四角形の切り貼りとその合同類

佐藤 史弥

東北大学 大学院情報科学研究科 村上研究室

2021 年 12 月 23 日

切り貼り

定理 (ボヤイ-ゲルビンの定理)

平面上の任意の多角形は有限回分割し組みなおすことで同じ面積の正方形を作ることが出来る.
すなわち, 面積が等しい多角形同士は有限回の分割で互いに移りあう.

定理 (デーンの定理)

正四面体を有限回分割して組みなおしても同じ体積の直方体を作ることは出来ない.

切り貼り

定理 (ボヤイ-ゲルビンの定理)

平面上の任意の多角形は有限回分割し組みなおすことで同じ面積の正方形を作ることが出来る.
すなわち, 面積が等しい多角形同士は有限回の分割で互いに移りあう.

切り貼り

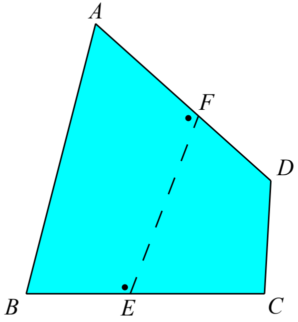
定理 (ボヤイ-ゲルビンの定理)

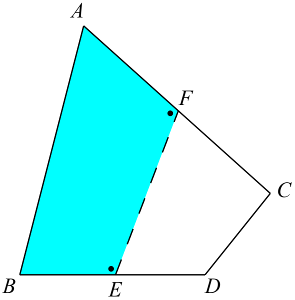
平面上の任意の多角形は有限回分割し組みなおすことで同じ面積の正方形を作ることが出来る.
すなわち, 面積が等しい多角形同士は有限回の分割で互いに移りあう.

◎外周の長さを保ったまま移りあうか

切り貼り

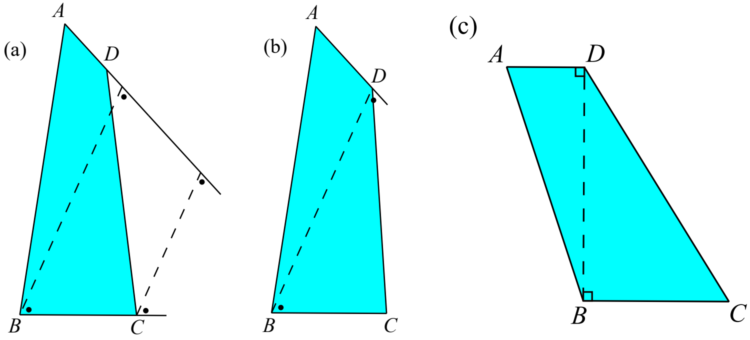
四角形 $ABCD$ において辺 BC 上の点 E と辺 AD 上の点 F を $\angle BEF = \angle AFE$ となるように取ることが出来るとき，線分 EF で四角形 $ABCD$ を 2 つに分割し，片方を裏返して貼りなおすことで新たな四角形 $ABDC$ が得られる．これを四角形の線分 EF による切り貼りという．また，切り貼りに使った線分 EF を切り取り線という．





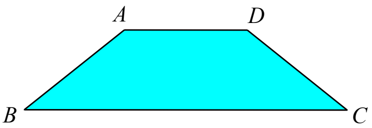
切り貼り

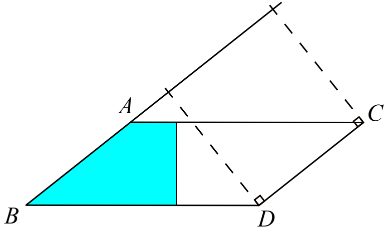
(前提 1) 切り貼りの出来ない四角形も存在する.
以下ではこれらの四角形を除くために, 切り取り線の両端を対辺の内分点 (頂点を除く) に取ることが出来る四角形のみを考えるものとする.



切り貼り

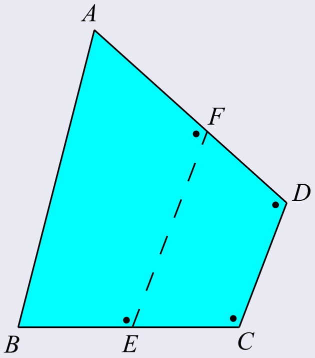
(前提 1) 四角形 $ABCD$ が上の条件に当てはまる四角形であっても, 切り貼りを施して得られた四角形 $ABDC$ や四角形 $ACBD$ が上の条件に当てはまらないこともある.

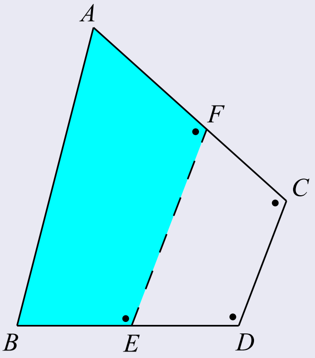




補題

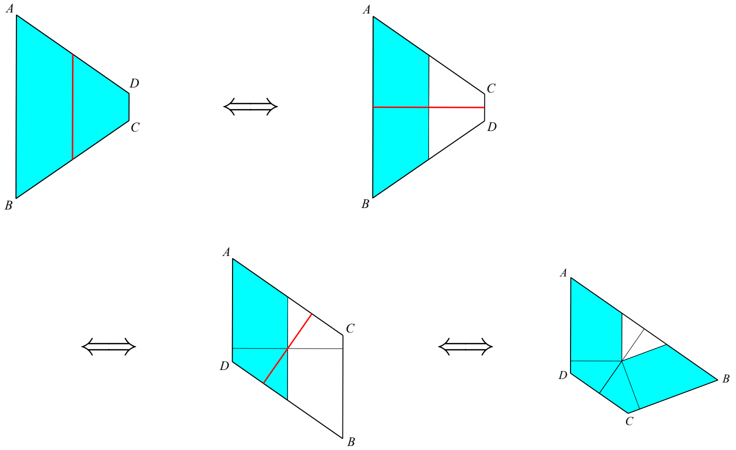
$\angle C$ と $\angle D$ の大きさが等しい四角形 $ABCD$ において，線分 EF による切り貼りを施して得られる四角形 $ABDC$ は四角形 $ABCD$ と合同である．





