

# Simplified trisection map の弧の逆像として 得られる閉 3 次元多様体について

東北大学大学院理学研究科数学専攻  
博士課程前期 2 年  
浅野喜敬

結び目の数理  
早稲田大学  
2018/12/26

# 目次

- 安定写像と折り目特異点とカusp特異点
- 閉 4 次元多様体の simplified trisection map
- 主結果 1
- セクションが 4 つの場合
- 主結果 2

## 安定写像と折り目特異点とカスプ特異点

Definition. (右左同値)

$C^\infty(X, \mathbf{R}^2) = \{f : X \rightarrow \mathbf{R}^2 \mid f : C^\infty\}$  に Whitney 位相を入れ, 位相空間とする.

$f, g \in C^\infty(X, \mathbf{R}^2)$  が右左同値とは, ある微分同相写像  $\varphi : X \simeq X$ ,  $\psi : \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2$  が存在して, 次が可換となることである.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

Definition. (安定写像)

$f \in C^\infty(X, \mathbf{R}^2)$  について, ある  $U_f \subset C^\infty(X, \mathbf{R}^2)$  が存在して, 任意の  $g \in U_f$  に対し  $f$  と  $g$  が右左同値であるとき  $f$  を安定写像と呼ぶ.

## Definition. (折り目特異点とカスプ特異点)

$Sing(f) : f$  の特異点集合,  $p \in Sing(f)$  とする。

- $p$  が不定値折り目特異点

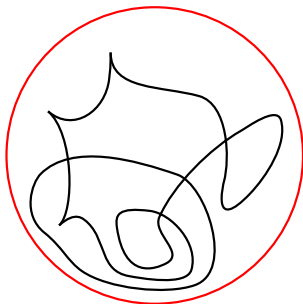
$$\Leftrightarrow \exists (t, x, y, z) : p \text{ まわりの局所座標 s.t. } f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2).$$

- $p$  が定値折り目特異点

$$\Leftrightarrow \exists (t, x, y, z) : p \text{ まわりの局所座標 s.t. } f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2).$$

- $p$  がカスプ特異点

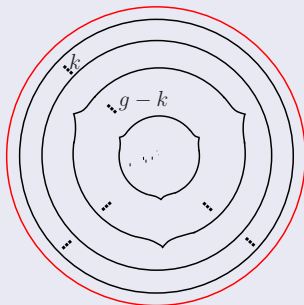
$$\Leftrightarrow \exists (t, x, y, z) : p \text{ まわりの局所座標 s.t. } f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2).$$



## 閉 4 次元多様体の simplified trisection map

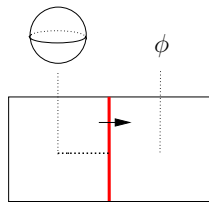
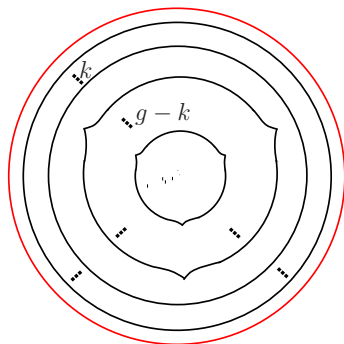
Definition. (simplified  $(g, k)$ -trisection map)[Baykur-Saeki, 2017]

$f: X \rightarrow \mathbf{R}^2$ : 安定写像に対し  $f(\text{Sing}f)$  が次で与えられるとき,  $f$  を simplified  $(g, k)$ -trisection map とよぶ. また,  $g$  を simplified trisection map の種数という.

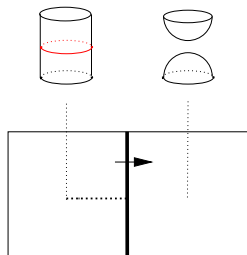
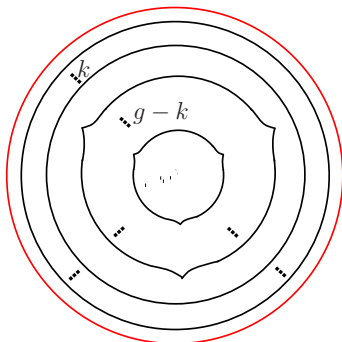


- 赤線部 ... 定値折り目特異値. 黒線部 ... 不定値折り目特異値.
- 尖点部 ... カスプ特異値.

