8 交点以下の非ファイバー結び目の Heegaard 分解と Milnor ペアリング

大倉　拓実
（東京工業大学理学院）
ohkura.t.ac@m.titech.ac.jp

概要

【動機】

結び目の基本群における Lin の表示の例をたくさん与えたい。

群表示の一種。Wirtinger表示とは別の表示法。

【背景】

・Lin表示はコホモロジー環の記述に相性が良い。(Wirtinger表示だと相性が悪い)

・にも関わらず計算例が少ない。

・特に非ファイバー結び目は計算例が少ない。

これを多く含む族で、Lin表示が解るものを見つければ良いのでは？

概要

【手法】

「ひねり付きプレッツェル結び目」という族を導入し、

その族に対して Lin表示 を計算するアルゴリズムを与える。

【結果】

8交点以下の非ファイバー結び目の Linの表示 をすべて計算した.

【応用】

〃 の Milnorペアリング も全て計算できた.

目次

1　Linの表示

2　ひねり付きプレッツェル結び目

3　Milnorペアリング

1　Linの表示

1-1 定義の確認

定義 (スパイン)

S^3上の向き付けられた結び目 K のSeifert曲面 F

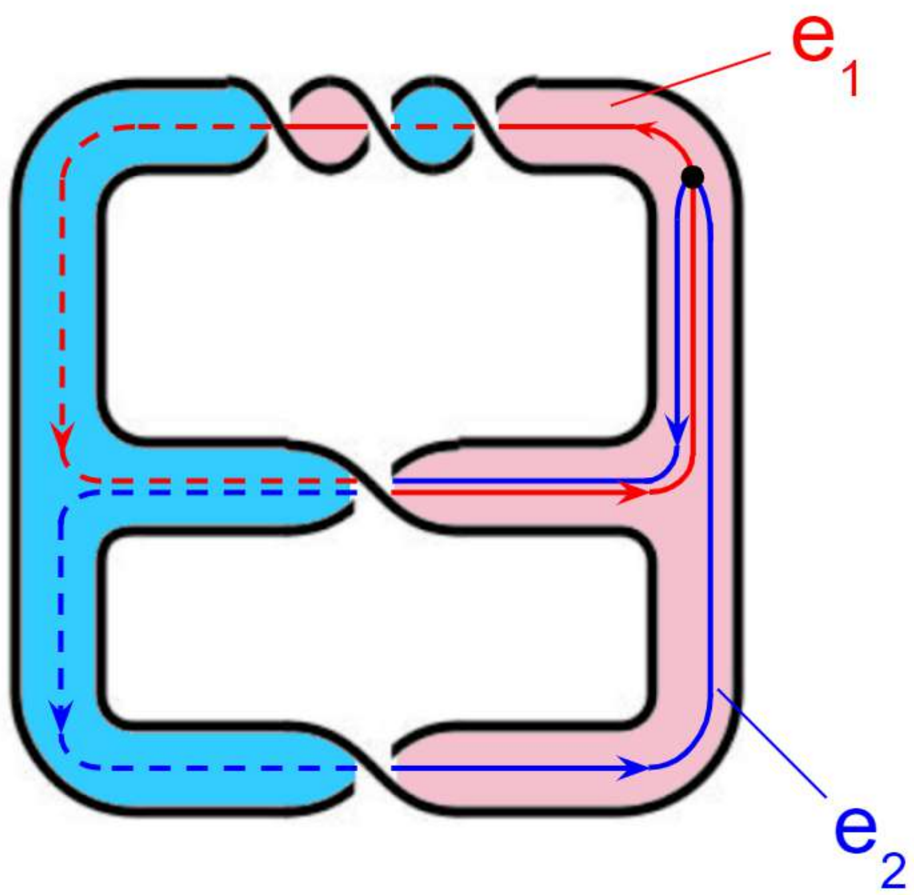
に対し、Fに埋め込まれたブーケで、

Fに変位レトラクトなものを

「Fの **スパイン** 」と呼ぶ。

いくつかのサークル e_i を

一つの基点 ＊ で同一視したもの



例：5_2のスパイン

1-1 定義の確認

- $W = \bigvee_{i=1}^{2g} e_i$ をFのスパインとし, Fのカラー近傍F×[-1,1]に対して

$W^{\pm} := W \times \{\pm 1\}, e_i^{\pm} := e_i \times \{\pm 1\}$ を定義しておく。

- Fの管状開近傍N(F)について、S^3\N(F) は種数 2g のハンドル体である。

(∵ π_1(S^3\N(F)) は階数 2g の自由群)

定義 (双対語)

各 e_i^+, e_i^- を π_1(S^3\N(F)) の生成元 $x_1,\ldots,x_{2g}$ で表した語 y_i, z_i

のことを「(スパイン W の誘導する)**双対語**」と呼ぶ。

1-1 定義の確認

補題 [Lin, Trotter]

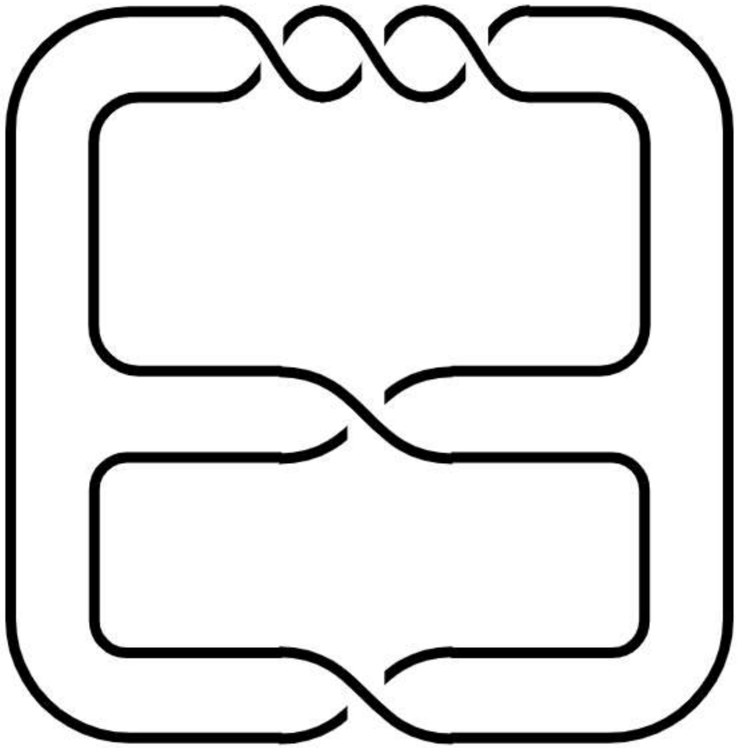
$$\pi_1(S^3\backslash K) \cong \langle x_1, x_2, ..., x_{2g}, h \mid r_i := hy_ih^{-1}z_i^{-1} \quad (i = 1, 2, ..., 2g)\rangle.$$