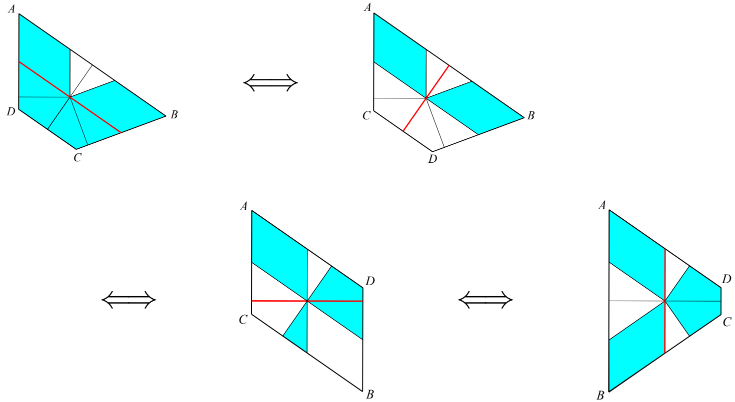
系．3 つの角の大きさが等しい四角形に切り貼りを何回施しても得られる四角形は変わらない．

等脚台形と平行四辺形



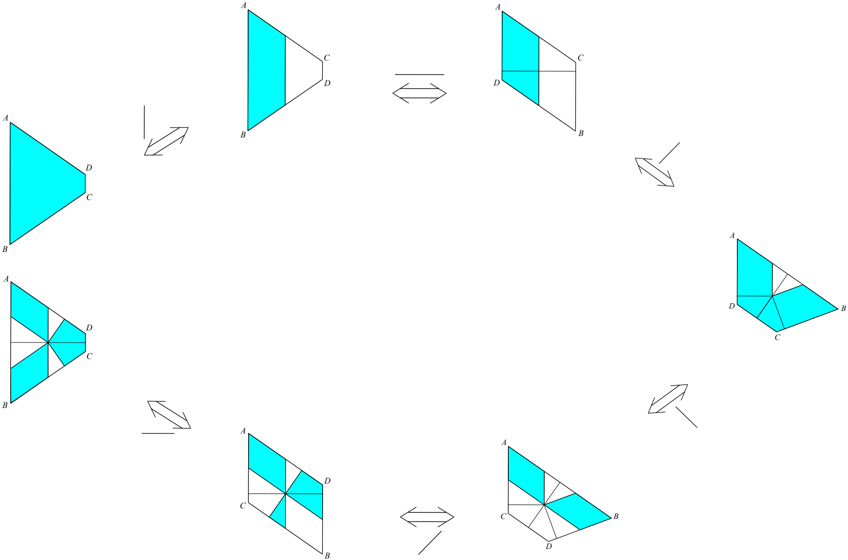
※ 四角形は, 4 組の角がそれぞれ等しく, 外周の長さおよび面積が等しくても合同であるとは限らない.

等脚台形と平行四辺形

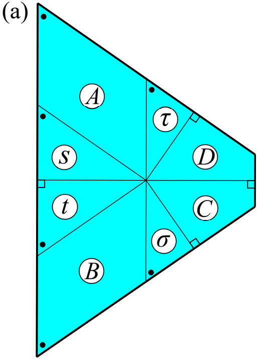


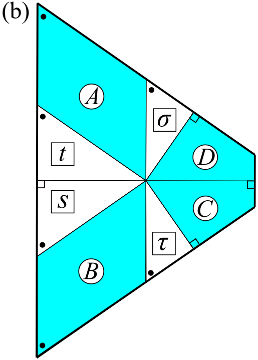
7 回目の切り貼り (右下の図の次の切り貼り) は 1 回目の切り貼りと同じである.

等脚台形と平行四辺形

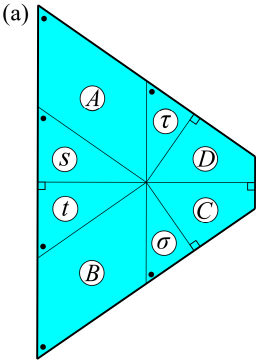


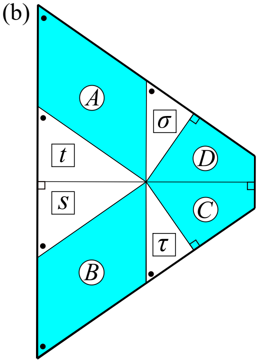
等脚台形と平行四辺形





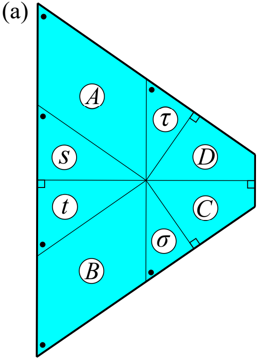
等脚台形と平行四辺形

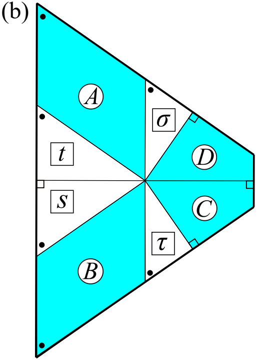




もう 1 周 (6 回) の切り貼りを行えば, 三角形が元の位置に戻る.