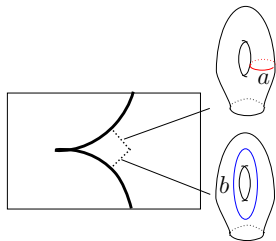
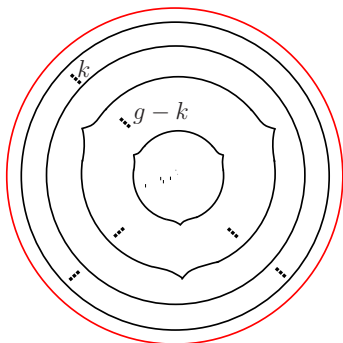
## 特異値を通過するとき生じるファイバーの変化



- 右図は定値折り目特異点のまわりの様子を示したものである。
- 赤太実線部が定値折り目特異点の特異値集合を表している。
- 右図の水平方向では  $-x^2 - y^2 - z^2$  であるため、点線の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われている。



- 右図は不定値折り目特異点のまわりの様子を示したものである。
- 黒太実線部が不定値折り目特異点の特異値集合を表している。
- 右図の水平方向では  $-x^2 - y^2 + z^2$  であるため、点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている。
- このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (右図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び、値域上の点線を reference path, reference path の始点のファイバーを reference fiber という。



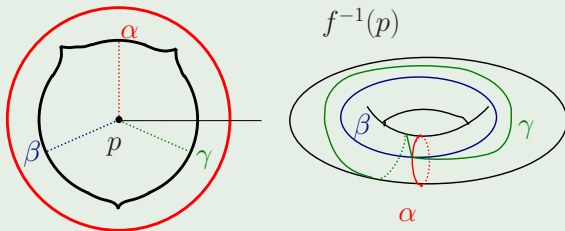
- 右図がカusp特異点のまわりの様子を表している.
- 尖点部では2本の不定値折り目特異値が接している.
- 右図の2本の reference path をひき戻すと、対応する消滅サイクル  $a, b$  に沿って2-ハンドルの接着が行われる. このとき, reference fiber 上で  $a$  と  $b$  はただ1度だけ交わる.



# $\mathbf{CP}^2$ 上の simplified trisection map

## $\mathbf{CP}^2$ 上の simplified trisection map

以下の図は、 $\mathbf{CP}^2$  上の simplified  $(1,0)$ -trisection map  $f$  の特異値集合である。



- 3つの点線は、 $f^{-1}(p)$  を reference fiber としたときの reference path を表している。
- $\alpha, \beta, \gamma$  は各 reference path に対応する不定値折り目特異点の消滅サイクルを表している。

# 先行研究

Theorem. ([Baykur-Saeki, 2017])

任意の閉 4 次元多様体はある simplified  $(g, k)$ -trisection map を許容する.

$g = 1$

$$X \simeq \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3.$$

$g = 2$  ([Hayano, 2017])

$$X \simeq S^2 \times S^2, \pm \mathbf{CP}^2 \# \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3 \# \pm \mathbf{CP}^2 (\text{複号任意}).$$

$g = 3$

レンズ空間の (twisted) spun 4-manifold が例として知られている. ([Meier, 2013] および [Hayano, 2017])

# 先行研究

Theorem. ([Baykur-Saeki, 2017])

任意の閉 4 次元多様体はある simplified  $(g, k)$ -trisection map を許容する.

$g = 1$

$$X \simeq \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3.$$

$g = 2$  ([Hayano, 2017])

$$X \simeq S^2 \times S^2, \pm \mathbf{CP}^2 \# \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3 \# \pm \mathbf{CP}^2 (\text{複号任意}).$$

$g = 3$

レンズ空間の (twisted) spun 4-manifold が例として知られている. ([Meier, 2013] および [Hayano, 2017])

# 先行研究

Theorem. ([Baykur-Saeki, 2017])

任意の閉 4 次元多様体はある simplified  $(g, k)$ -trisection map を許容する.

$$\underline{g = 1}$$

$$X \simeq \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3.$$

$$\underline{g = 2} \text{ ([Hayano, 2017])}$$

$$X \simeq S^2 \times S^2, \pm \mathbf{CP}^2 \# \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3 \# \pm \mathbf{CP}^2 \text{ (複号任意).}$$

$$\underline{g = 3}$$

レンズ空間の (twisted) spun 4-manifold が例として知られている. ([Meier, 2013] および [Hayano, 2017])