（※ hはKのメリディアンを表す$\pi_1(S^3\backslash K)$ の生成元）

双対語を用いれば、Wirtingerとは別の方法で結び目群を表示できる。

これを結び目群のHeegaard分解もしくは**Linの表示**と呼ぶ。

1-2 実際に 5_2 のLinの表示を求めてみる



$5_2 = P(3,1,1)$ の図式

【手順】

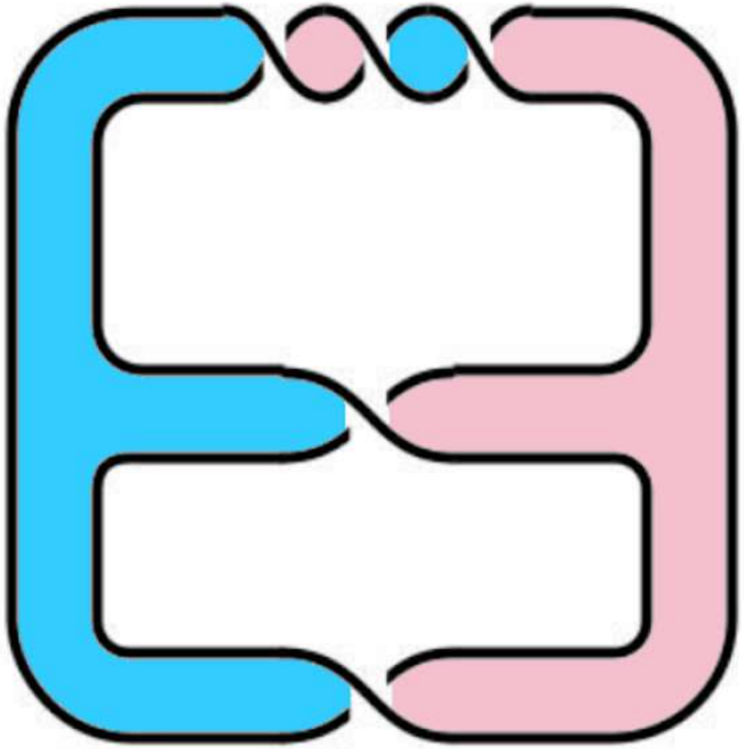
①Seifert曲面Fをとる。スパインWもとる。

②カラー近傍F×[-1,1]を構成。W×{±1}も構成。

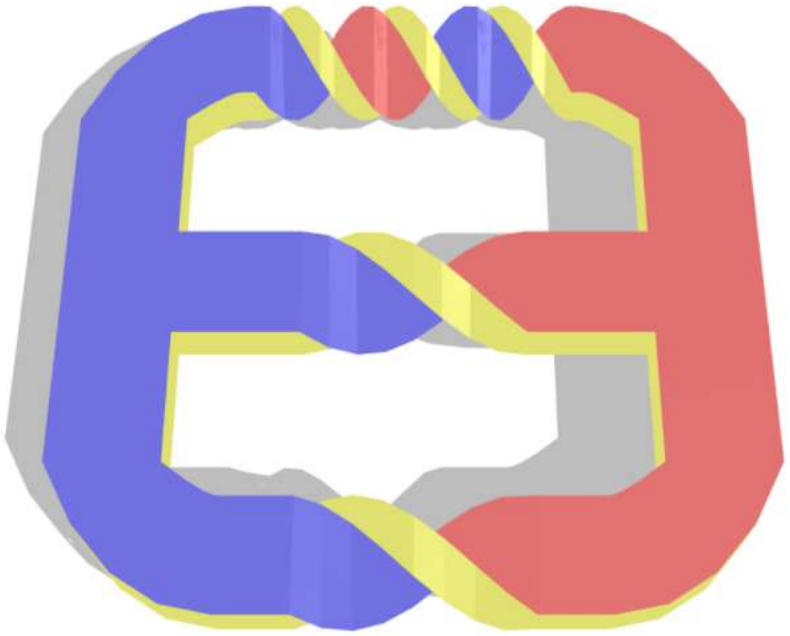
③$\pi_1(S^3/N(F))$の生成元x_1,x_2で、
W^+, W^-の各ループを表記する。