等脚台形と平行四辺形

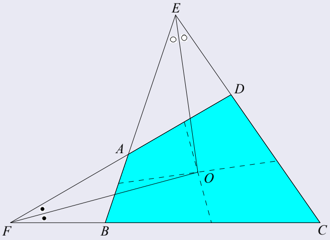


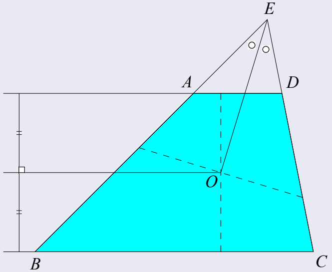


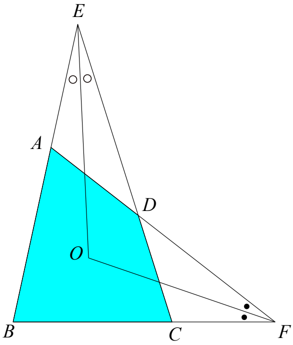
もう 1 周 (6 回) の切り貼りを行えば, 三角形が元の位置に戻る.
→ もとの台形から見ると, 全ての面を表に戻すには, 2 周（12 回）の切り貼りが必要.

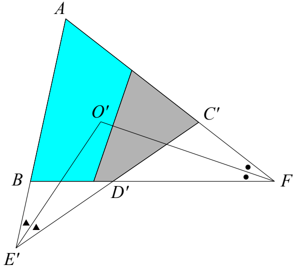
定義

どの対辺の組も平行でない四角形 $ABCD$ に対し，直線 AB と直線 CD の交点を E, 直線 AD と直線 BC の交点を F とする．このとき，$\angle E$ の二等分線と $\angle F$ の二等分線の交点 O を（切り貼りの）**基準点**という．
AB と CD が平行であるときは，それぞれの直線上の点を両端に持つ垂線を引き，その垂線の垂直二等分線を $\angle E$ の二等分線の代わりに用いる．AD と BC が平行であるときも同様である．



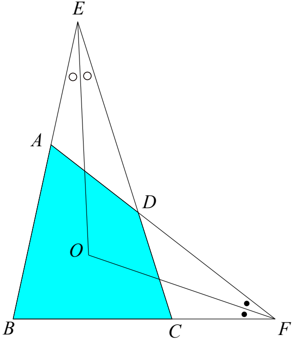


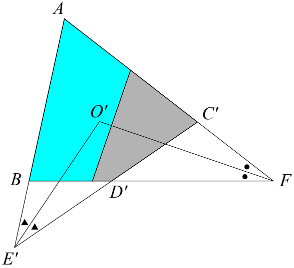

E
A
D
O
B
C
F


A
O′
C′
B
F
D′
E′

命題

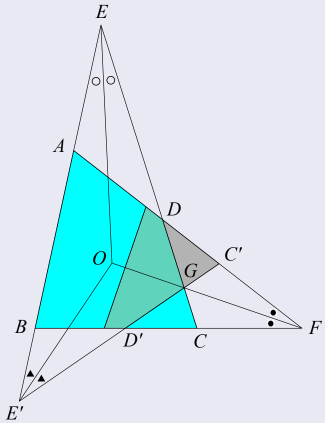
四角形に切り貼りを施し, 新たな四角形を得たとする. このとき, 切り貼りで裏返さなかった方の図形が一致するように 2 つの四角形を重ねると, それぞれの基準点も同じ位置で重なる.





命題

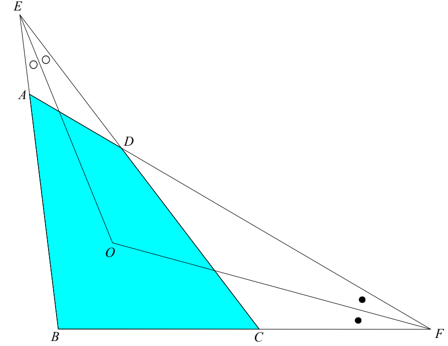
四角形に切り貼りを施し，新たな四角形を得たとする．このとき，切り貼りで裏返さなかった方の図形が一致するように 2 つの四角形を重ねると，それぞれの基準点も同じ位置で重なる．



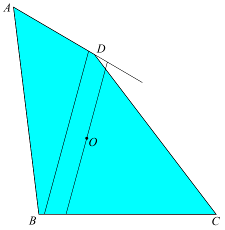
基準点

(前提 2) 図の四角形 $ABCD$ は切り貼りは出来るが, 基準点での切り貼りは出来ない四角形である. 以下では基準点を通る切り取り線が対辺それぞれの内分点 (頂点を除く) を通る四角形のみを考えるものとする.

(a)



(b)



四角形の分類

切り貼りを繰り返し施すと四角形は $ABCD$, $ABDC$, $ADBC$, $ADCB$, $ACDB$, $ACBD$, $ABCD$... の順に移り合う.
$\rightarrow \angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D$ となる四角形 $ABCD$ を代表元に出来る.

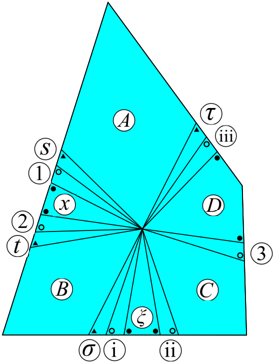
切り取り線の角度の候補となるのは $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ のうち 2 つの和の平均である (全部で 6 通り).
$\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D$ のとき

- $\angle A + \angle B \leq \angle A + \angle C \leq \pi \leq \angle B + \angle D \leq \angle C + \angle D$
- $\angle A + \angle C \leq \angle A + \angle D \leq \angle B + \angle D$
- $\angle A + \angle C \leq \angle B + \angle C \leq \angle B + \angle D$

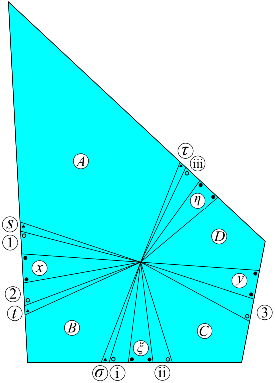
$\rightarrow$$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ の大小関係の等号/不等号と
$\angle A + \angle D$ と $\angle B + \angle C$ の大小関係を考えれば分類が出来る.