## 先行研究

Theorem. ([Baykur-Saeki, 2017])

任意の閉 4 次元多様体はある simplified  $(g, k)$ -trisection map を許容する.

$$\underline{g = 1}$$

$$X \simeq \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3.$$

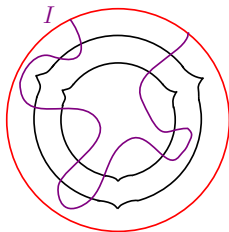
$$\underline{g = 2} \text{ ([Hayano, 2017])}$$

$$X \simeq S^2 \times S^2, \pm \mathbf{CP}^2 \sharp \pm \mathbf{CP}^2, S^1 \times S^3 \sharp \pm \mathbf{CP}^2 \text{ (複号任意).}$$

$$\underline{g = 3}$$

レンズ空間の (twisted) spun 4-manifold が例として知られている. ([Meier, 2013] および [Hayano, 2017])

$f(X)$  に下図のように弧  $I$  を描くと,  $f^{-1}(I)$  は閉 3 次元多様体を定める.

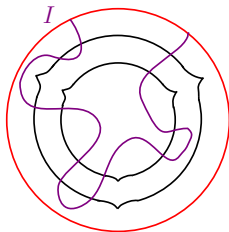


### Question.

$f^{-1}(I)$  が定める閉 3 次元多様体は何であるか？

- $f$  が種数 2 の simplified trisection 写像のとき,  $f^{-1}(I)$  として現れうる多様体の位相型を決定した. (Theorem 1)
- セクションの数を 4 つに増やした安定写像  $f$  に対し, 無限個の双曲多様体が  $f^{-1}(I)$  として得られる. (Theorem 2)

$f(X)$  に下図のように弧  $I$  を描くと,  $f^{-1}(I)$  は閉 3 次元多様体を定める.

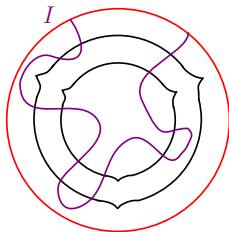


### Question.

$f^{-1}(I)$  が定める閉 3 次元多様体は何であるか？

- $f$  が種数 2 の simplified trisection 写像のとき,  $f^{-1}(I)$  として現れうる多様体の位相型を決定した. (Theorem 1)
- セクションの数を 4 つに増やした安定写像  $f$  に対し, 無限個の双曲多様体が  $f^{-1}(I)$  として得られる. (Theorem 2)

$f(X)$  に下図のように弧  $I$  を描くと,  $f^{-1}(I)$  は閉 3 次元多様体を定める.



### Question.

$f^{-1}(I)$  が定める閉 3 次元多様体は何であるか？

- $f$  が種数 2 の simplified trisection 写像のとき,  $f^{-1}(I)$  として現れうる多様体の位相型を決定した. (Theorem 1)
- セクションの数を 4 つに増やした安定写像  $f$  に対し, 無限個の双曲多様体が  $f^{-1}(I)$  として得られる. (Theorem 2)



## 主結果 1

## Theorem 1. [A.]

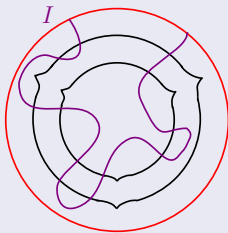
$f: X \rightarrow \mathbf{R}^2$  : simplified  $(2,0)$ -trisection map,

$I \subset f(X)$  : proper, generic, and simple arc,

このとき  $f^{-1}(I)$  として得られる閉 3 次元多様体は

$$S^3, S^1 \times S^2, \pm L(r^2, s), \pm L(t, 1)$$

のいずれかの有限個の連結和である。ただし、 $s$  は  $r^2 \pm 1$  の約数である。



## Definition. (cusp move · inner-digon move)

$I \subset f(X)$  に対する左図の局所変形を cusp move, 右図の局所変形を inner-digon move とよぶ。

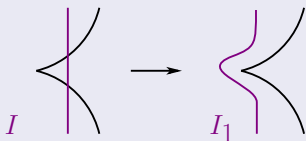


Figure: cusp move

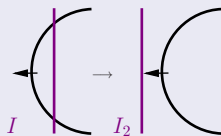


Figure: inner-digon move

## Lemma 1.

上の記号のもとで, 次が成り立つ。

- (1)  $f^{-1}(I) \simeq f^{-1}(I_1)$ .
- (2)  $f^{-1}(I) \simeq f^{-1}(I_2) \# S^1 \times S^2$ .