④ ↑で得た双対語でLinの表示を得る

1-2 実際に 5_2 のLinの表示を求めてみる

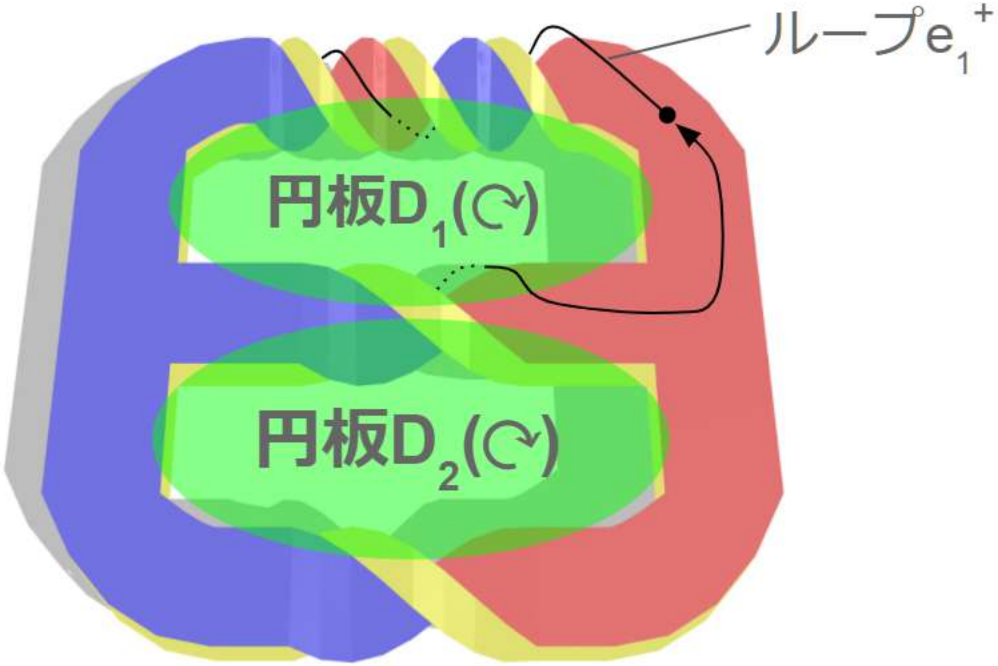


5_2のSeifert曲面F



Fのカラー近傍

1-2 実際に 5_2 のLinの表示を求めてみる



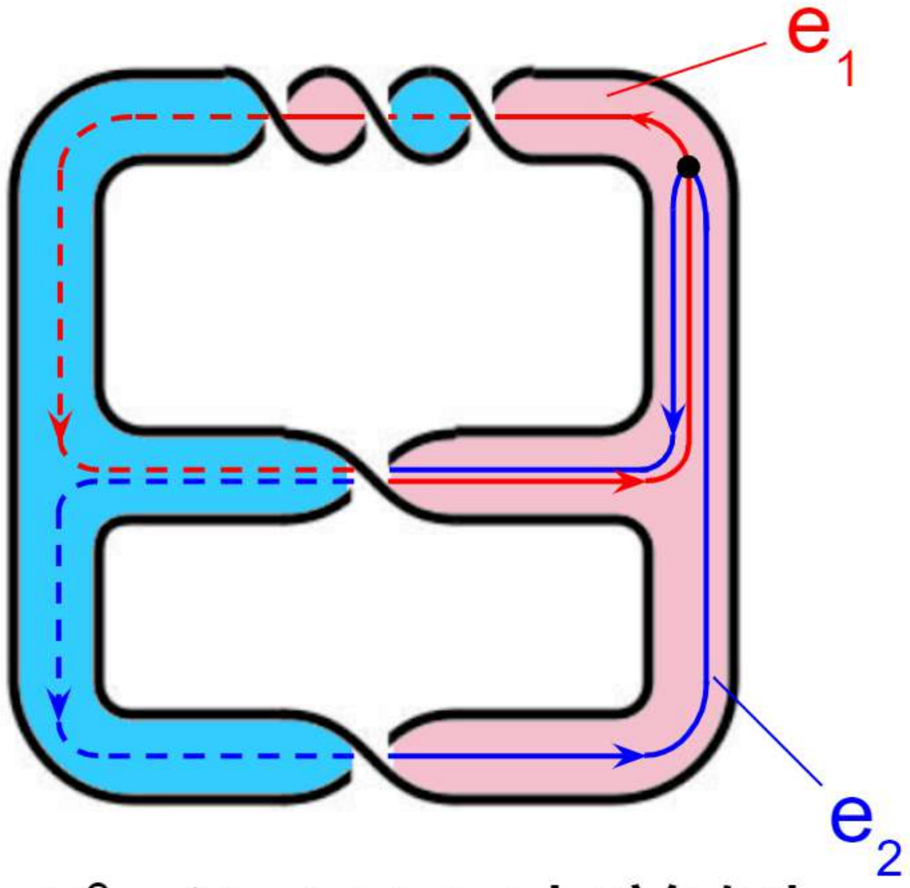
例えばループe_1^+は、
円板D_1を負の向きに
2回通過する

↓

$$\mathbf{y_1 = x_1^{-2}}$$

双対語の計算方法

1-2 実際に 5_2 のLinの表示を求めてみる



スパインWの定義例

左図からの双対語は次の通り：

$y_1 = x_1^{-2}$, $y_2 = x_1 x_2^{-1}$

$z_1 = x_1^{-2} x_2$, $z_2 = x_2^{-1}$

Linの表示は次の通り：

$$\pi_1(S^3/5_2) = \langle x_1, x_2, h \mid h x_1^{-2} = x_1^{-2} x_2 h,\ h x_1 x_2^{-1} = x_1^{-1} h \rangle$$

