 $\chi_i(M_i) = \{0\}$  かつ  $\text{Sign}(K, \chi_i) \neq 0$ 」となるものが存在。~~

~~$\implies K$  はスライスではない。 ( $\because$  定理1)~~

# まとめ

- 捩れコホモロジー上の Milnor pairing の定式化した。  
さらに非退化性を示した。
- 捩れ Milnor pairing が結び目の非スライスであるための  
十分条件を与えることを示した（主定理）。
- 実際に  $4_1$  の  $(2, 1)$ -cable 結び目へ定理を適用し、  
計算機で符号数をみることで非スライス性を示した。

ご清聴ありがとうございました。

# まとめ

- 捩れコホモロジー上の Milnor pairing の定式化した。  
さらに非退化性を示した。
- 捩れ Milnor pairing が結び目の非スライスであるための  
十分条件を与えることを示した（主定理）。
- 実際に  $4_1$  の  $(2, 1)$ -cable 結び目へ定理を適用し、  
計算機で符号数をみることで非スライス性を示した。

ご清聴ありがとうございました。