四角形の分類

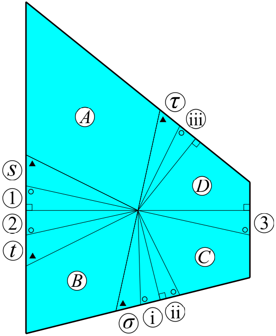
◎ $\angle A < \angle B < \angle C < \angle D$ を満たす四角形は 3 パターンに分かれる.



(1)$\angle A + \angle D > \angle B + \angle C$

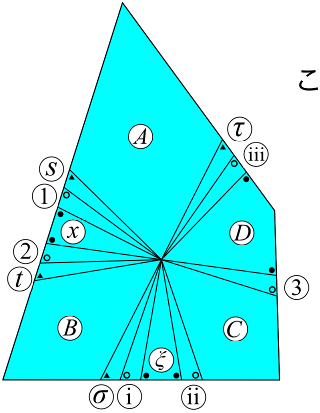


(2)$\angle A + \angle D < \angle B + \angle C$



(3)$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$

パターン 1

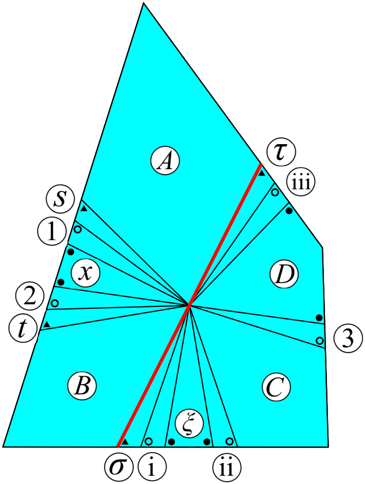


- $\angle A + \angle D > \angle B + \angle C$
- $\blacktriangle = \frac{\angle A + \angle B}{2} < \circ = \frac{\angle A + \angle C}{2} < \bullet = \frac{\angle B + \angle C}{2}$

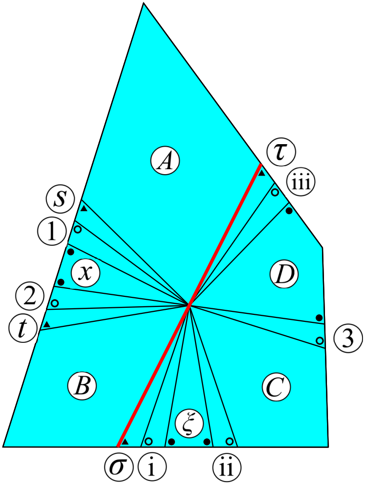
このとき

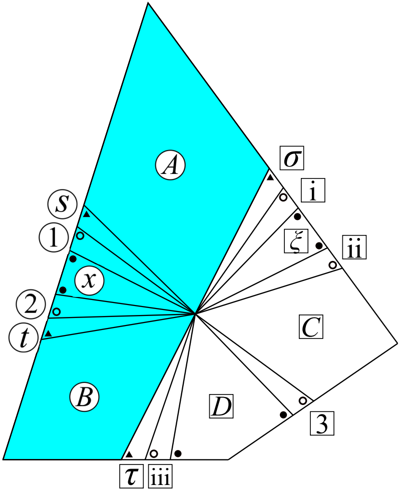
- 三角形 s と t は合同
- 三角形 σ と τ は合同
- 三角形 1, 2, 3 は合同
- 三角形 i, ii, iii は合同
- 三角形 s と σ は相似
- 三角形 1 と i は相似
- 三角形 x と ξ は相似 (二等辺三角形)

パターン 1(切り貼り 1 回目)

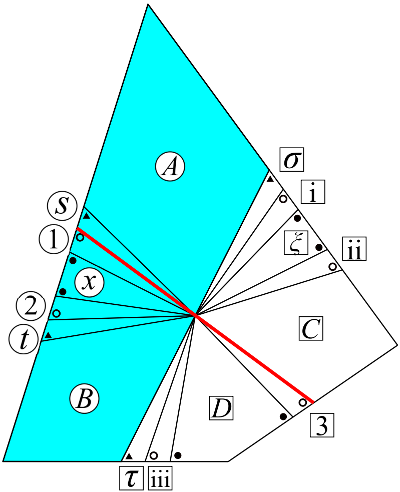


パターン 1(切り貼り 1 回目)

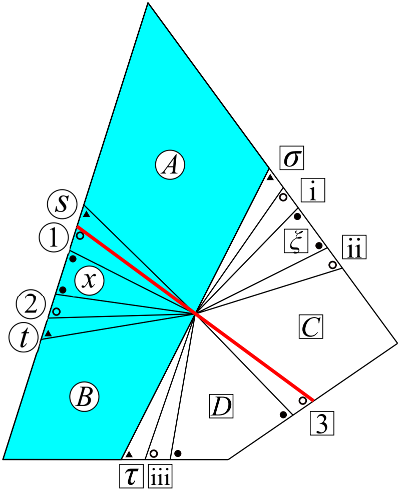


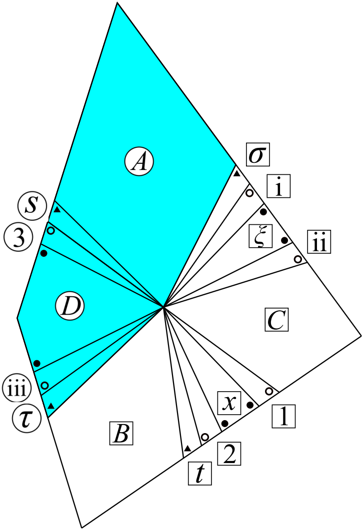


パターン 1(切り貼り 2 回目)