## Lemma 2.

$f : X \rightarrow \mathbf{R}^2$  : simplified  $(2, 0)$ -trisection map,

$I \subset f(X)$  : proper, generic, and simple arc,

$M_i$  : case (i) の定める閉 3 次元多様体 ( $i = 1, 2$ )

このとき  $f^{-1}(I)$  として得られる閉 3 次元多様体は

$$S^1 \times S^2, \pm M_1, \pm M_2$$

の有限個の連結和である.

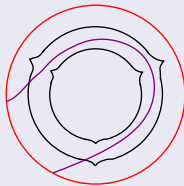


Figure: case(1)

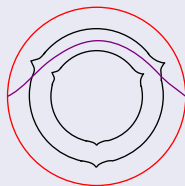


Figure: case(2)

## Proof.

$I$  に対し inner-digon が現れなくなるまで move を施す. この回数を  $n$  として, move 後の弧を  $I_1$  とすると,  $f^{-1}(I) \simeq f^{-1}(I_1) \#^n S^1 \times S^2$  である.

$\rightsquigarrow I_1$  に対し cusp move を施すことで,  $I_1$  は次の (a), (b) を端点でつなげたものへと変化する.

$\rightsquigarrow f^{-1}(I)$  として得られる閉 3 次元多様体は  $S^1 \times S^2$ ,  $\pm M_1$ ,  $\pm M_2$  の有限個の連結和である.

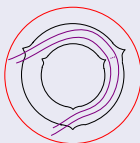


Figure: (a)

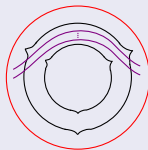


Figure: (b)

## Theorem 1 の証明の概略.

Lemma 2 より,  $M_1, M_2$  の位相型を決定すればよい.

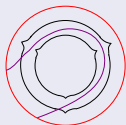
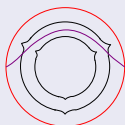
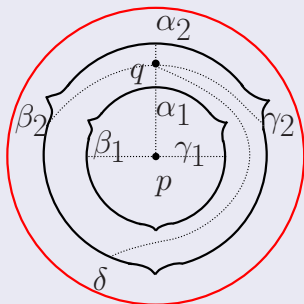
Figure:  $M_1$ Figure:  $M_2$ 

Figure: reference paths

まず, 右図のように reference fiber を  $f^{-1}(p) \simeq \Sigma_2$  として, reference path に対応する消滅サイクルをそれぞれ  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta$  とする.

## Theorem 1 の証明の概略.

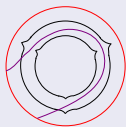


Figure: (1)

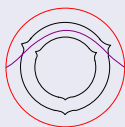


Figure: (2)

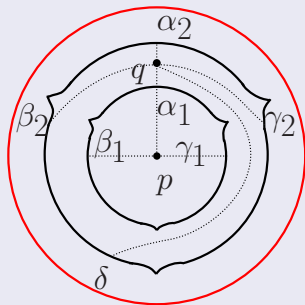


Figure: (3)

図 (1) の定める多様体は Heegaard 図式  $(f^{-1}(q), \beta_2, \delta)$  により決定され, 図 (2) の定める多様体は Heegaard 図式  $(f^{-1}(q), \beta_2, \gamma_2)$  により決定される.

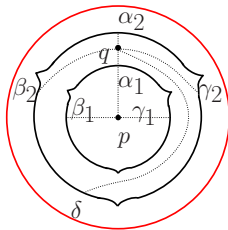
$\delta, \gamma_1, \gamma_2$  を計算するために、次を用いる。

Theorem(Hayano, [2017])

ある  $\mu \in \text{Mod}(\Sigma_2)$  が存在して、

$$\delta = \mu(\beta_2) = t_{t_{\alpha_1}(\gamma_1)} \circ t_{t_{\gamma_1}(\beta_1)} \circ t_{t_{\beta_1}(\alpha_1)}(\beta_2)$$