1-3　まとめ

・Linの表示の定義を確認した

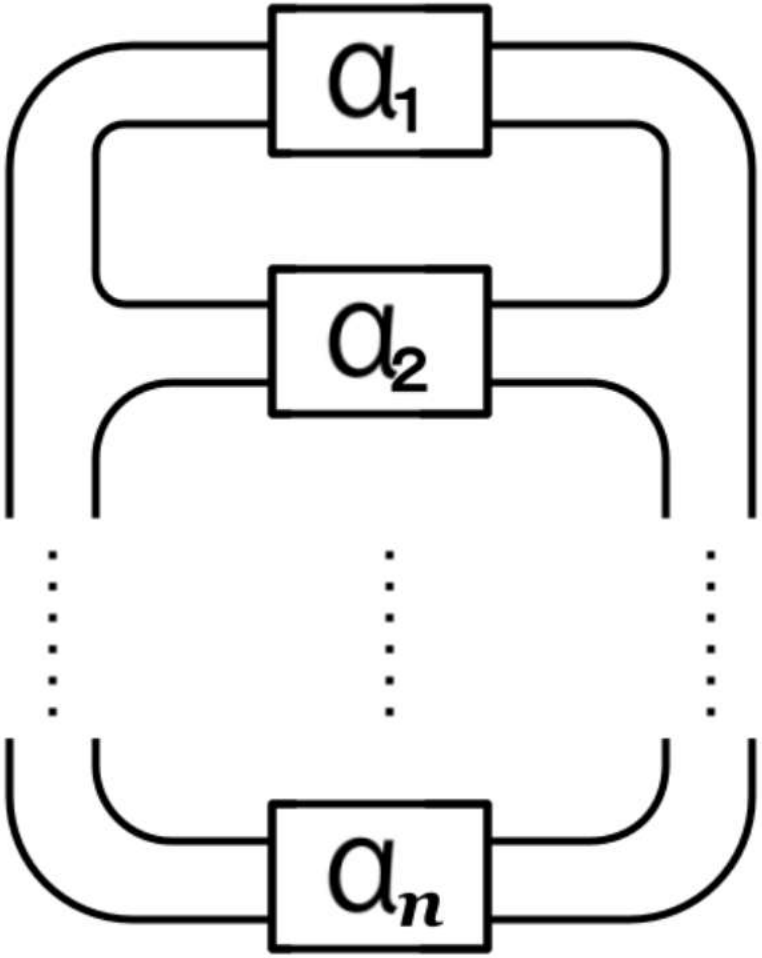
・図式にスパインを書き込めばなんとか計算できる

・多くの計算例を一気に得る方法が欲しい

2　ひねり付き
プレッツェル
結び目

2-1 ひねり付きプレッツェル結び目の定義

右図のような図式の結び目を
「プレッツェル結び目」と呼び、
P(a_1,a_2,…,a_n)と表記するのだった。

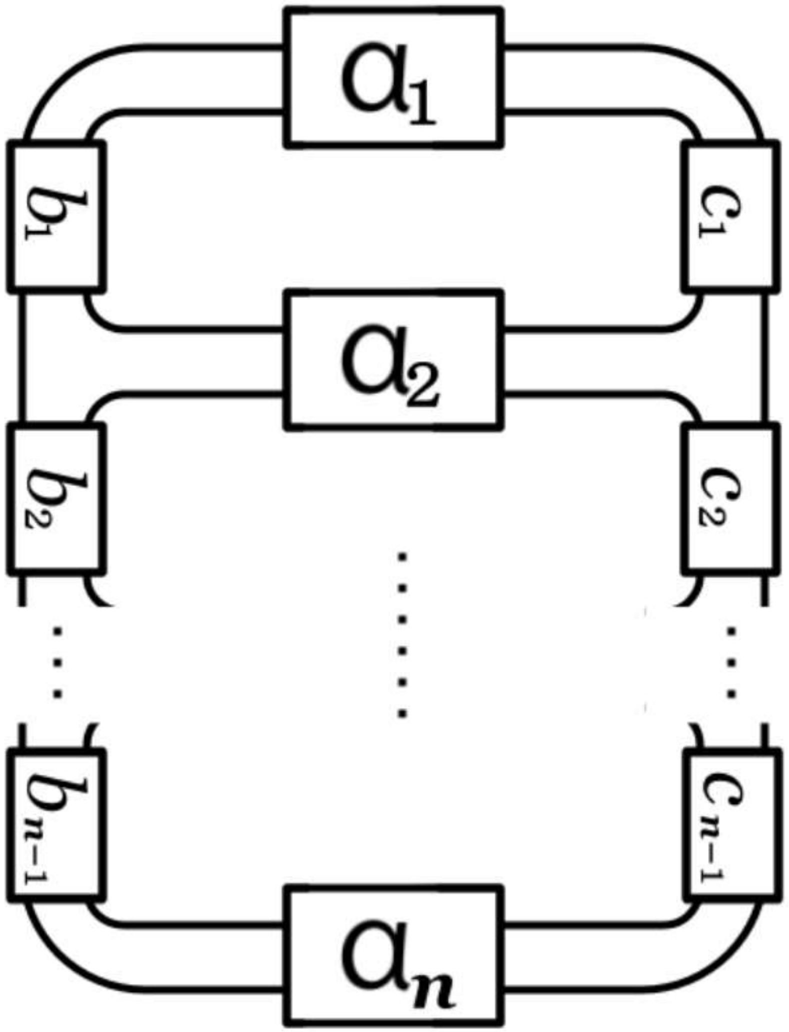


※整数a_iはa_i-half twist を意味する。

2-1 ひねり付きプレッツェル結び目の定義

ひねる部分を追加し、
「ひねり付きプレッツェル結び目」
を考える。

表記法：$\mathbf{P(a_{1(b_1,c_1)}a_{2(b_2,c_2)}\cdots_{(b_{n-1},c_{n-1})}a_n)}$



2-2 ひねり付きプレッツェル結び目の双対語

主定理1 (双対語の一般式)

ひねり付きプレッツェル結び目 $P(a_{1(b_1,c_1)}a_{2(b_2,c_2)}\cdots{}_{(b_{n-1},c_{n-1})}a_n)$

に対し右図のようにスパインがとれるとき、

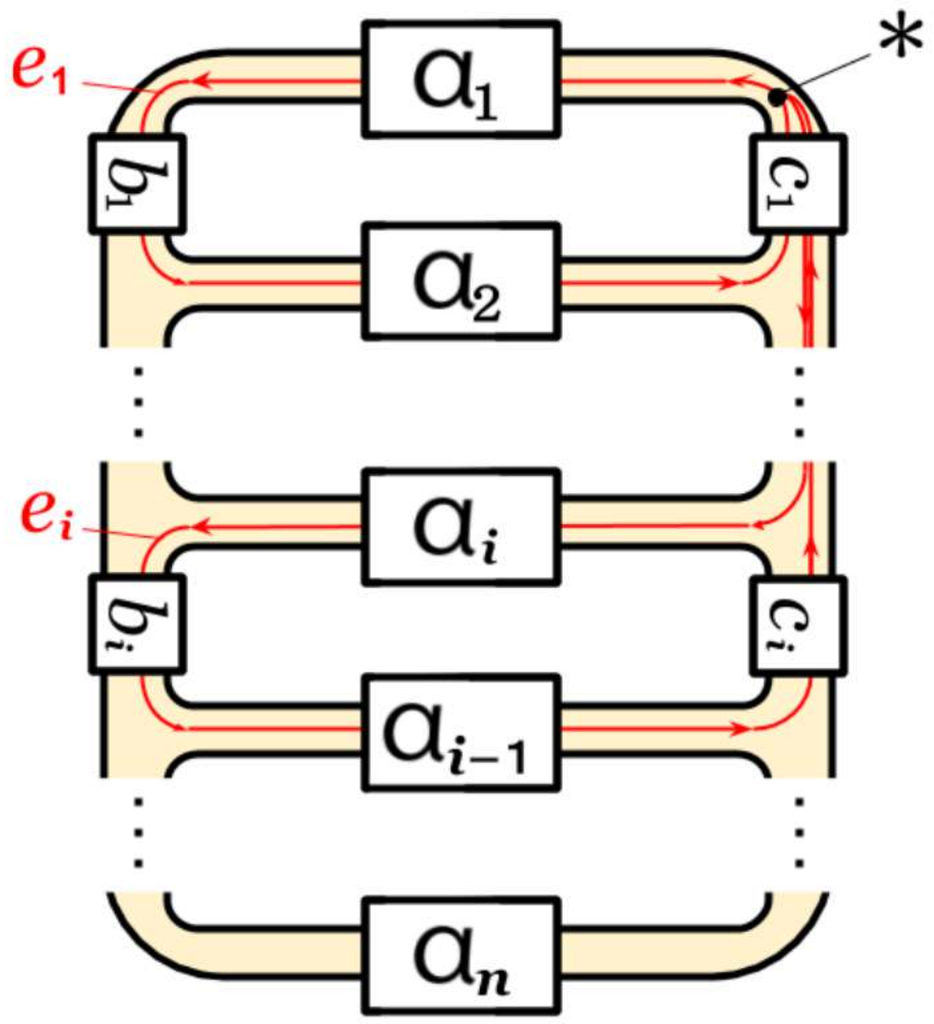
$$\begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \left(\mathop{\bigcirc}_{j=0}^{i-1} \left(J^{d_{j-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ 1^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \circ \left(J^{d_{i-1}} \begin{pmatrix} 0 & x_{i-1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\circ \left(J^{d_{i-1}+a_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{b_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \circ \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i} \begin{pmatrix} 0 & x_{i+1} \\ x_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{a_{i+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\circ \left(\mathop{\bigcirc}_{k=0}^{i-1} \left(J^{d_{i-1}+a_i+b_i+a_{i+1}+(d_i-d_{i-k})} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{i-k}^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{c_{i-k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right).$$