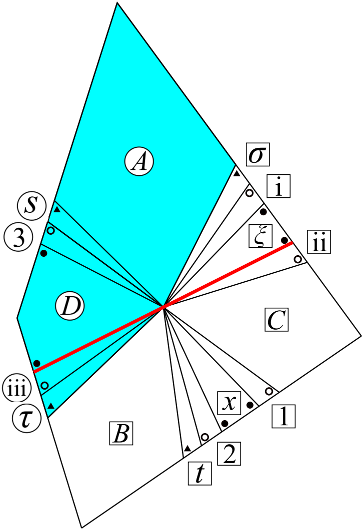


パターン 1(切り貼り 2 回目)

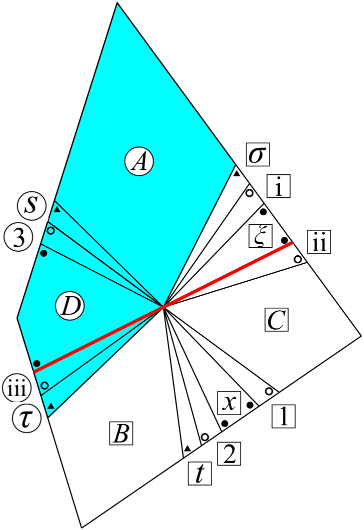


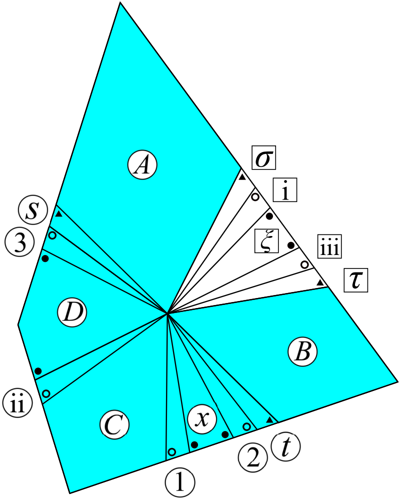


パターン 1(切り貼り 3 回目)

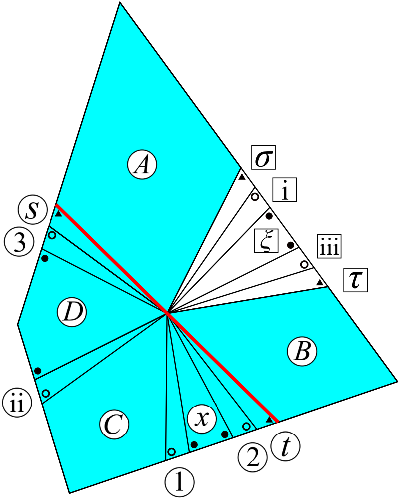


パターン 1(切り貼り 3 回目)

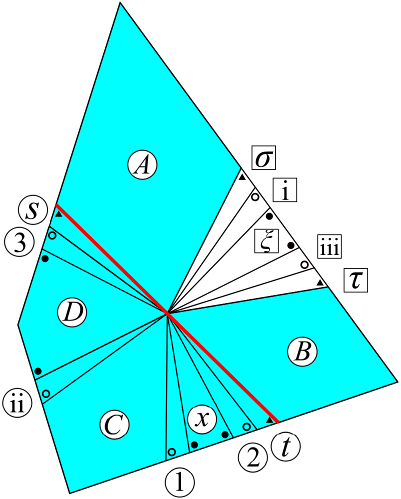


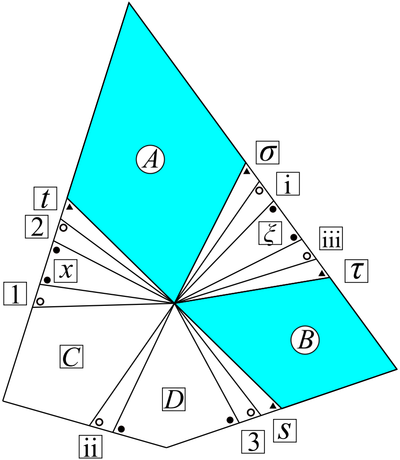


パターン 1(切り貼り 4 回目)

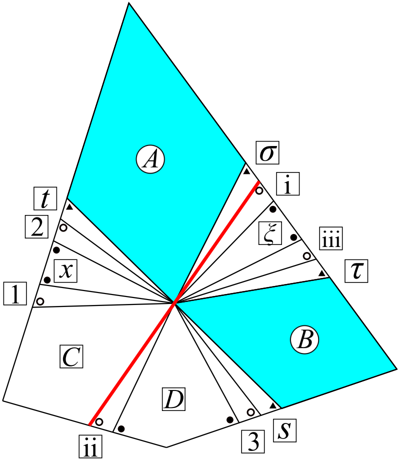


パターン 1(切り貼り 4 回目)