である。



ここでは  $\alpha_1 \cdot \beta_1 = \beta_1 \cdot \gamma_1 = \gamma_1 \cdot \alpha_1 = \alpha_2 \cdot \beta_2 = \alpha_2 \cdot \gamma_2 = 1$  であるときのみを述べる.  $\gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1 + r\alpha_2 + s\beta_2$  とおく. このとき,  $\alpha_1 \cdot \gamma_1 = \gamma_1 \cdot \beta_1 = -1$  より  $p = q = -1$  がしたがう. ゆえに,  $\gamma_1 = -\alpha_1 - \beta_1 + r\alpha_2 + s\beta_2$  である. 以下これらを用いて,  $\delta = \mu(\beta_2)$  を計算していく.

$$\begin{aligned}
 \delta = \mu(\beta_2) &= t_{t_{\alpha_1}(\gamma_1)} \circ t_{t_{\gamma_1}(\beta_1)} \circ t_{t_{\beta_1}(\alpha_1)}(\beta_2) \\
 &= t_{t_{\alpha_1}(\gamma_1)} \circ t_{t_{\gamma_1}(\beta_1)}(\beta_2) \\
 &= \dots \\
 &= t_{t_{\alpha_1}(\gamma_1)}(-r\alpha_1 + (1+rs)\beta_2 + r^2\alpha_2) \\
 &= \dots \\
 &= -r\alpha_1 + (1+rs)\beta_2 + r^2\alpha_2.
 \end{aligned}$$

なので,  $(f^{-1}(q), \beta_2, \delta)$  は  $L(r^2, 1+rs)$  を定めることがわかる.  
 $(f^{-1}(q), \beta_2, \gamma_2)$  は  $|\gamma_2 \cdot \delta| = 1$  より計算することで  $L(t, 1)$  を定めることがわかる.

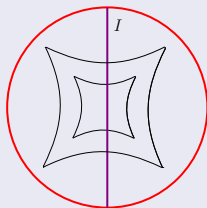


## 主結果 2

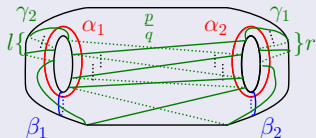
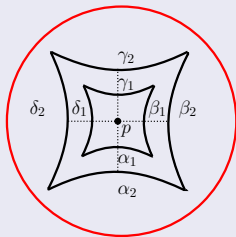
## Theorem 2. [A.]

$X \simeq \sharp^2 S^2 \times S^2$  または  $\sharp^2 \mathbf{CP}^2 \sharp^2 - \mathbf{CP}^2$  とする. このとき次を満たす無限個の安定写像の族  $\{f_i : X \rightarrow \mathbf{R}^2\}_{i \in \mathbf{N}}$  が存在する.

- $f_i$  の特異値集合は下図で与えられる.
- $f_i^{-1}(I)$  は双曲多様体である.
- $i \neq j$  ならば  $f_i^{-1}(I)$  と  $f_j^{-1}(I)$  は同相でない.



## Theorem 2 の証明の概略.



$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \beta = \{\beta_1, \beta_2\}, \gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$  を右図のように指定し,  $(\Sigma_2, \alpha, \beta, \gamma)$  より左図の特異値集合を持つ安定写像を構成する. ここで,  $l, r$  は任意の整数である. 組  $(\Sigma_2, \alpha, \beta)$  は  $S^3$  の標準的な Heegaard 図式なので, この図式を忘れて  $\gamma$  を  $S^3$  上の絡み目とみなすことができる. このようにして得られる絡み目はフレーミング係数が  $l, r, p, q$  で決定される 2 橋絡み目である.

→ 双曲絡み目となるように 2 橋絡み目を選び,  $l, r$  を十分大きく選ぶと, 無限個の双曲多様体を得られる.

## 今後の課題

### Theorem 1. [A.](再掲)

$f : X \rightarrow \mathbf{R}^2$  : simplified  $(2, 0)$ -trisection map,  
 $I \subset f(X)$  : proper, generic, and simple arc,  
 このとき  $f^{-1}(I)$  として得られる閉 3 次元多様体は

$$S^3, S^1 \times S^2, \pm L(r^2, s), \pm L(t, 1)$$

のいずれかの有限個の連結和である。ただし、 $s$  は  $r^2 \pm 1$  の約数である。

- Theorem 1 において、レンズ空間を弧の引き戻しとして持つような simplified  $(2, 0)$ -trisection map が構成できるか確定させる。
- Theorem 1 および 2 における  $X$  がどの 4 次元多様体となるかを確定させる。