ただし $d_m := \sum_{j=0}^{m} c_j$, $c_0 := 0$, $x_0 := 1$, $c_n := 1$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$V_i := \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ に対し, $\mathop{\bigcirc}_{i=1}^{n} V_i := V_1 \circ V_2 \circ \cdots \circ V_n := \begin{pmatrix} u_1 u_2 \cdots u_n \\ v_1 v_2 \cdots v_n \end{pmatrix}$



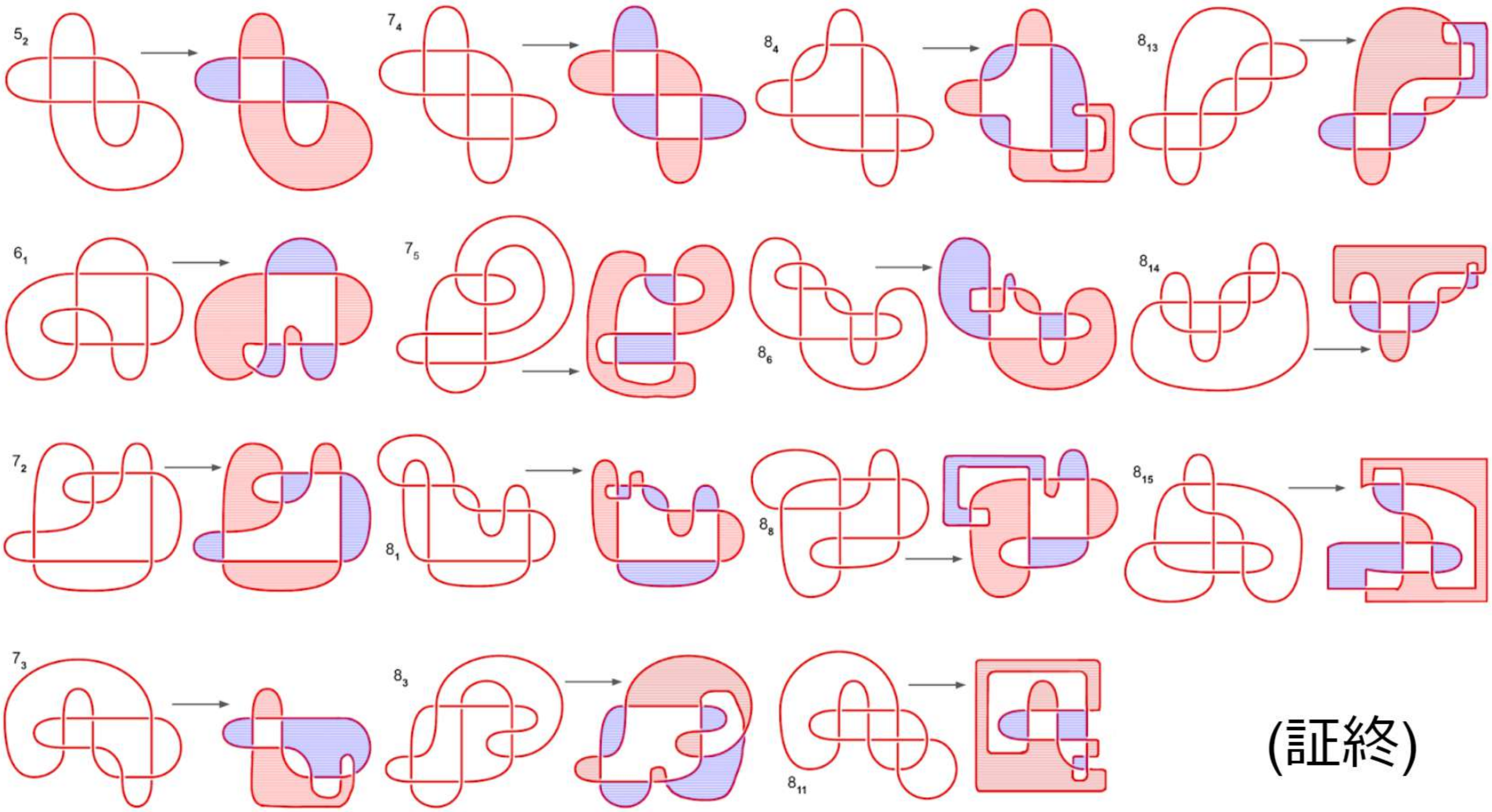