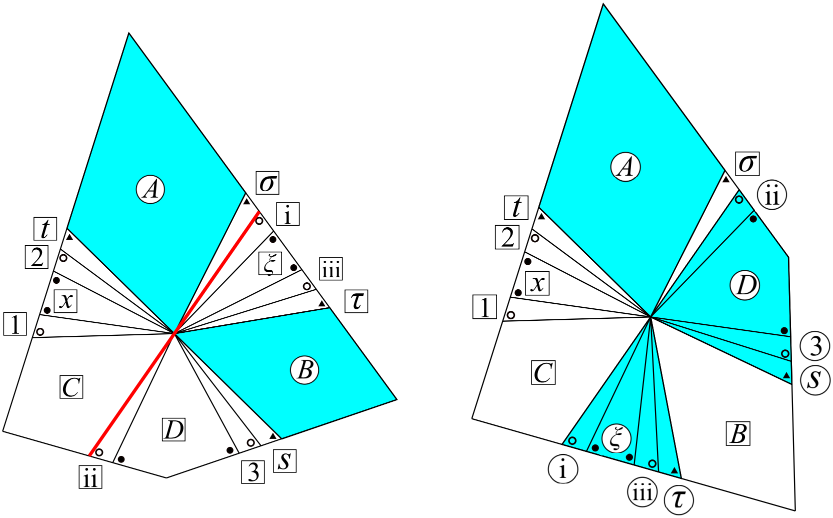




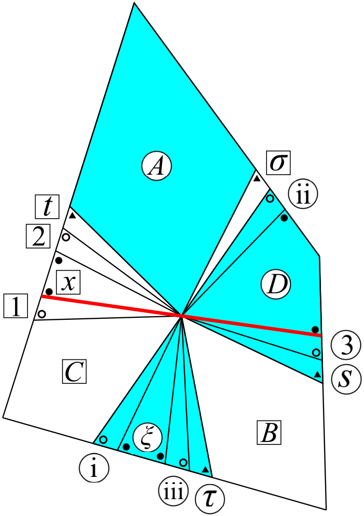
パターン 1(切り貼り 5 回目)



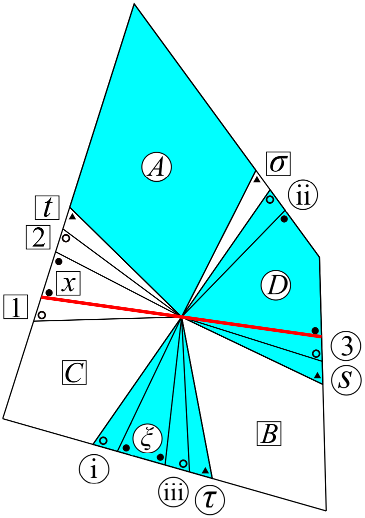
パターン 1(切り貼り 5 回目)

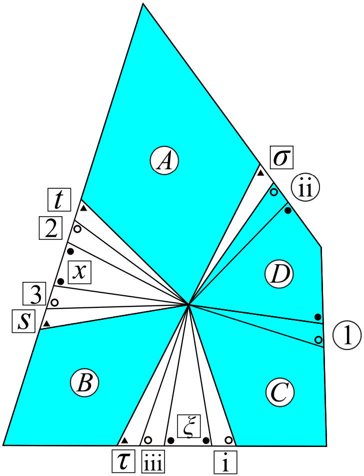


パターン 1(切り貼り 6 回目)

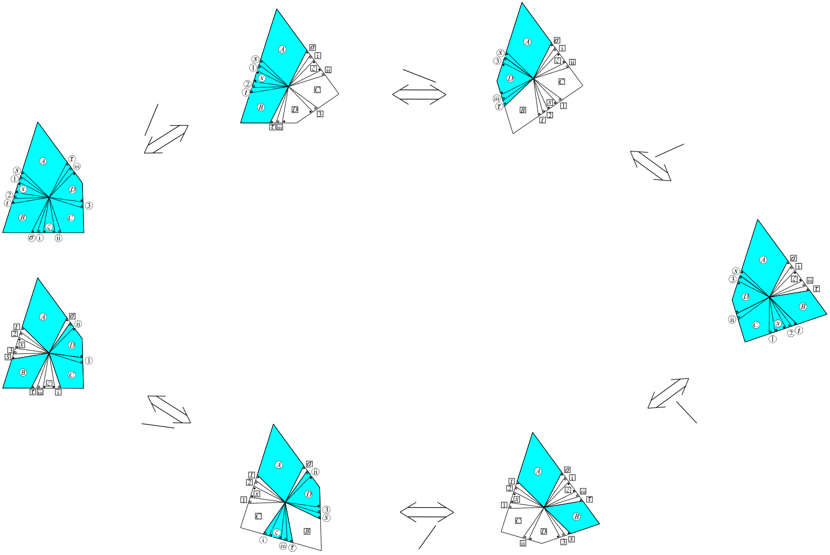


パターン 1(切り貼り 6 回目)

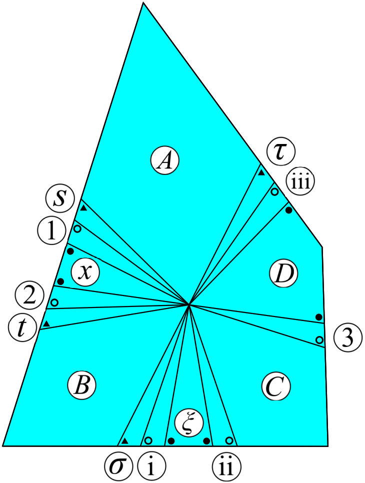


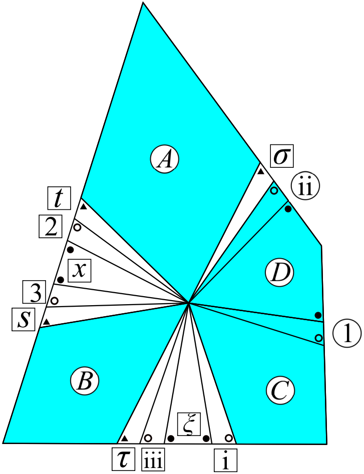


パターン 1

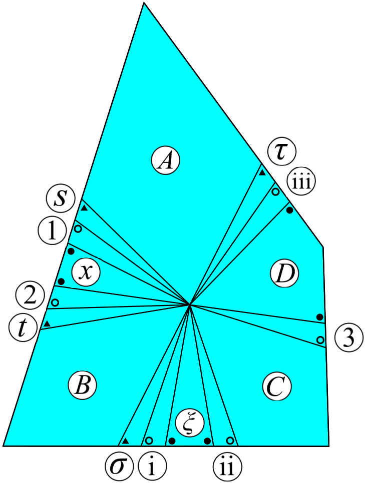


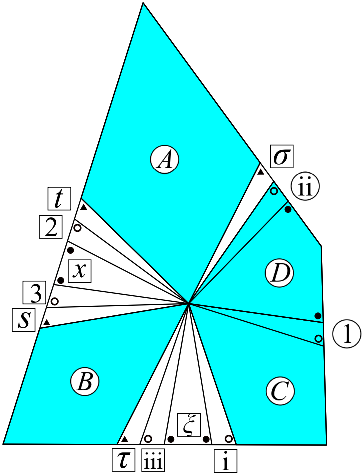
パターン 1





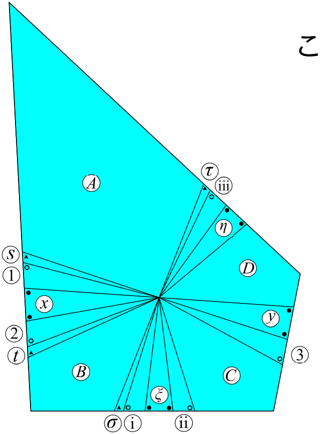
パターン 1





全ての面を表に戻すには, 6 周（36 回）の切り貼りが必要.

パターン 2

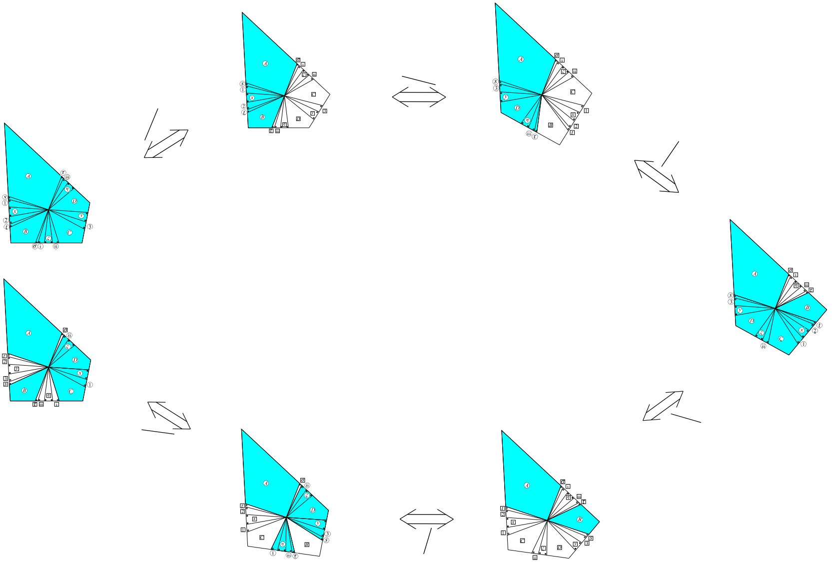


- $\angle A + \angle D < \angle B + \angle C$
- $\blacktriangle = \frac{\angle A + \angle B}{2} < \circ = \frac{\angle A + \angle C}{2} < \bullet = \frac{\angle A + \angle D}{2}$

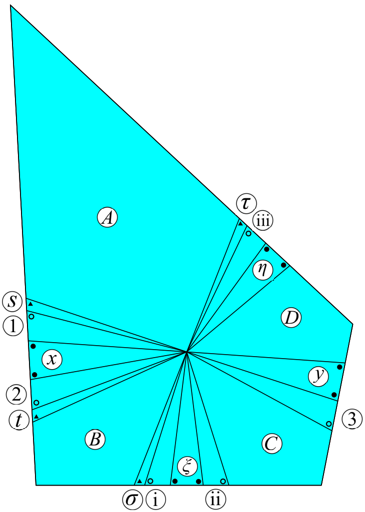
このとき

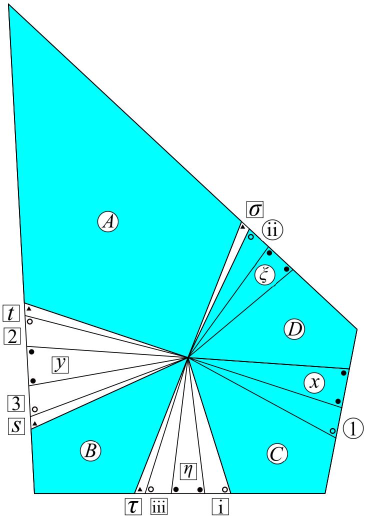
- 三角形 s と t は合同
- 三角形 σ と τ は合同
- 三角形 1, 2, 3 は合同
- 三角形 i, ii, iii は合同
- 三角形 x と y は合同 (二等辺三角形)
- 三角形 ξ と η は合同 (二等辺三角形)
- 三角形 s と σ は相似
- 三角形 1 と i は相似
- 三角形 x と ξ は相似

パターン 2

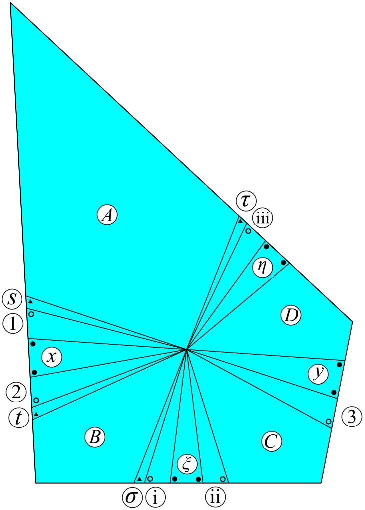


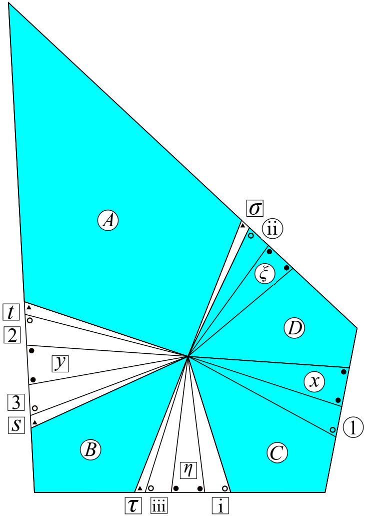
パターン 2





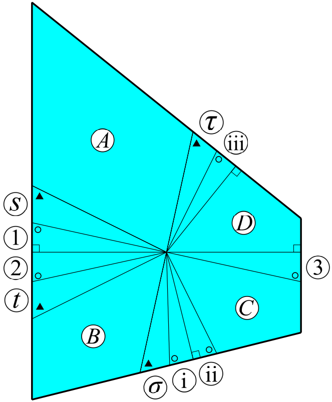
パターン 2





全ての面を表に戻すには, 12 周（72 回）の切り貼りが必要.