2-3 なぜひねり付きプレッツェルを考えたか？

8交点以下の非ファイバー結び目はすべて

ひねり付きプレッツェル結び目だから。

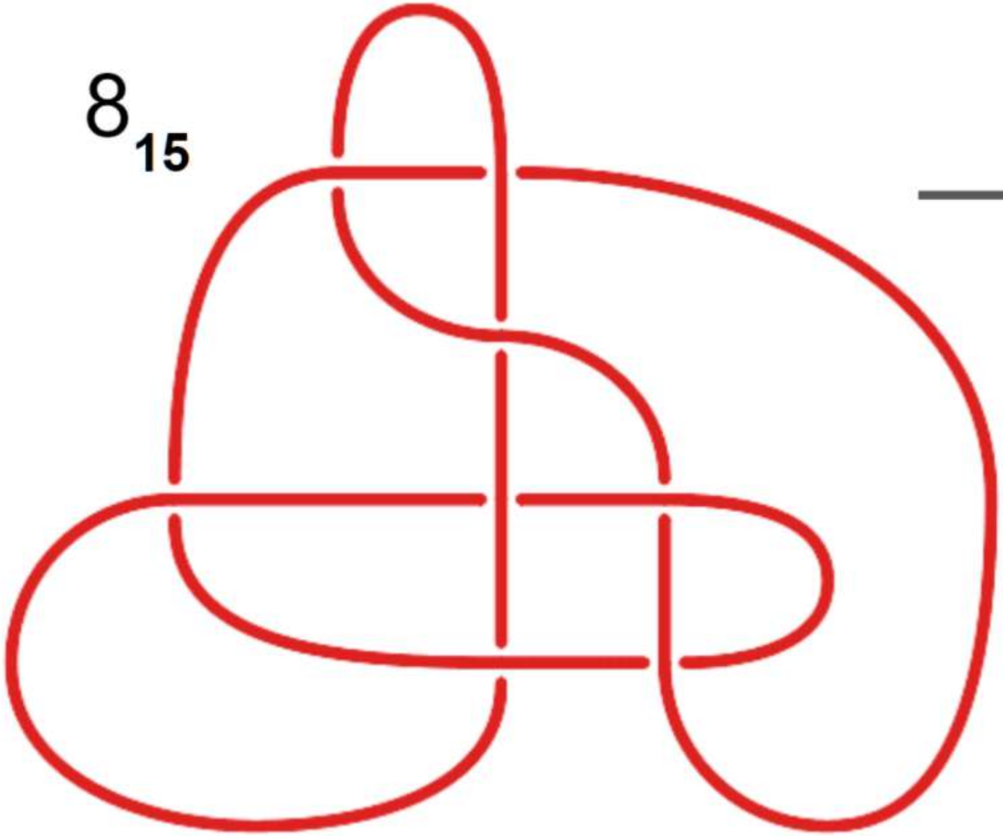
(Reidemeister移動を使って証明できる)

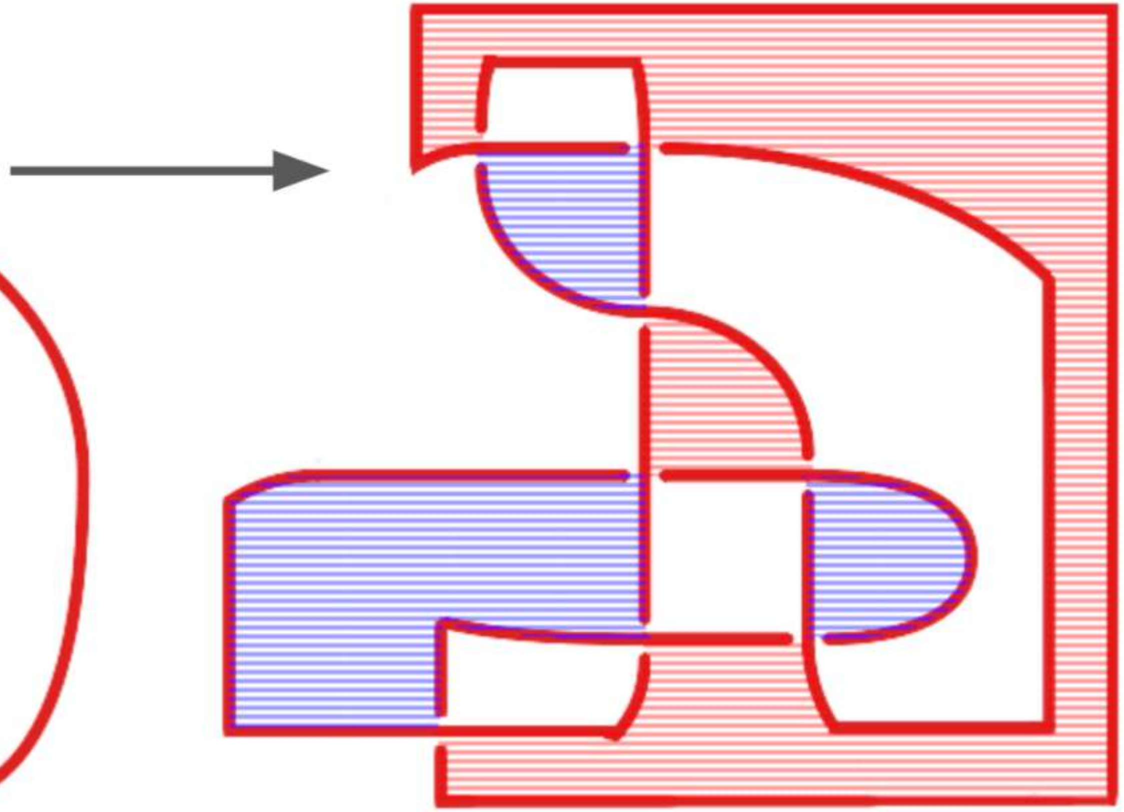
2-3 なぜひねり付きプレッツェルを考えたか？



(証終)

2-3 なぜひねり付きプレッツェルを考えたか？





2-4　まとめ

・8交点以下の非ファイバーは全部ひねり付きプレッツェル

↓

・ひねりつきプレッツェル結び目には双対語の一般式がある

↓

・よって8交点以下の非ファイバーのLin表示は全部計算できる

(した)

3 Milnorペアリング

3-1　Milnorペアリングとは

定義の前に...