パターン 3(台形)

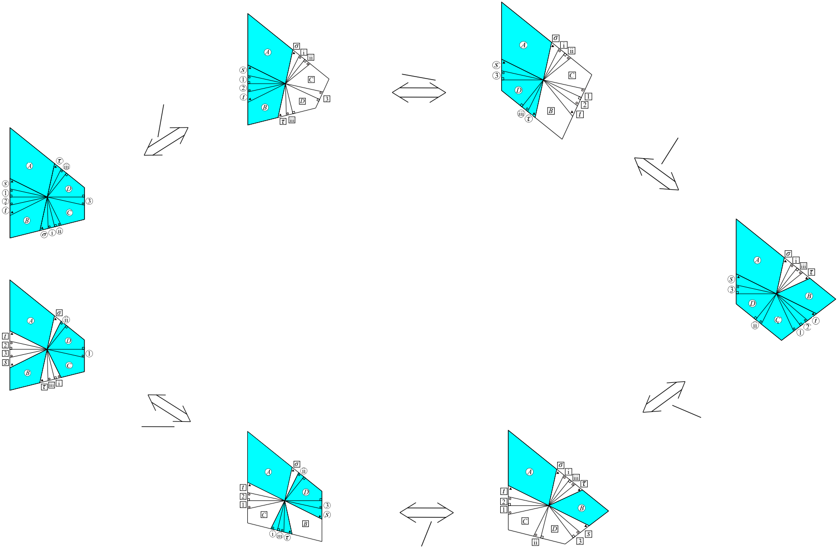


- $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$
- $\blacktriangle = \frac{\angle A + \angle B}{2} < \circ = \frac{\angle A + \angle C}{2}$

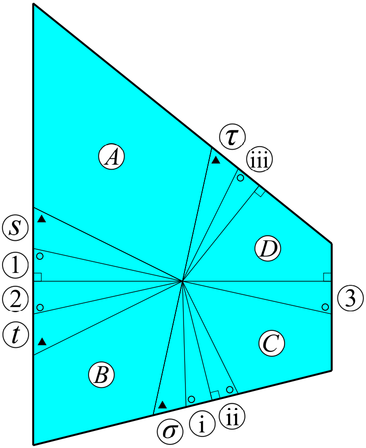
このとき

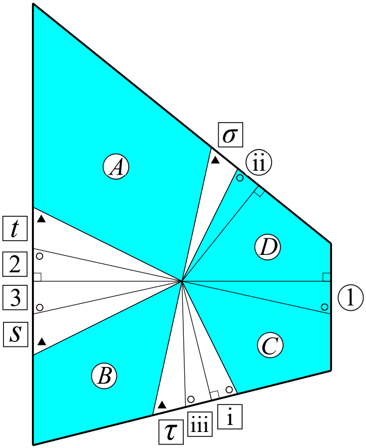
- 三角形 s と t は合同
- 三角形 σ と τ は合同
- 三角形 1, 2, 3 は合同
- 三角形 i, ii, iii は合同
- 三角形 s と σ は相似
- 三角形 1 と i は相似

パターン 3(台形)

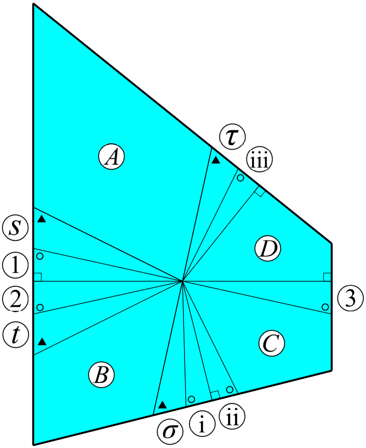


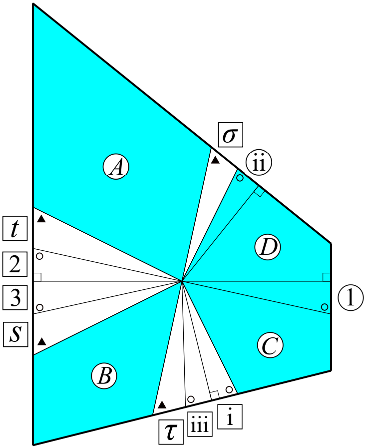
パターン 3(台形)





パターン 3(台形)





全ての面を表に戻すには, 6 周（36 回）の切り貼りが必要.

まとめ

- 角の大きさがすべて異なる四角形は, 裏表の区別をつけなければ 6 回の切り貼りで循環する.
- しかし, 裏表の区別をつけると全ての面が表に戻るまでに必要な切り貼りの回数は変わってしまう.
- 同じ大きさの角を持つ四角形は, パターン 1, 2, 3 のどれかが退化した切り貼りとなる.

今後の展望

- 前提 1 や前提 2 を満たすための条件は何か.
- 前提 2 を満たさない四角形も 6 回の切り貼りで循環するのか.
- 他の多角形に切り貼りを施すとどうなるか.
- 面積と外周が等しい多角形は外周を保ったまま有限回の分割で移り合うか.