【Milnorペアリングを研究する動機】

・結び目の符号数などをMilnorペアリングから計算できる。

・”Blanchfieldペアリング” から再現可能。

またBlanchfieldペアリングorザイフェルト行列から計算する公式も存在する。

・にも関わらず、8交点以下ですら計算例がほぼ無かった。

ひねり付きプレッツェルで計算出来れば
8交点以下の非ファイバーすべてで計算できる

3-1　Milnorペアリングとは

M : 連結,oriented,smoothな閉3d-mfd

$\widetilde{M}$: 全射準同型 $\alpha : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ に付随する巡回被覆空間

定理 [Milnor]

$\mathbb{Q}$ を有理数体とする．$\widetilde{M}$ の有理ホモロジー $H_*(\widetilde{M};\mathbb{Q})$ が有限次元とする．この時，$H^2(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ であり，次のカップ積は非退化である：

$$\smile : H^1(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \times H^1(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(\widetilde{M};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}.$$

⇒　この非退化形式を Milnor ペアリング と呼ぶ。

3-2 Milnorペアリングの計算方法

主定理2 (Milnorペアリングの計算法)

結び目 K の緯線が $\mathfrak{l}_K = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ $(\epsilon_j = \pm 1, 1 \le i_j \le 2g)$ で表されるとき,

$$\textit{Milnor}\text{ペアリング}\ \Omega(K) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\epsilon_k}{2} E_{i_k,i_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \epsilon_k \left(\sum_{m=1}^{2g} \left(\sum_{\substack{1 \le l \le k \\ \wedge i_l = m}} \epsilon_l E_{i_k,m} \right) \right).$$

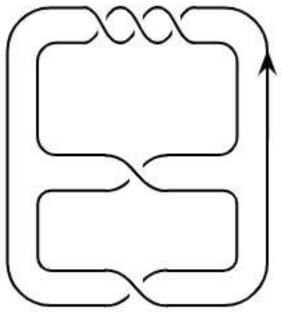
ただし $E_{i,j}$ は (i,j) 成分のみ 1, その他の成分はすべて 0 となるような $2g \times 2g$ 行列.

※ 厳密には、各iについてℓ_Kに現れるx_iの指数の合計が0であることが必要。

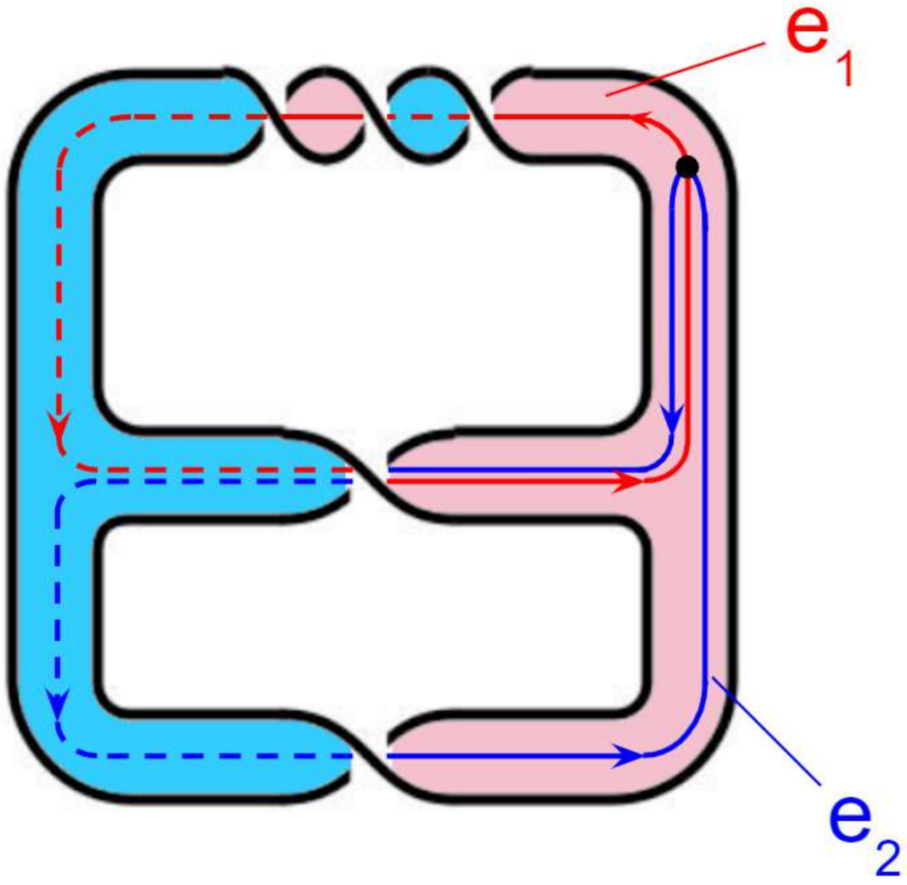
※ 上記の行列表示は$H_1(M,Q)$上のもの。厳密にはKのAlexander多項式の次数が2gに一致する必要もある。

3-2 Milnorペアリングの計算方法

例えば5_2で右図のようにスパインをとると、

緯線  は$e_1e_2^{-1}e_1^{-1}e_2$ (ないし$y_1y_2^{-1}y_1^{-1}y_2$)

と同じ$\pi_1(S^3\setminus 5_2)$の元。



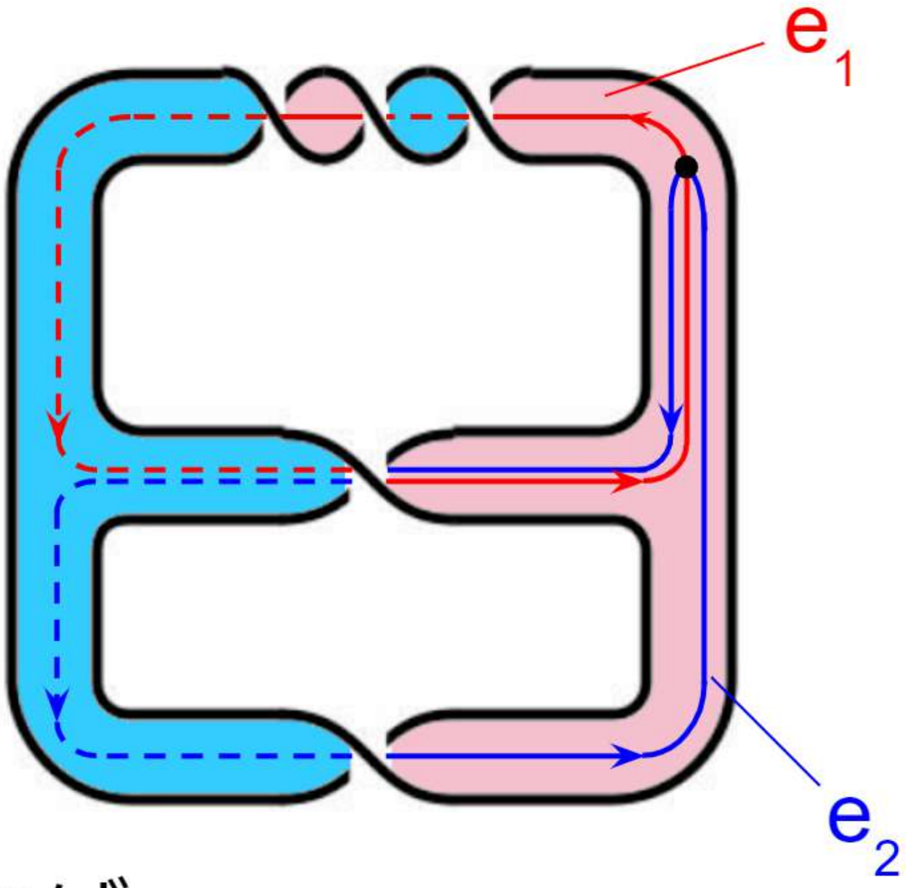
双対語で書けば、緯線 $\ell_{5_2} = x_1^{-2}x_2x_1^{2}x_2^{-1}$ となる。

3-2 Milnorペアリングの計算方法

従って $\ell_{5_2} = x_1^{-2}x_2x_1^{2}x_2^{-1}$から、先の定理より

$\Omega(5_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$と計算される。

これが 5_2 のMilnorペアリング。



☆このように、双対語(と緯線)が分かれば
Milnorペアリングが計算できる。

3-2 Milnorペアリングの計算方法

☆ちなみに緯線の一般式も解明済み。

主定理2 (緯線の一般式)

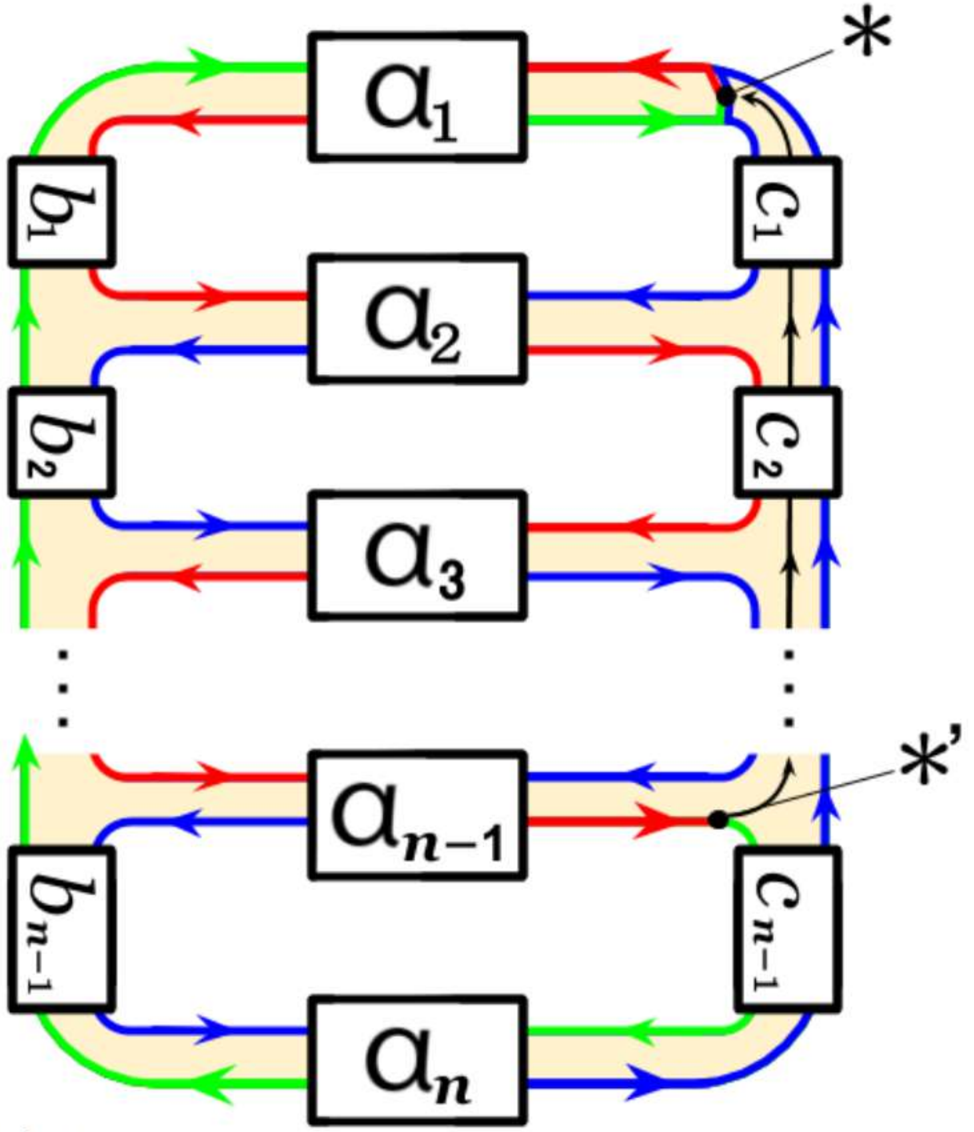
ひねり付きプレッツェル結び目 $P(a_{1(b_1,c_1)}a_{2(b_2,c_2)}\cdots{}_{(b_{n-1},c_{n-1})}a_n)$の緯線について、以下が成り立つ:

(1) 全ての a_i が奇数であり, かつ全ての b_i, c_i が偶数のとき,

$$\mathfrak{l}_K = e_1e_3\cdots e_{2g-1}(e_1e_2\cdots e_{2g})^{-1}e_2e_4\cdots e_{2g}.$$

(2) 全ての a_i および b_2, c_2 が奇数であり,
かつ b_2, c_2 を除く全て b_i, c_i が偶数のとき,

$$\mathfrak{l}_K = e_1(e_2e_4\cdots e_{2g})^{-1}e_1^{-1}e_2e_3\cdots e_{2g}(e_3e_5\cdots e_{2g-1})^{-1}.$$



(※8_{15}のみ主定理2の条件を満たさないので手動で緯線を求める必要あり)

3-3　全体の結論

・Mathematicaを使えば、ひねり付きプレッツェル結び目の双対語→Lin表示→Milnorペアリング と計算していける。

・上の結果は8交点以下の非ファイバー全てに適用できる。

ご清聴ありがとう
ございました。